Лабораторная работа № 6
Предел и неравенства

Необходимые понятия и теоремы: фундаментальная последовательность, критерий Коши, теорема о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, число e, бесконечно малые последовательности, теорема о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную, теоремы о пределах, связанные с неравенствами, частичные пределы, верхний и нижний пределы последовательности.

Литература: [1] с. 90 – 95, 97 – 99, [4] с. 87 – 111, 136.

1 Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость или расходимость последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n
1.1	$\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$	1.11	$\frac{\sin 1}{3}+\frac{\sin 2}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n}{3^n}$
1.2	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$	1.12	$\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}\ldots+\frac{n+1}{(n+2)^2}$
1.3	$\frac{\cos 1}{2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n}{2^n}$	1.13	$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$
1.4	$\frac{1}{2^3}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)^3}$	1.14	$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2}$
1.5	$\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$	1.15	$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
1.6	$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	1.16	$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}$
1.7	$\frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)}$	1.17	$\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2^2}+\ldots+\arcsin\frac{1}{2^n}$
1.8	$\frac{\cos 1!}{5+1}+\frac{\cos 2!}{5^2+1}+\ldots+\frac{\cos n!}{5^n+1}$	1.18	$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$
1.9	$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$	1.19	$a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $\lvert a_k\rvert<M$, $\lvert q\rvert<1$
1.10	$1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$	1.20	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ \forall k=\overline{1,n}$

2 Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n
2.1	$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{9^n}$	2.11	$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$
2.2	$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\ldots+\frac{1}{2^n+n}$	2.12	$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{корней}}$
2.3	$1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$	2.13	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$
2.4	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!}$	2.14	$\frac{1}{7+1}+\frac{1}{7^2+2}+\ldots+\frac{1}{7^n+n}$
2.5	$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$	2.15	$1+\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\ldots+\frac{2}{10^n}$
2.6	$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$	2.16	$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$
2.7	$\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}}_{n\ \text{корней}}$	2.17	$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$
2.8	$\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$	2.18	$\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4^2+2}+\ldots+\frac{1}{4^n+n}$
2.9	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}$	2.19	$\underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{5}}}}}_{n\ \text{корней}}$
2.10	$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}$	2.20	$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

3 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

№	x_n		
	А	Б	В
1	*2*	*3*	*4*
3.1	$(\sqrt{2n^2-1}-2n)$	$\left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n+5}$	$\frac{(-1)^n+7}{7n^3+2}$
3.2	$(\sqrt{9n^2-5n}-3n)$	$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+7}$	$\frac{\sin n!}{\sqrt[3]{n+1}}$

1	*2*	*3*	*4*
3.3	$(\sqrt{n^2-4n-5}-n)$	$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+3}$	$\dfrac{\ln(5+1/n)}{n^2+1}$
3.4	$(\sqrt{n(n+5)}-n)$	$\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^{3n+3}$	$\dfrac{\arccos 1/n}{n^2+4}$
3.5	$(\sqrt{n^2+5}-n)$	$\left(\dfrac{5n+2}{5n}\right)^{5n/2+1}$	$\dfrac{\cos n!}{\sqrt{n+4}}$
3.6	$(n+\sqrt[3]{4-n^3})$	$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+3}$	$\dfrac{\operatorname{arctg} n^2}{2n^2+n}$
3.7	$(\sqrt{9n^2+4}-3n)$	$\left(\dfrac{1+11n}{11n}\right)^{11n+1}$	$\dfrac{(-1)^n+3}{4n^3+2}$
3.8	$(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2})$	$\left(\dfrac{n+6}{n}\right)^{n/6+6}$	$\dfrac{\arcsin 1/n}{n^2+4}$
3.9	$(\sqrt{n^2-8n+5}-n)$	$\left(\dfrac{3+2n}{2n}\right)^{2n/3+1}$	$\dfrac{\cos n^2}{2n^2+n}$
3.10	$(\sqrt{4n^2-1}-2n)$	$\left(\dfrac{7n+1}{7n}\right)^{7n+7}$	$\dfrac{\sin n!}{\sqrt{n+1}}$
3.11	$(\sqrt{n^2+4n+8}-n)$	$\left(\dfrac{4+n}{n}\right)^{n/4+9}$	$\dfrac{\operatorname{arctg} n!}{3^n+5}$
3.12	$(\sqrt{2n^2-6}-\sqrt{2n^2-7n})$	$\left(\dfrac{1+9n}{9n}\right)^{9n+9}$	$\dfrac{\cos n!}{\sqrt[3]{7n^2-1}}$
3.13	$(\sqrt{n^2+1}-n)$	$\left(\dfrac{13n+1}{13n}\right)^{13n+13}$	$\dfrac{(-1)^n+8}{3^n+5^n}$
3.14	$(\sqrt{4n^2-6}-\sqrt{4n^2-5n})$	$\left(\dfrac{10n+1}{10n}\right)^{10n+10}$	$\dfrac{2n\sin 2n}{n^2+1}$
3.15	$(\sqrt{n^2+1}-n)$	$\left(\dfrac{0{,}1n+1}{0{,}1n}\right)^{0{,}1n+5}$	$\dfrac{(-1)^n\cos n}{7^n+2\cdot 5^n}$
3.16	$(\sqrt{16n^2-3n}-4n)$	$\left(\dfrac{25n+1}{25n}\right)^{25n+1}$	$\dfrac{(-1)^n+8}{3^n+5^n}$
3.17	$(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$	$\left(\dfrac{0{,}3n+1}{0{,}3n}\right)^{0{,}3n+3}$	$\dfrac{\operatorname{arcctg} n^2}{e^{n+1}}$

1	2	3	4
3.18	$(\sqrt{9n^2-3}-3n)$	$\left(\frac{2n+9}{2n}\right)^{2n/9+7}$	$\frac{\ln(2+1/n)}{n^2}$
3.19	$(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$	$\left(\frac{1+0,2n}{0,2n}\right)^{0,2n+3}$	$\frac{2n\cos n}{n^2+4}$
3.20	$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n\ \ +1}$	$\left(\frac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}$	$\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

4 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

№	x_n		
	А	Б	В
1	2	3	4
4.1	$\sqrt[5n]{5n+5}$	$\frac{3^n}{n!}$	$\sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}$
4.2	$\sqrt[n]{n^2}$	$\frac{1}{0,3^n n!}$	$\frac{\log_5(n^2+1)}{n}$
4.3	$\sqrt[n]{\frac{3n+2}{n+5}}$	$\frac{n}{2^n}$	$\frac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$
4.4	$\sqrt[n]{5n}$	$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+3}$	$\frac{(-3)^{n^2-n}}{(n^3)!}$
4.5	$\sqrt[n^2]{6}$	$\frac{n^{20}}{20^n}$	$\sqrt[3n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$
4.6	$\sqrt[2n]{2n}$	$\frac{1}{0,8^n n!}$	$\frac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)}$
4.7	$\sqrt[n]{8^n+3^n}$	$\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n+1}$	$\sqrt[n]{\frac{10}{n}-\frac{1}{1,2^n}}$
4.8	$\sqrt[n]{n+5}$	$\frac{200^n}{n!}$	$\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$
4.9	$\sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$	$\left(\frac{1+3n}{3n}\right)^{n-3}$	$n\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

1	2	3	4
4.10	$\sqrt[n]{2n+4}$	$\frac{100^n}{n!}$	$\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2n}}$
4.11	$\sqrt[n]{2^n+5^n}$	$\left(\frac{1+9n}{9n}\right)^{n-1}$	$\frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$
4.12	$\sqrt[2n]{0,5}$	$\frac{n^3}{3^n}$	$n^{1/\sqrt{n}}$
4.13	$\sqrt[13n]{13n+13}$	$\left(\frac{1+7n}{7n}\right)^{n+2}$	$\left(\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}\right)$
4.14	$\sqrt[n^2]{9}$	$\frac{n^2}{5^n}$	$\frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$
4.15	$\sqrt[n^2]{2n^2+8}$	$\frac{n}{5^n}$	$\frac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$
4.16	$\sqrt[n^3]{5}$	$\frac{(-2)^n}{(n+2)!}$	$\left(\sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n n^3+2}\right)$
4.17	$\sqrt[3n]{125}$	$\frac{n^{10}}{10^n}$	$\frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$
4.18	$\sqrt[n]{\frac{n+2}{n+5}}$	$\left(1+\frac{1}{25n}\right)^{n-25}$	$n^2\left(\left(1+\frac{10}{n}\right)^{20}-\left(1+\frac{20}{n}\right)^{10}\right)$
4.19	$\sqrt[n]{n^3+3n}$	$\frac{n}{7^n}$	$\frac{\ln(n^3-n+1)}{\ln(n^6+n+1)}$
4.20	$\sqrt[3n]{8}$	$\frac{2^n}{n!}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

5 Для последовательности x_n найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$:

№	x_n	№	x_n
1	2	3	4
5.1	$\cos(\pi n/3)$	5.11	$n\cos(\pi n/2)$
5.2	$n^{(-1)^n}$	5.12	$3^{(-1)^n n}$
5.3	$\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$	5.13	$\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{1+(-1)^n}{2}$

1	*2*	*3*	*4*
5.4	$\dfrac{n^2\sin(\pi n/2)+1}{n+1}$	5.14	$\dfrac{n^2\cos(\pi n/2)+3}{n+2}$
5.5	$\cos(\pi n/4)+(-1)^n$	5.15	$\sin(\pi n/4)-(-1)^n$
5.6	$5^{(-1)^{n+1}}$	5.16	$(n+1)^{(-1)^n}$
5.7	$\sin(\pi n/3)$	5.17	$n\sin(\pi n/4)$
5.8	$\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n}+\dfrac{2+(-1)^n\cdot 3}{7}$	5.18	$\dfrac{(-1)^n(1-n^3)}{1+n^3}+\dfrac{1+(-1)^n}{3}$
5.9	$(2n)^{(-1)^n}$	5.19	$e^{(-1)^n n}$
5.10	$\dfrac{((-1)^n-1)n^2+n+1}{n}$	5.20	$\dfrac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}$

Решение типовых примеров

1.19 Пользуясь критерием Коши, установить сходимость или расходимость последовательности

$$x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n, \text{ где } |a_k| < M \quad \forall k=\overline{1,n},\ |q|<1.$$

Решение. Согласно критерию Коши, последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall n \ge N_\varepsilon \ \ \forall p \in \mathbb{N}: \ \left|x_{n+p} - x_n\right| \le \varepsilon .$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| = \left|a_{n+p}q^{n+p} + a_{n+p-1}q^{n+p-1} + \ldots + a_{n+1}q^{n+1}\right| \le$$

$$\le M\left|q^{n+p}\right| + \ldots + M\left|q^{n+1}\right| = M\ \ |q|^{n+1} + \ldots + |q|^{n+p} \ \ =$$

$$= M\,\frac{|q|^{n+1}\ \ 1-|q|^p}{1-|q|} < M\,\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}.$$

Найдем теперь t из неравенства $M\dfrac{|q|^{t+1}}{1-|q|}\le\varepsilon$. Имеем $|q|^{t+1}\le\dfrac{\varepsilon\;1-|q|}{M}$.

Следовательно, $t\ge\log_{|q|}\dfrac{\varepsilon\;1-|q|}{M}-1$. Полагая теперь $N_\varepsilon=\left[\log_{|q|}\dfrac{\varepsilon\;1-|q|}{M}\right]$, получим, что при $\forall n\ge N_\varepsilon$ и $\forall p\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|x_n-x_{n+p}\right|\le\varepsilon$.

Таким образом, последовательность x_n является фундаментальной и, согласно критерию Коши, сходится.

1.20 Пользуясь критерием Коши, установить сходимость или расходимость последовательности $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

Решение. Покажем, что данная последовательность не сходится. Для этого достаточно показать, что она не удовлетворяет критерию Коши, то есть

$$\exists\varepsilon_0>0\;\;\forall N\;\;\exists n\ge N\;\;\exists p\in\mathbb{N}:\left|x_{n+p}-x_n\right|>\varepsilon_0.$$

В нашем случае

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p-1}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right|\ge p\cdot\frac{1}{n+p}.$$

Пусть $p=n$. Тогда получим $\left|x_{2n}-x_n\right|\ge\dfrac{1}{2}$. Рассмотрим $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$. В этом случае $\forall N\;\exists n=p,\;p\in\mathbb{N},\,p\ge N:\;\left|x_{2n}-x_n\right|>\varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит, и не сходится.

2.20 Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

Решение. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1,$$

то x_n – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Учитывая неравенство $\ln(x+1)\le x,\;x\ge0$, имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

т.е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$. Значит, x_n – монотонна и ограничена. Тогда по теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности x_n сходится.

3.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}$, Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}$, В). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Решение.

А) Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} =$$

$$=\left[\!\left[\begin{array}{l}\textit{Имеем неопределенность вида}\\ (\infty-\infty).\textit{Умножим и разделим}\\ \textit{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{array}\right]\!\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Б) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n}=\left[\!\left[\begin{array}{c}\textit{сделаем замену}\\ k=27n\end{array}\right]\!\right]=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e.$$

В) Поскольку $-1\le\sin n\le 1, \forall n\in\mathbb{N}$, а последовательность $\frac{1}{\sqrt{n}}$ является бесконечно малой, то произведение $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin n$ также будет бесконечно малой последовательностью, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin n=0.$$

4.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{8}$, Б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$, В) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

Решение.

А) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{8} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{2^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Б) Если $k \ge 4$, то $2/k \le 1/2$. Поэтому при $n \ge 4$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\ldots 2}{4\ldots n} \le \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{32}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

В) Так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$ и при $n > 2$

$$2 = \left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n} = \left(1 + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right)^{2^n} > \left(1 + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right)^{n} =$$

$$= \left[\!\left[(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k \right]\!\right] =$$

$$= 1 + n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) + \ldots + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)^n > n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right),$$

т.е. $0 < 2^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \dfrac{2}{n}$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/2^n} - 1 = 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/2^n} = 1$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})=2\,.$$

5.20 Для последовательности $x_n=\dfrac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}$ найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.

Решение.

При $n=4k$ имеем $x_n=\dfrac{2n+1}{n}=2+\dfrac{1}{n}$, и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k}=2$, $2<x_{4k}\le 2+1/4$, причем $x_4=9/4$.

При $n=4k+1$ или $n=4k+3$ имеем $x_n=\dfrac{-n+1}{n}=-1+\dfrac{1}{n}$, и, значит, $-1<x_n<0$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k+3}=-1$.

При $n=4k+2$ имеем $x_n=\dfrac{-4n+1}{n}=-4+\dfrac{1}{n}$, значит, $-4<x_n<0$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k+2}=-4$.

Таким образом, числа $2,-1,-4$ являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности x_{4k} , x_{4k+1} , x_{4k+2} , x_{4k+3} составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n-4$.