Лабораторная работа № 9
Асимптотическое поведение функций. Вычисление пределов

Необходимое понятие и теоремы: бесконечно малые функции при $x \to a$, сравнение бесконечно малых функций, асимптотические равенства, эквивалентные бесконечно малых, применение асимптотических равенств для вычисления пределов.

Литература: [1] с. 181-184, 216-218, [2] с.72-77, [6] с. 102-105, 136-137.

1 Определить порядок относительно x бесконечно малой при $x \to 0$ (при $x \to 0+$) функций $g(x)$:

№	A	B
	$g(x)$	$g(x)$
1	*2*	*3*
1.1	$x^3 + x$	$e^{\sqrt{x}} - 1$
1.2	$\frac{4x^5}{1+x^2}$	$e^{\sin x} - 1$
1.3	$\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sin x}$	$e^{x^2} - \cos^2 x$
1.4	$\sqrt{x} tg \frac{\pi x}{2}$	$\ln(1 + x\sin\sqrt{x})$
1.5	$\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$	$\frac{\cos \pi x - 1}{\sin\sqrt{x}}$
1.6	$x\sin^2 x$	$\arcsin(\sqrt{1+x} - 1)$
1.7	$\arcsin x^2$	$tgx - \sin x$
1.8	$\sqrt{x^2+1} - 1$	$e^{tgx} - x$
1.9	$\arcsin(2\sin x)$	$\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$
1.10	$e^{\cos x} - e$	$\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$
1.11	$\frac{x(x+1)}{1+2x}$	$e^{x^2} - 1$
1.12	$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$	$e^x - \cos x$
1.13	$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 1$	$1 - \cos x$
1.14	$\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$	$\ln(1+\sin^2 x)$
1.15	$\sin\sqrt{1-x} - \sin 1$	$\frac{x\sqrt{x}}{\sin x}$

1	*2*	*3*
1.16	$\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$	$\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$
1.17	$1-\cos 2x^2$	$\ln(1+\sqrt{x\sin x})$
1.18	$\arccos(\sqrt{1+x})$	$\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}$
1.19	$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$	$\arccos(\sqrt{1+x^2})$
1.20	$\ln(1+\sqrt{x})$	$\arcsin(1-\cos x)$

2 Для бесконечно малых при $x \to a$ (при $x \to a+0$) функций $f(x)$ и $g(x)$ выяснить, какие из следующих соотношений верны: 1) $f(x)=O(g(x))$, 2) $g(x)=O(f(x))$, 3) $f(x)=o(g(x))$, 4) $g(x)=o(f(x))$, 5) $f(x)\sim g(x)$, 6) $f(x)\asymp g(x)$:

№	a	$f(x)$	$g(x)$
1	*2*	*3*	*4*
2.1	0	$\sin x$	$\arcsin x$
2.2	1	$tg\pi x$	$\sqrt{x-1}$
2.3	0	$\ln(1+\sin x)$	$\sqrt{1-\cos x}$
2.4	∞	$\sqrt{x^2+1}-\|x\|$	$\frac{1}{\sqrt{\|x\|}}$
2.5	0	$\arcsin x$	$\sqrt{x}$
2.6	0	$\ln(1+\sqrt{x})$	$\sin\sqrt{x}$
2.7	0	$\frac{1-\cos 2x}{tgx}$	$\ln(1+x)$
2.8	1	$e^{x^2}-1$	$\sin x^2$
2.9	0	$e^{\sin x}-1$	$\ln(1-x)$
2.10	2	$\frac{2^x-4}{\sqrt{x}}$	$\sin\sqrt{x}$
2.11	1	$\cos\frac{\pi}{2}x$	$\sin(x-1)$
2.12	0	$\ln(1+x^2)$	$2x$
2.13	$+\infty$	$\sqrt{x^2-1}-x$	$\frac{1}{x}$

1	2	3	4
2.14	0	$x^2 actgx$	$\sin^3 x$
2.15	1	$\sqrt{x-1}\arccos x$	$\sqrt{(x-1)^3}$
2.16	1	$\ln(1-\sin^2 x)$	$tg^2 x$
2.17	0	$\frac{(1-\cos x)^2}{\sin x}$	$\sin\frac{x}{2}$
2.18	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos\frac{2}{\pi}x$	$\sin 2x$
2.19	0	$\arccos\frac{1-x}{1+x}$	$\sin^2 x$
2.20	0	$\arccos\frac{1-x}{1+x}$	$\sqrt{1-\cos x}$

3 Для бесконечно малой при $x \to a$ (при $x \to a+0$) функции $f(x)$ найти бесконечно малую при $x \to a$ функцию вида $g(x) = cx^{\alpha}$ ($c, \alpha \in \mathbb{R}$) такую что: 1) $f(x) \asymp g(x)$, 2) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$:

№	a	A	B
		$f(x)$	$f(x)$
1	2	3	4
3.1	0	$e^x - 1$	$\arcsin^2 x$
3.2	0	$\sqrt{1+x} - 1$	$\arcsin\sqrt{x}$
3.3	1	$\sqrt[3]{x} - 1$	$\arcsin\sqrt{x-1}$
3.4	1	$\ln^2(2-x)$	$e^{2x} - e^2$
3.5	0	$\sqrt[5]{1-x} - 1$	$\sin^{10}\sqrt{x}$
3.6	0	$e^{\ln(1-x)} - 1$	$\arcsin\sqrt[3]{x}$
3.7	0	$\sqrt[3]{1-\cos x}$	$\sqrt[4]{1-x} - 1$
3.8	0	$2^x - 1$	$\ln(1+\frac{x^2}{2})$
3.9	2	$2^x - 4$	$\ln(3-x)$
3.10	0	$sh^2 x$	$\ln(2-\cos x)$
3.11	0	$\ln(1-x)$	$\sin(2\arcsin x)$
3.12	0	$\sqrt[3]{1+x} - 1$	$arctg\sqrt{x}$
3.13	0	$\sqrt[4]{1+x} - 1$	$\arcsin(\sin^2 x)$
3.14	1	$\sqrt{\ln x}$	$e^{\sin x} - e^{\sin 1}$

1	*2*	*3*	*4*
3.15	0	$\sqrt[8]{1+2x}-1$	$tg^2\sqrt{x}$
3.16	0	$e^{x^2}-\cos x$	$\sqrt{1-\cos x}$
3.17	0	$2^{x^2}-1$	$\ln(1-\sin x)$
3.18	0	$\ln(2-e^x)$	$\sin(2\arcsin x)$
3.19	3	3^x-27	$sh(x-3)$
3.20	0	$1-chx$	$2^{\ln(1-x)}-1$

4 Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

№	a	A	B
		$f(x)$	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
4.1	0	$\dfrac{e^x-1}{\ln(1+6x)}$	$\dfrac{e^{2x}-1}{(1+5x)^6-1}$
4.2	0	$\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$	$\dfrac{arctg 3x}{(1+4x)^4-1}$
4.3	1	$\dfrac{\ln(2-x)}{\arcsin(1-x)}$	$\dfrac{2^x-2}{\sin(x-1)}$
4.4	0	$\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$	$\dfrac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1}$
4.5	3	$\dfrac{\ln(4-x)}{2^x-8}$	$\dfrac{\arcsin\sqrt{3-x}}{e^{3-x}-1}$
4.6	1	$\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{\ln(2-x)}$	$\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\ln x}$
4.7	0	$\dfrac{\ln(1+4x)}{\sqrt{1+2x}-1}$	$\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\ln(1+4x)}$
4.8	0	$\dfrac{arctg 5x}{\ln(1+x)}$	$\dfrac{2^x-1}{\sin 4x-\sin 6x}$
4.9	0	$\dfrac{tg\dfrac{x}{1+x^2}}{\arcsin^2\sqrt{x}}$	$\dfrac{3^x-1}{\ln(1-x)}$
4.10	0	$\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$	$\dfrac{(\arcsin\sqrt{x})^4}{tg^2 2x}$

1	2	3	4
4.11	0	$\dfrac{\sin x}{\ln(1+2x)}$	$\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^6}}{\ln(1+5x)}$
4.12	0	$\dfrac{e^{3x}-1}{arctg\,2x}$	$\dfrac{2^{2x}-1}{\sin\frac{x}{2}}$
4.13	0	$\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x+\sin x}$	$\dfrac{(\arcsin x)^2}{tg^2 4x}$
4.14	2	$\dfrac{2^x-4}{\ln(3-x)}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5-2x}-1}{\sin(x-2)}$
4.15	0	$\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{(1+3x^4)^5-1}$	$\dfrac{\ln(1+5x)}{\arcsin 3x}$
4.16	0	$\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 5x-x}$	$\dfrac{tg\,2x-\sin 4x}{\ln(1+8x)}$
4.17	0	$\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$	$\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$
4.18	1	$\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x}-1}$	$\dfrac{\arcsin x}{arctgx}$
4.19	0	$\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\ln(1+4x)}$	$\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{tg\frac{x}{1+x}}$
4.20	1	$\dfrac{\ln(2-x)}{2^x-2}$	$\dfrac{\arcsin(1-x)}{\ln x}$

Решение типовых примеров

1.20 Определить порядок относительно x бесконечно малой при $x \to 0+$ функции:

А) $g(x)=\ln(1+\sqrt{x})$; В) $g(x)=\arcsin(1-\cos x)$

Решение.

А) Возьмем функцию $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\left[\sqrt{x}=t\right]=\lim_{t\to 0+0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,$$

то порядок бесконечно малой функции $g(x)$ равен $\frac{1}{2}$.

В) Полагаем $f(x)=x^2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\begin{bmatrix}2\sin^2\frac{x}{2}=t\\ x=2\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{4\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}.$$

Вычислим отдельно каждый из полученных пределов:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2}=\left[u=t^2\right]=\lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u}=\ u=\sin x\ =\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}}\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Последнее равенство получено с учетом предыдущих рассуждений. Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, т.е. порядок $g(x)$ равен 2.

2.20 Для бесконечно малых при $x\to 0$ функций

$$f(x)=\arccos\frac{1-x}{1+x},\ g(x)=\sqrt{1+\cos x}$$

выяснить какие из соотношений 1) – 6) верны.

Решение. Покажем, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=0.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\frac{x}{2}}=2\sqrt{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}=\begin{bmatrix}\frac{1-x}{1+x}=\cos t\\ x=\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\frac{t}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0.$$

Из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ согласно определению следует, что $g(x)=o(f(x))$, т.е. верно 4) и не выполняются соотношения 1), 3), 5), 6). Из 4) следует справедливость 2), так как из $g(x)=o(f(x))\Rightarrow g(x)=O(f(x))$. Итак верны только соотношения 2) и 4).

3.20 Для бесконечно малой при $x\to 0$ функции $f(x)$ найти такую $g(x)=cx^{\alpha}$, что: 1) $f(x)\asymp g(x)$, 2) $f(x)\sim g(x)$ при $x\to 0$:

А) $f(x)=1-chx$

Решение. По определению $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Возьмем $g(x)=x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-chx}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x+1-e^{-x}}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=-\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Отсюда следует, что $f(x)\asymp x$ при $x\to 0$. Учитывая равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-chx}{-\frac{1}{2}x}=1$, получаем, что $f(x)\sim\left(-\frac{1}{2}\right)x$, при $x\to 0$.

4.20 Вычислите $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

$$\textbf{A)}\ f(x) = \frac{\ln(2-x)}{2^x - 2}\ \textbf{; B)}\ f(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{\ln x}\ \textbf{.}$$

Решение.

А) Применяя преобразование функции, получим

$$I = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{2^x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(1-(x-1))}{x-1} \frac{x-1}{2(2^{x-1}-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-(x-1))}{x-1} \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2^{x-1}-1}.$$

Так как $\ln(1+t) \sim t\,, 2^t - 1 \sim t \cdot \ln 2$ при $t \to 0$, то, согласно принципу эквивалентности бесконечно малых,

$$I = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{x-1} \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)\ln 2} = -\frac{1}{2\ln 2}.$$

В) Преобразовывая функцию, получим

$$I = \lim_{x \to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1} \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln(1+(x-1))}\ .$$

Так как $\arcsin t \sim t$, $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$, то

$$I = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)} = 1.$$