ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 11

СПЕКТР ОПЕРАТОРА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Пусть $\mathrm{A}: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве E над полем. **C**.

<u>Определение 1.</u> Точка $\lambda \in \mathbf{C}$ называется **регулярной точкой** оператора A, если оператор $(\mathrm{A} - \lambda I)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором на E, т.е. оператор $(\mathrm{A} - \lambda I): \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ — обратим . Множество всех регулярных точек обозначается через $\rho(\mathrm{A})$ и называется **резольвентным множеством оператора** A.

<u>Определение 2.</u> Комплексное число λ, не являющееся регулярным, называется **спектральным**. Множество спектральных точек $\sigma(\mathrm{A})$ оператора A называется **спектром** оператора A, т.е. $\sigma(\mathrm{A}) = \mathbf{C} \setminus \rho(\mathrm{A})$.

<u>Определение 3.</u> Операторнозначная функция $R(\lambda; \mathrm{A}) \overset{def}{=} (\mathrm{A} - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(\mathrm{A})$ называется **резольвентой** оператора A.

ТЕОРЕМА 1. *Резольвентное множество* $\rho(\mathrm{A})$ *оператора* A *открыто в* **C** , *а резольвента* $R(\lambda; \mathrm{A})$ *является аналитической функцией в* $\rho(\mathrm{A})$.

Отметим следующие важные свойства спектра $\sigma(\mathrm{A})$ оператора A :

1. $\sigma(\mathrm{A}) \neq \varnothing$;
2. $\sigma(\mathrm{A})$ есть компактное подмножество **C**;
3. $\sigma(\mathrm{A}) \subset \{z \in \boldsymbol{C}: |Z| \le \|\mathrm{A}\|\}$.

Из теоремы Банаха об обратном операторе следует , что если $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$, то возможны две ситуации :

I. Оператор $\mathrm{A} - \lambda I$ не является инъекцией. Тогда существует $x_0 \in \mathrm{E}$, $x_0 \neq 0$ такое, что $(\mathrm{A} - \lambda I)x_0 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x_0 = \lambda x_0$.

<u>Определение 4.</u> Комплексное число λ при котором уравнение $\mathrm{A}x = \lambda x$ имеет ненулевое решение называется **собственным значением оператора** A, а множество $\sigma_g(\mathrm{A})$ всех собственных значений оператора A — **дискретным спектром** оператора A. Ненулевые решения уравнения $\mathrm{A}x = \lambda x$ называются **собственными векторами** оператора A, отвечающими собственному значению λ оператора A.

II. Оператор $\mathrm{A} - \lambda I: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ — инъективен, но не является сюръекцией.

Определение 5. Множество всех таких $\lambda \in \sigma(A)$, при которых оператор $A - \lambda I$ является инъекцией, но не является сюрьекцией, называется непрерывным спектром оператора A. Обозначим его через $\sigma_{Н}(A)$.

Ясно , что $\sigma(A) = \sigma_g(A) \coprod \sigma_{Н}(A)$. Понятие спектра оператора обобщает хорошо известное из алгебры понятие множества собственных чисел матрицы.

Литература : [1] с.238-242 ; [2] с. 219-222 ; [5] с. 218-222.

2. З А Д А Ч И

1. Найти дискретный и непрерывный спектр оператора $A \in L(E,E)$, где $E = C[0,1]$.

	A	N	A
1.1	$(Ax)(t) = tx(0)$	1.2	$(Ax)(t) = t^2 x(1)$
1.3	$(Ax)(t) \equiv 0$	1.4	$(Ax)(t) = x(t)$
1.5	$(Ax)(t) = tx(t)$	1.6	$(Ax)(t) = x(1) + tx(0)$
1.7	$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$	1.8	$(Ax)(t) = \{\lvert 2t-1\rvert - \lvert 2t - 1/2\rvert\}x(t)$
1.9	$(Ax)(t) = tx(0) + t^2 x(1)$	1.10	$(Ax)(t) = \{\lvert 3t-1\rvert - \lvert 2-3t\rvert\}x(t)$
1.11	$(Ax)(t) = 2x(0) + 3tx(1/2)$	1.12	$(Ax)(t) = t^2 x(t)$
1.13	$(Ax)(t) = (2t+1)x(t)$	1.14	$(Ax)(t) = tx(0)$
1.15	$(Ax)(t) = t(x(0) + x(1))$	1.16	$(Ax)(t) = t^2(x(0) - x(1))$

Решение задачи 1.16. Найдем дискретный спектр оператора A. Он состоит из всех таких комплексных чисел λ, для которых существует ненулевое решение уравнения:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow t^2(x(0) - x(1)) = \lambda x(t). \qquad (1)$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda=0$. Тогда уравнение (1) перепишется в виде $t^2(x(0) - x(1)) \equiv 0$ и ненулевым его решением будет, например, функция $x(t) = t(t-1)$ (ибо $x(0) - x(1) = 0$). Итак $\lambda=0$ - точка дискретного спектра . Пусть $\lambda \neq 0$, тогда (1) перепишем в виде

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} t^2 (x(0) - x(1)). \qquad (2)$$

Отсюда видно, что если ненулевое решение уравнения (1) есть, то его можно записать в форме $x(t) = \alpha t^2$. Для нахождения α, положим в (2) $t = 1$:

$$x(1) = \frac{1}{\lambda}(x(0) - x(1)) \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\alpha}{\lambda} \ .$$

Теперь, если $\lambda \neq -1$, то $\alpha = 0$ и $x(t) \equiv 0$, т.е. (1) имеет только нулевое решение. Если же $\lambda = -1$, то ненулевым решением (1) будет, например, $x(t) = t^2$. Поэтому $\sigma_{\text{g}}(\mathrm{A}) = \{-1\}$.

Найдем $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A})$. Он состоит из тех $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{g}}(\mathrm{A})$, для которых при некотором $y \in C[0,1]$ уравнение $(\mathrm{A}x)(t) - \lambda x(t) = y(t)$ не имеет решения в $C[0,1]$. Последнее для данного оператора запишется в виде

$$t^2 (x(0) - x(1)) - \lambda x(t) = y(t). \tag{3}$$

Поскольку $\lambda \neq 0$, его можно переписать в виде $x(t) = \dfrac{x(0) - x(1)}{\lambda} t^2 - \dfrac{1}{\lambda} y(t)$.

Положим $t = 0$ и $t = 1$. Тогда

$$\begin{cases} x(0) = -\dfrac{1}{\lambda} y(0), \\ x(1) = \dfrac{x(0) - x(1)}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} y(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = -\dfrac{1}{\lambda} y(0), \\ x(1) = \dfrac{1}{\lambda + 1}\left(-\dfrac{1}{\lambda} y(0) - y(1) \right) \end{cases}$$

и при любом $y \in C[0,1]$ уравнение (3) имеет решение

$$x(t) = \frac{t^2}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda} y(0) + \frac{1}{\lambda + 1}\left(\frac{1}{\lambda} y(0) + y(1) \right) \right] - \frac{1}{\lambda} y(t)$$

из $C[0,1]$. Поэтому $\sigma_{\text{н}}(\mathrm{A}) = \varnothing$. ●

2. Найти дискретный и непрерывный спектр оператора $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E}, \mathrm{E})$.

	E	A		E	A
2.1	l_2	$\mathrm{A}x = 2(x_2, x_3, x_4, \ldots)$	2.2	l_2	$\mathrm{A}x = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$
2.3	l_2	$\mathrm{A}x = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots \right)$	2.4	l_2	$\mathrm{A}x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$

2.5	c_0	$Ax=(0,x_1,x_2,0,0,\ldots)$	2.6	l_1	$Ax=(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$
2.7	l_∞	$Ax=\left(0,\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\ldots\right)$	2.8	c	$Ax=(x_1,x_2,0,0,\ldots)$
2.9	l_4	$Ax=(2x_2,3x_3,0,0,\ldots)$	2.10	l_2	$Ax=\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)x_1,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n,\ldots\right)$
2.11	c_0	$Ax=(0,x_1,0,0,\ldots)$	2.12	l_∞	$Ax=(x_1,0,x_2,0,0,\ldots)$
2.13	l_2	$Ax=(0,0,x_1,x_2,0,0,\ldots)$	2.14	l_2	$Ax=(x_1,0,x_2,x_3,\ldots)$
2.15	l_1	$Ax=(x_3,x_4,0,0,\ldots)$	2.16	l_2	$Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\ldots)$ $\lambda=(\lambda_n)$, $\lvert\lambda_n\rvert\le M$

Решение задачи 2.16. Из лабораторной работы 9 (см. решенную там задачу) следует, что $\|A\|=\sup\limits_n|\lambda_n|\le M$, т.е. A — ограниченный оператор. Найдем $\sigma_g(A)$. Уравнение $Ax=\lambda x$ примет вид $(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\lambda_3x_3,\ldots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\ldots)$. Оно эквивалентно бесконечной системе уравнений $\lambda_1x_1=\lambda x_1,\lambda_2x_2=\lambda x_2,\ldots,\lambda_nx_n=\lambda x_n,\ldots$.

Эта система имеет ненулевое решение $x^*\in l_2$ только в том случае, когда $\lambda=\lambda_i$ при некотором $i\in\mathbf{N}$. Поэтому $\sigma_g(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\}$.

Найдем $\sigma_н(A)$. Поскольку из свойства 2 следует, что спектр $\sigma(A)$ является замкнутым множеством, то все предельные точки последовательности $\{\lambda_n\}_1^\infty$, не совпадающие с точками самой этой последовательности , принадлежит $\sigma_н(A)$.

Покажем , что других точек в $\sigma_н(A)$ нет. Действительно, если λ_0 не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$ и не совпадает ни с одной точкой самой этой последовательности, то $|\lambda_n-\lambda_0|>c>0$ и последовательность $1/|\lambda_n-\lambda_0|$ $(n=1,2,\ldots)$ — ограничена. Но

$$(A-\lambda_0I)^{-1}y=\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}y_1,\frac{1}{\lambda_2-\lambda_0}y_2,\ldots,\frac{1}{\lambda_n-\lambda_0}y_n,\ldots\right)$$

и, следовательно, оператор $(A-\lambda_0I)^{-1}$ также является оператором диагонального вида, причем $\left\|(A-\lambda_0I)^{-1}\right\|=\sup\limits_n\frac{1}{|\lambda_n-\lambda_0|}\le\frac{1}{c}$, т.е. он ограничен. Поэтому $\lambda_0\in\rho(A)$. ●

3. Найти спектр и резольвенту интегрального оператора $(\mathrm{A}x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

	a	b	$K(t,s)$		a	b	$K(t,s)$
3.1	0	1	t^2s^2	3.2	0	1	e^{t+s}
3.3	–1	1	$t+s$	3.4	0	2	t^2s
3.5	–1	2	s^2t	3.6	0	1	e^{t-s}
3.7	0	π	$\sin(t-s)$	3.8	0	π	$\cos(t+s)$
3.9	0	1	$t-s$	3.10	0	1	$1+ts$
3.11	–1	1	ts^2+t^2s	3.12	0	$\frac{\pi}{2}$	$\sin t + t\cos s$
3.13	0	1	$1-ts$	3.14	–1	1	$ts+t^2s^2$
3.15	0	1	$t-t^2s$	3.16	0	1	ts

Решение задачи 3.16. Найдем дискретный спектр оператора A в $C[0,1]$, т.е. те $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых уравнение

$$\int_0^1 stx(s)ds = \lambda x(t) \tag{4}$$

имеет ненулевое решение $x(t) \in C[0,1]$. Пусть $\lambda = 0$, тогда (4) примет вид $t\int_0^1 sx(s)ds \equiv 0$ и ненулевым решением (4) при $\lambda = 0$ будет, например, функция $x_1(t) = \frac{1}{3}(3t-2)$. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} t \int_0^1 sx(s)ds. \tag{5}$$

Следовательно, если решение уравнения (4) есть, то оно имеет вид $x(t) = \frac{\alpha}{\lambda} t$. Константу α находим, подставляя такое $x(t)$ в (5) :

$$\frac{\alpha}{\lambda}t=\frac{1}{\lambda}t\int_0^1 s\frac{\alpha}{\lambda}sds \Leftrightarrow \alpha t\equiv\frac{\alpha}{3\lambda}t \Leftrightarrow \alpha=\frac{\alpha}{3\lambda} \Leftrightarrow \alpha\left(1-\frac{1}{3\lambda}\right)=0.$$

Если $\lambda\neq {}^1\!/_3$, то $\alpha=0$ и $x(t)\equiv 0$, т.е. уравнение (4) имеет только нулевое решение, а следовательно, такие λ не принадлежат $\sigma_g(A)$. Если $\lambda={}^1\!/_3$, то ненулевым решением уравнения (4) будет, например, $x_2(t)=t$, поэтому дискретный спектр A в $C[0,1]$ равен $\sigma_g(A)=\{0,{}^1\!/_3\}$. Поскольку функции $x_1(t)$ и $x_2(t)\in L_2[0,1]$, то анализ приведенных выше рассуждений позволяет заменить $C[0,1]$на $L_2[0,1]$, и поэтому таким же будет дискретный спектр A в $L_2[0,1]$.

Найдем $\sigma_H(A)$ в $C[0,1]$. Для этого при $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0,{}^1\!/_3\}$ и $y\in C[0,1]$ рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 stx(s)ds-\lambda x(t)=y(t) \tag{6}$$

Покажем, что оно имеет решение в $C[0,1]$ для любой функции $y(t)$ из $C[0,1]$. Действительно, переписав (6) следующим образом

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}t\int_0^1 sx(s)ds-\frac{1}{\lambda}y(t), \tag{7}$$

видим, что если решение для (6) есть, то оно имеет вид $x(t)=\frac{\alpha t}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}y(t)$. Константу α находим, подставляя $x(t)$ в (7) :

$$\frac{\alpha}{\lambda}t-\frac{1}{\lambda}y(t)=\frac{1}{\lambda}t\int_0^1 s\left(\frac{\alpha}{\lambda}s-\frac{1}{\lambda}y(s)\right)ds-\frac{1}{\lambda}y(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha t=t\left[\frac{\alpha}{3\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 sy(s)ds\right]\Leftrightarrow \alpha=\frac{\alpha}{3\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 sy(s)ds \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{\lambda-{}^1\!/_3}\int_0^1 sy(s)ds\ .$$

Итак уравнение (6) при $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0,{}^1\!/_3\}$ и любом $y\in C[0,1]$ имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1/3)}\int_0^1 tsy(s)ds - \frac{1}{\lambda} y(t), \qquad (8)$$

которое также принадлежит $C[0,1]$. Поэтому $\sigma_{н}(\mathrm{A}) = \varnothing$. Очевидно, что если бы $y \in L_2[0,1]$, то решение (8) также бы находилось в $L_2[0,1]$. Поэтому и в $L_2[0,1]$ непрерывный спектр оператора A равен $\sigma_{н}(\mathrm{A}) = \varnothing$.

Осталось найти резольвенту A. Поскольку формула (8) дает решение уравнения (6), то тем самым мы нашли оператор $R(\lambda, \mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \lambda I)^{-1}$, если $\lambda \neq 0, 1/3$:

$$R(\lambda, \mathrm{A})y(t) = (\mathrm{A} - \lambda I)^{-1} y(t) = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1/3)}\int_0^1 tsy(s)ds - \frac{1}{\lambda} y(t). \bullet$$

4. Если следующие множества $\mathrm{M} \subset \mathbf{C}$ могут быть спектром некоторого линейного ограниченного оператора, то привести пример такого оператора A, для которого $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{M}$.

	M		M
4.1	$\{0,1,2\}$	4.2	$\{\lambda \in \mathbf{C}: -1 \le \lambda \le 1\}$
4.3	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lvert\lambda\rvert \le 2\}$	4.4	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lambda = it, 0 \le t \le 1\}$
4.5	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$	4.6	$\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$
4.7	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lambda = t^2 + it, 0 \le t \le 1\}$	4.8	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lvert\lambda\rvert = 1\}$
4.9	$\{0\}$	4.10	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lvert I_m \lambda\rvert \le 1\}$
4.11	$\{0, i\}$	4.12	$\{\lambda \in \mathbf{C}: 1 \le \lvert\lambda\rvert \le 2\}$
4.13	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lambda = it^2, 0 < t \le 1\}$	4.14	$\{0, 1, i\}$
4.15	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lambda = t + it, 0 \le t \le 1\}$	4.16	$\{\lambda \in \mathbf{C}: \lvert\lambda\rvert \le 1\}$

Решение задачи 4.16. Приведем три различных решения этой задачи :

I. Рассмотрим оператор $\mathrm{A}: l_1 \to l_1$, определенный равенством $\mathrm{A}x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.

Так как уравнение $\mathrm{A}x = \lambda x$ в данном случае имеет вид

$$(x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots), \qquad (9)$$

а последнее равносильно бесконечной системе уравнений $x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2$, $x_4 = \lambda x_3, \ldots$; то ненулевым решением (9) может быть только последовательность вида $x^* = (z, \lambda z, \lambda^2 z, \lambda^3 z, \ldots) \quad (z \in \boldsymbol{C}, \quad z \neq 0)$, если $x^* \in l_1$. Но

$$x^* \in l_1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| z\lambda^n \right| < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n < +\infty .$$

Последний ряд сходится только при $|\lambda| < 1$. Итак, только при $|\lambda| < 1$ уравнение (9) имеет ненулевое решение из l_1. Поэтому $\sigma_g(A) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.

Поскольку $\|A\| = 1$ (доказать!), то в силу свойства 3 спектра имеем $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| \le 1\}$. С другой стороны, спектр оператора (свойство 2) — замкнутое множество. Поэтому $\sigma_{Н}(A) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ и $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$.

II. Рассмотрим оператор нормального вида в l_2: $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots), |\lambda_i| \le 1$.

Из решения задачи 2.16 следует, что $\sigma_g(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Поскольку множество $D = \{\lambda : |\lambda| < 1, \lambda = a + ib; a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ является счетным и всюду плотным в замкнутои множестве M= $\{\lambda : |\lambda| \le 1\}$, то выбирая в качестве последовательности λ_i все элементы множества *D*, будем иметь $\sigma_g(A) = M$, а $\sigma_{Н}(A) = [\overline{M}] \setminus M = \{\lambda : |\lambda| \le 1\} \setminus M$.
Итак, $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$.

III. Пусть *C*(M) — множество всех непрерывных комплексных функций на заданном множестве M, наделенное равномерной нормой. Положим $(Ax)(z) = zx(z)$ в *C*(M). Тогда $\sigma(A)$ =M (смотри задачу 39). ●

Варианты задания

Вариант 1	1.15	2.10	3.5	4.1
Вариант 2	1.14	2.9	3.6	4.2
Вариант 3	1.13	2.8	3.7	4.3
Вариант 4	1.12	2.7	3.8	4.4
Вариант 5	1.11	2.6	3.9	4.5
Вариант 6	1.10	2.5	3.10	4.6
Вариант 7	1.9	2.4	3.11	4.7
Вариант 8	1.8	2.3	3.12	4.8
Вариант 9	1.7	2.2	3.13	4.9
Вариант 10	1.6	2.1	3.14	4.10
Вариант 11	1.5	2.11	3.15	4.11

Вариант 12	1.4	2.12	3.4	4.12
Вариант 13	1.3	2.13	3.3	4.13
Вариант 14	1.2	2.14	3.2	4.14
Вариант 15	1.1	2.15	3.1	4.15
Вариант 16	1.5	2.15	3.5	4.10
Вариант 17	1.6	2.14	3.6	4.9
Вариант 18	1.7	2.13	3.7	4.8
Вариант 19	1.8	2.12	3.8	4.7
Вариант 20	1.9	2.11	3.9	4.6
Вариант 21	1.10	2.10	3.10	4.5
Вариант 22	1.11	2.9	3.11	4.4
Вариант 23	1.12	2.8	3.12	4.3
Вариант 24	1.13	2.7	3.13	4.2
Вариант 25	1.14	2.6	3.14	4.1
Вариант 26	1.15	2.5	3.15	4.11
Вариант 27	1.4	2.4	3.1	4.12
Вариант 28	1.3	2.3	3.2	4.13
Вариант 29	1.2	2.2	3.3	4.14
Вариант 30	1.1	2.1	3.4	4.15

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

38. Пусть E — конечномерное нормированное пространство над **C**. Доказать, что непрерывный спектр линейного оператора $\mathrm{A}: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ пуст.

39. Пусть X - компактное топологическое пространство и $C(\mathrm{X})$ — банахово пространство комплексных непрерывных функций на X с нормой $\|x(t)\| = \sup\{|x(t)|: x \in \mathrm{X}\}$. Найти спектр оператора A действующего в $C(\mathrm{X})$ по формуле $\mathrm{A}x(t) = x_0(t)x(t)$, где $x_0(t) \in C(\mathrm{X})$.

40. Может ли дискретный спектр быть не замкнутым множеством ?

41. Показать , что любое компактное множество комплексной плоскости **C** может быть спектром некоторого оператора.

42. Показать, что если λ — собственное значение оператора A такое, что $|\lambda| = \|\mathrm{A}\|$, то сопряженное к нему число $\bar{\lambda}$ является собственным значением сопряженного оператора A^*.

43. Доказать что :

а) если λ — собственное значение оператора A, то λ^n — собственное значение оператора $\mathrm{A}^n (n \in \boldsymbol{N})$;

б) если λ — собственное значение оператора A^2, то $\sqrt{\lambda}$ или $-\sqrt{\lambda}$ является собственным значением оператора A

44. Пусть оператор $\mathrm{A} \in L(\mathrm{E},\mathrm{E})$ обратим. Доказать, что $\sigma(\mathrm{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(\mathrm{A})\}$.

45. Пусть $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in L(\mathrm{E},\mathrm{E})$. Доказать что ненулевые элементы $\sigma(\mathrm{AB})$ и $\sigma(\mathrm{BA})$ совпадают .

46. Пусть A — ограниченный линейный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве E, $\lambda \in \mathbf{C}$ и существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{E}$, что $\|x_n\| = 1$ и $\mathrm{A}x_n - \lambda x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$.