Лабораторная работа №3
Числовые функции

Необходимые понятия и теоремы: область определения, область значений, графики элементарных функций, сдвиги
Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 71 – 84, [3] с. 23 – 36.

1 Найти область определения функции $y = f(x)$

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
1.1	$y=\sqrt{5x-3x^3}$	1.11	$y=\arccos\dfrac{3x}{1-x}$
1.2	$y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x}}$	1.12	$y=\arcsin(2\cos 2x)$
1.3	$y=\log_x \sin x$	1.13	$y=\sqrt[4]{(x-1)\cos^2 \pi x}$
1.4	$y=\log_{-x}\cos x$	1.14	$y=\sqrt[5]{\ln(x^2+x-1)}$
1.5	$y=\dfrac{1}{x-2}\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$	1.15	$\arccos(\|1-x\|+\|1+x\|)$
1.6	$y=\sqrt{\cos 2x}$	1.16	$y=\left(\sqrt[6]{\sin x-\dfrac{1}{2}}\right)^6$
1.7	$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin 3x-1}}$	1.17	$y=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\log_x(x^2-1)$
1.8	$y=\log_3\log_2 x$	1.18	$y=ctg\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$
1.9	$y=\dfrac{1}{\sqrt{(\sin x)^2}}$	1.19	$arctg\left(\ln\|\cos x\|-\dfrac{1}{2}\right)$
1.10	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\|x\|-\|x+1\|}}$	1.20	$\arccos(\lg(10x))$

2 Найти множество значений функции $y = f(x)$

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
2.1	$y=\sqrt{x^2-x-2}$	2.11	$y=\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}$
2.2	$y=\sqrt[3]{x^2-4x-5}$	2.12	$y=\sqrt{\cos(2x+1)}$
2.3	$y=3x-4, x\in[-2;2]$	2.13	$y=\cos\sqrt{x^2-6x+5}$
2.4	$y=3^{\sin x}$	2.14	$\sin\sqrt[4]{3-x^2}$
2.5	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$	2.15	$\arccos(x^2-10x+6)$
2.6	$e^{\log_2 x}$	2.16	$arctg\sqrt[6]{x^2+5x+6}$
2.7	$y=\sin\ -\sqrt{x-2}$	2.17	$\arccos(\log_{\frac{1}{2}} x)$
2.8	$y=\ln(\cos x)$	2.18	$y=\log_{\frac{1}{2}}(arcsix)$
2.9	$y=\ln(tgx)$	2.19	$y=\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(\cos x))$
2.10	$y=\arcsin 2^x$	2.20	$y=\arccos(\arcsin x)$

3 Построить график функции $y=f(x)$

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
3.1	$y=\left\|x^2-4\right\|$	3.11	$y=4\cos 2x$
3.2	$y=\left\|\sin 2x\right\|$	3.12	$y=5\sin(x-2)$
3.3	$y=\left\|\cos\frac{x}{2}\right\|$	3.13	$y=2\cos\frac{x}{2}$
3.4	$y=\log_{\frac{1}{2}}\left\|x-1\right\|$	3.14	$y=\sqrt[3]{x+3}$
3.5	$y=\left\|3-x^2\right\|$	3.15	$y=\sqrt[4]{\left\|x\right\|}$
3.6	$y=2^{\left\|x+1\right\|}$	3.16	$y=\sqrt[5]{x-\frac{1}{2}}$
3.7	$y=2^{-x-1}$	3.17	$y=\sqrt[3]{\left\|x+1\right\|}$
3.8	$y=-\cos 2x$	3.18	$y=\left\|\sqrt{x+1}-1\right\|$
3.9	$y=ctg(-x)$	3.19	$y=\sqrt{\left\|x-1\right\|-3}$
3.10	$y=tg(1-x)$	3.20	$y=\log_2(x-2)^2$

4 Построить графики функций $y = f(x-1)$, $y = f(x+2)$, $y = f(x)+3$, $y = f(x)-4$, $y = f(2x)$, $y = f(\frac{x}{3})$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = 2f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$,исходя из графика функции $y = f(x)$ и объяснить такое построение

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
4.1	$y = \ln x$	4.11	$y = arctgx$
4.2	$y = e^x$	4.12	$y = \log_{\pi} x$
4.3	$y = \frac{1}{x}$	4.13	$y = \log_{1/2} x$
4.4	$y = \sqrt[3]{x}$	4.14	$y = \sqrt{x+2}$
4.5	$y = (x-1)^2$	4.15	$y = \|3x+1\|$
4.6	$y = \cos x$	4.16	$y = -\frac{2}{x}$
4.7	$y = \sin x$	4.17	$y = \frac{3}{x+2}$
4.8	$y = \arccos x$	4.18	$y = \log_2 (x+2)^2$
4.9	$y = \arcsin x$	4.19	$y = \sin \frac{x}{2}$
4.10	$y = tgx$	4.20	$y = \arcsin(x-1)$

5 Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что

№		№	
1	*2*	*3*	*4*
5.1	$f(x+1) = x^2 + 2x + 2$	5.11	$f(x^3) = \sqrt[3]{x}$
5.2	$f(x-1) = x^2 - 2x + 5$	5.12	$f(\sqrt{x}) = x^3 + 1$
5.3	$f(x - \frac{1}{x}) = \frac{x^4+1}{x^2}$	5.13	$f(\sqrt[3]{x}) = x^9$
5.4	$f(\frac{1}{x}) = x^3 + 1$	5.14	$f(x^3) = 1 - x^2$
5.5	$f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$	5.15	$f(e^x) = e^{2x} + e^x - 1$
5.6	$f(\frac{x}{x+1}) = x^2$	5.16	$f(\ln x) = 2\ln x^2 - 3\ln x + 1$

1	2	3	4
5.7	$f(x^2)=1-x^3$	5.17	$f(\cos x)=1+2\cos 2x$
5.8	$f(x+2)=e^{4-2x-x^2}$	5.18	$f(\sin x)=\cos^4 x-\cos 4x$
5.9	$f(3x)=\ln x^2$	5.19	$f(tgx)=\dfrac{1}{\cos^2 x+1}$
5.10	$f(\dfrac{x}{4})=\log_3 x^3$	5.20	$f(\lvert x\rvert)=\ln x^6-\lvert x\rvert$

Решение типовых примеров

1.20 Найти область определения функции $y=\arccos(\lg(10x))$.

*Решение***.** Функция $y=\lg(10x)$ определена, если $10x>0$, а функция $y=\arccos x$ определена при $x\in[-1;1]$. Поэтому сложная функция $y=\arccos(\lg(10x))$ будет определена при выполнении двух условий:

$\begin{cases}10x>0\\ -1\le\lg(10x)\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -1\le 1+\lg x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -2\le\lg x\le 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 10^{-2}\le x\le 10^0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 0,01\le x\le 1\end{cases}$, что равносильно условию $x\in[0,01;1]$.

Итак, областью определения функции $y=\arccos(\lg(10x))$ является множество $[0,01;1]$.

2.20 Найти множество значений функции $y=\arccos(\arcsin x)$.

*Решение***.** Найдём сначала область определения этой функции. Она будет определена для всех *x*, удовлетворяющих системе

$\begin{cases}x\in[-1;1]\\ -1\le\arcsin x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ \sin(-1)\le\sin(\arcsin x)\le\sin 1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sin 1\le x\le\sin 1\end{cases}$,

что равносильно условию $x\in[-\sin 1;\sin 1]$. Поскольку функция $y=\arcsin x$ возрастает, то для $x\in[-\sin 1;\sin 1]$ она примет все значения из [-1;1] и только их. Поэтому функция $y=\arccos(\arcsin x)$ примет все значения из $[0;\pi]$ и только их. Итак, множеством значений функции $y=\arccos(\arcsin x)$ является $[0;\pi]$.

3.20 Построить график функции $y=\log_2(x-2)^2$.

*Решение***.** Так как $a^2=|a|^2$, то функция может быть переписана в виде $y=2\log_2|x-2|$. Построим сначала график функции $y=\log_2|x|$. Он состоит из графика функции $y=\log_2 x$ и линии, симметричной этому графику относительно оси *Oy*, так как в точках *x* и *–x* функция $y=\log_2|x|$ принимает одно и тоже значение (чётная).

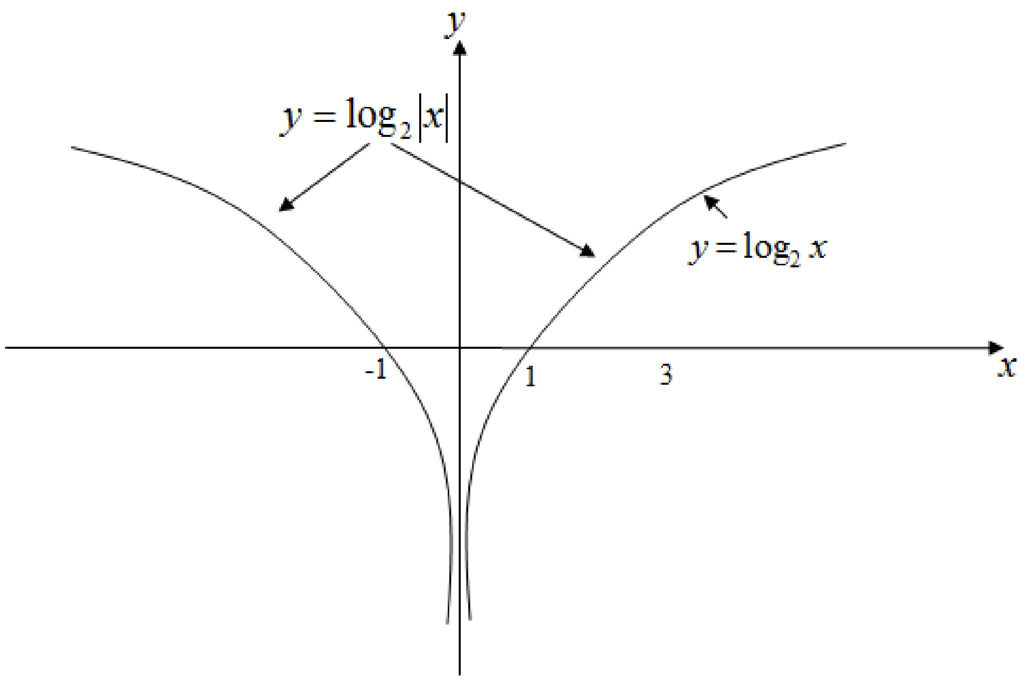

Рисунок 3 – График функции $y=\log_2|x|$

Далее построим график функции $y=\log_2|x-2|$, который получается из графика функции $y=\log_2|x|$ сдвигом вправо на 2 единицы, так как значение функции $y=\log_2|x-2|$ в точке $x+2$ совпадает со значением функции $y=\log_2|x|$ в точке x.

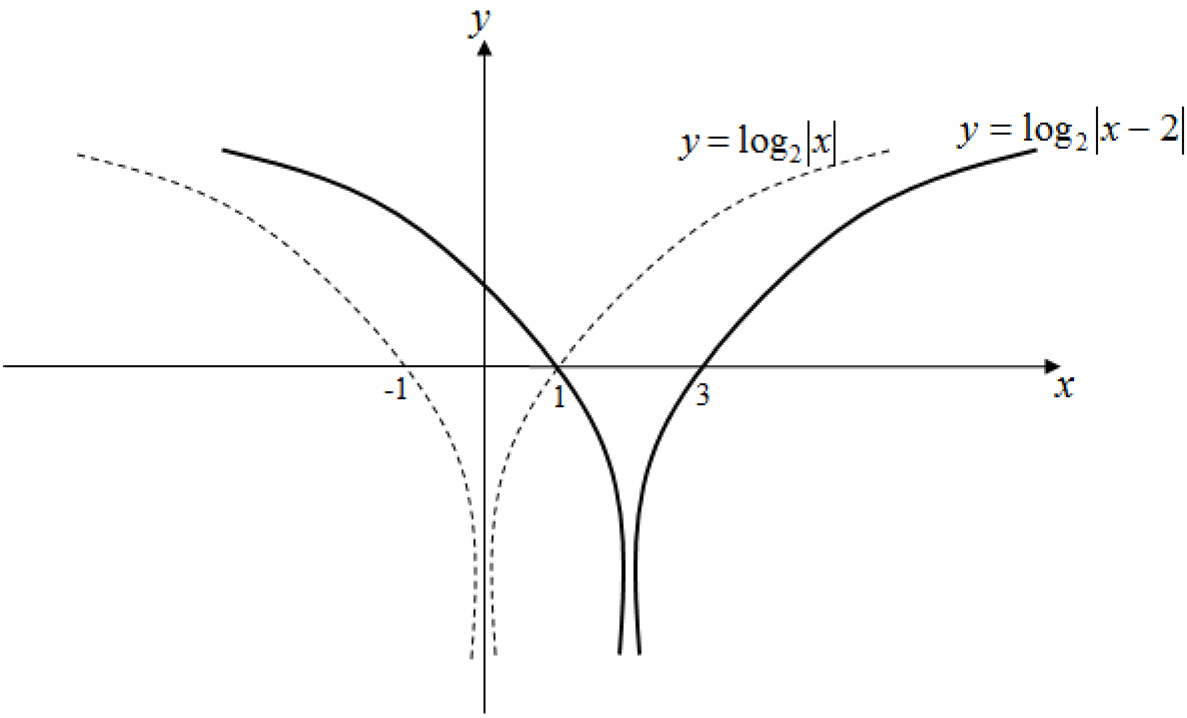

Рисунок 4 – График функции $y = \log_2|x-2|$

И наконец, строим график функции $y = 2\log_2|x-2|$, который получается из графика функции $y = \log_2|x-2|$ растяжением в 2 раза вдоль оси *Oy* относительно точки *O*.

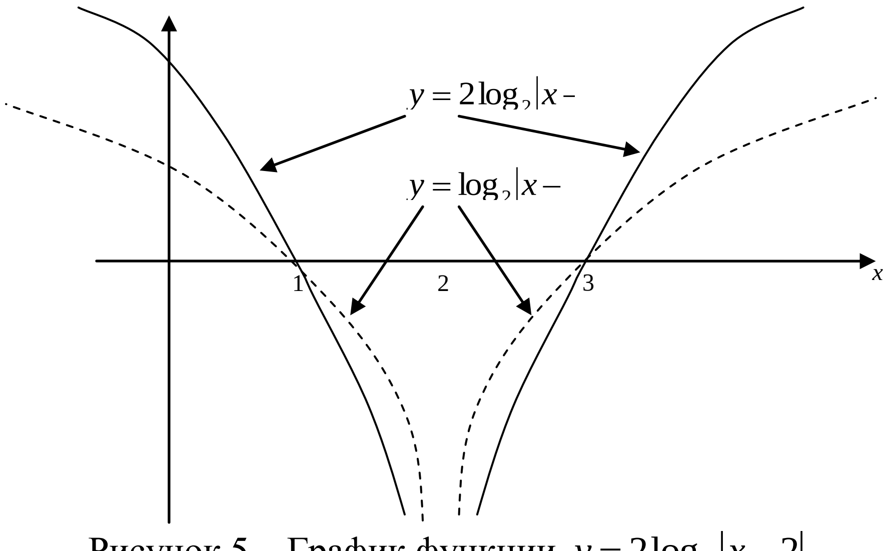

Рисунок 5 – График функции $y = 2\log_2|x-2|$

4.20 Построить графики функций $y = f(x-1)$, $y = f(x+2)$, $y = f(x)+3$, $y = f(x)-4$, $y = f(2x)$, $y = f(\frac{x}{3})$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = 2f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, исходя из графика функции $y = \arcsin(x-1)$.Объяснить такое построение.

Решение. В нашем случае $f(x) = \arcsin(x-1)$. Построим сначала график функции $y = \arcsin(x-1)$, исходя из графика функции $y = \arcsin x$ в одной системе координат

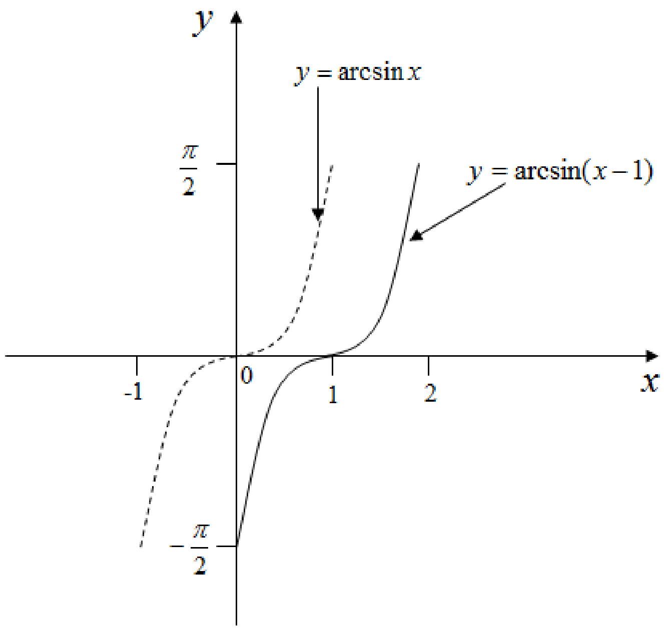

Рисунок 6 – График функции $y = \arcsin(x-1)$

Графиком функции $y = f(x)$ является множество $A = \quad x, f(x) \;\big|\, x \in [0;2]$. Функция $y = f(x-1)$ определена при всех $x : x-1 \in [0;2]$ или $x \in [1;3]$. Графиком функции $y = f(x-1)$ является множество $B = \quad x, f(x-1) \;\big|\, x \in [1;3]$. Сделаем замену $x - 1 = z$. Тогда $B = \quad x-1+1; f(x-1) \;\big|\, x \in [1;3] \; = \; (z+1; f(z)) \big| z \in [0;2]$. Поэтому каждая точка множества B получается из соответствующей точки множества A сдвигом на 1 вправо, т.е. график функции $y = f(x-1)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на 1 вправо.

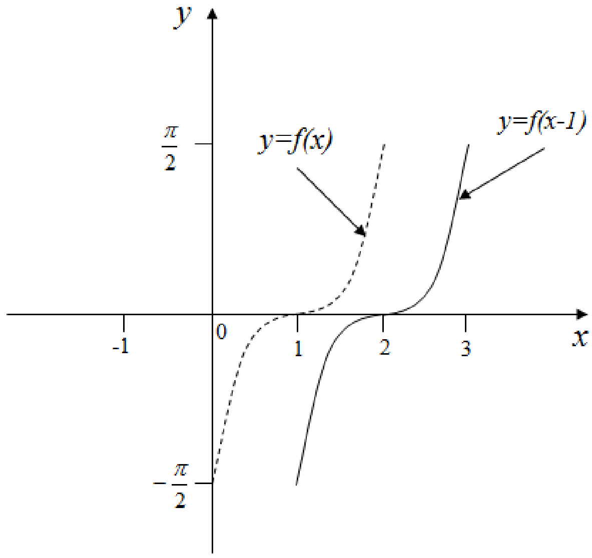

Рисунок 7 – График функции $y = f(x-1)$

График функции $y = f(x+2)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом влево на 2 единицы (объяснить)

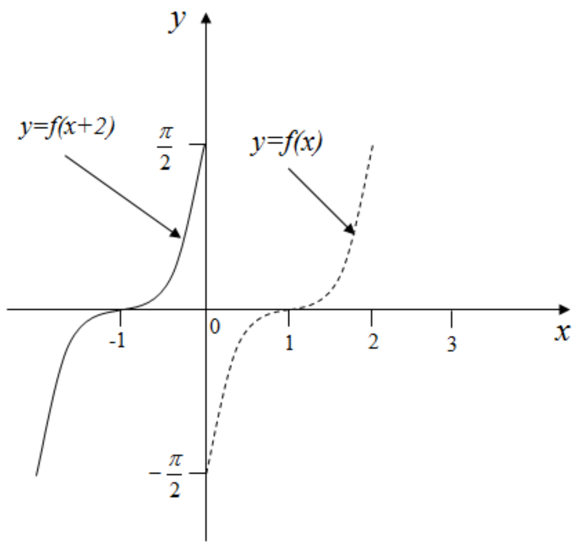

Рисунок 8 – График функции $y = f(x+2)$

График функции $y = f(x)+3$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на 3 единицы вверх

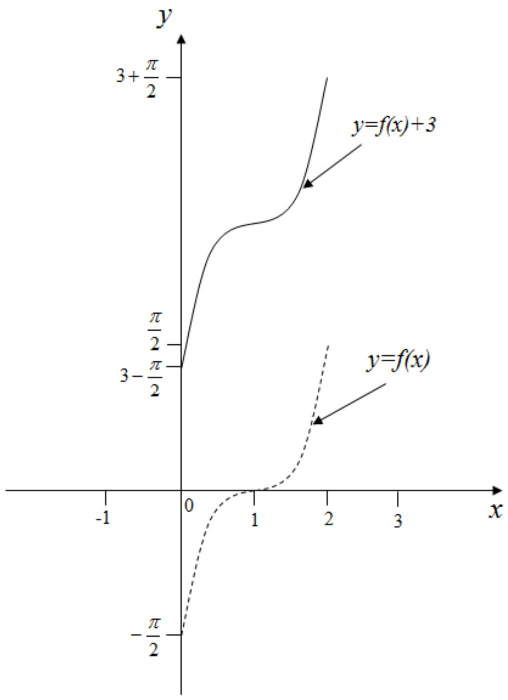

Рисунок 9 – График функции $y = f(x) + 3$

График функции $y = f(x) - 4$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на 4 единицы (объяснить)

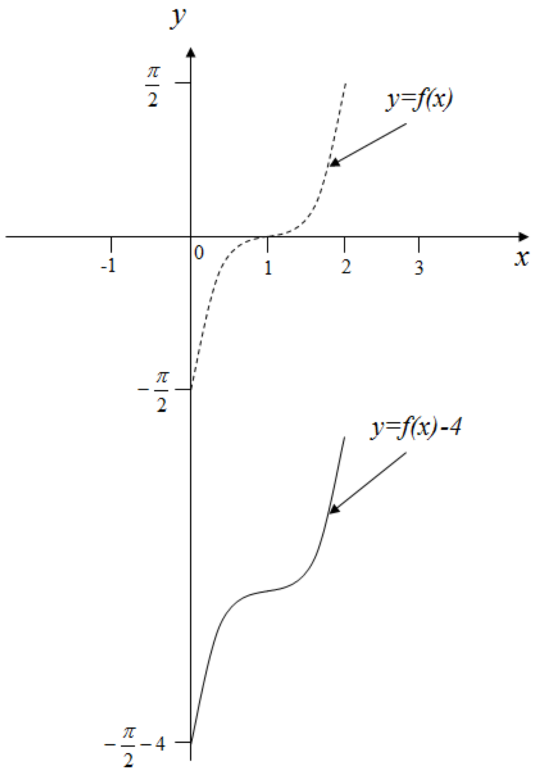

Рисунок 10 – График функции $y = f(x) - 4$

График функции $y = f(2x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием вдоль оси Ox в 2 раза (объяснить)

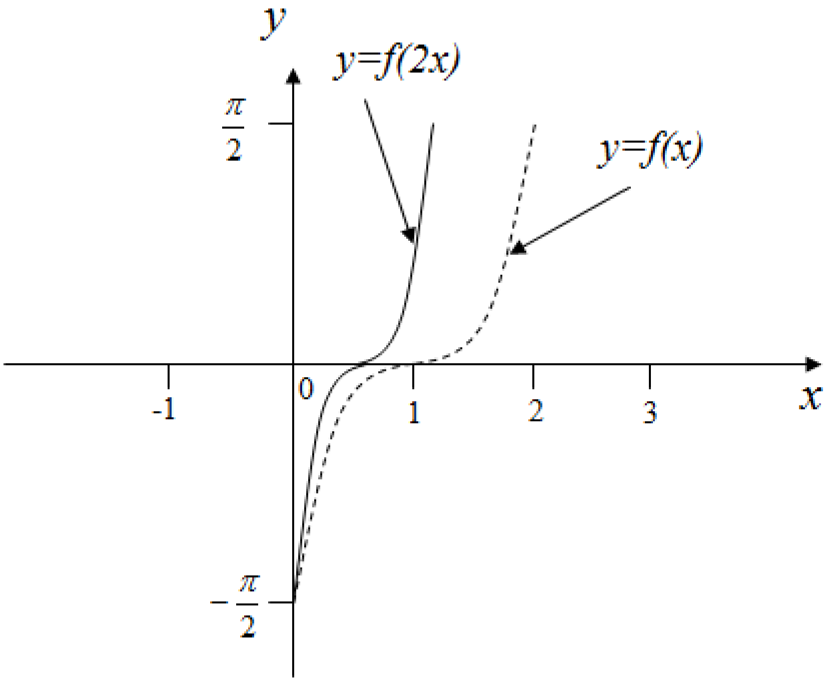

Рисунок 11 – График функции $y = f(2x)$

График функции $y = f(\frac{x}{3})$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Ox в 3 раза (объяснить)

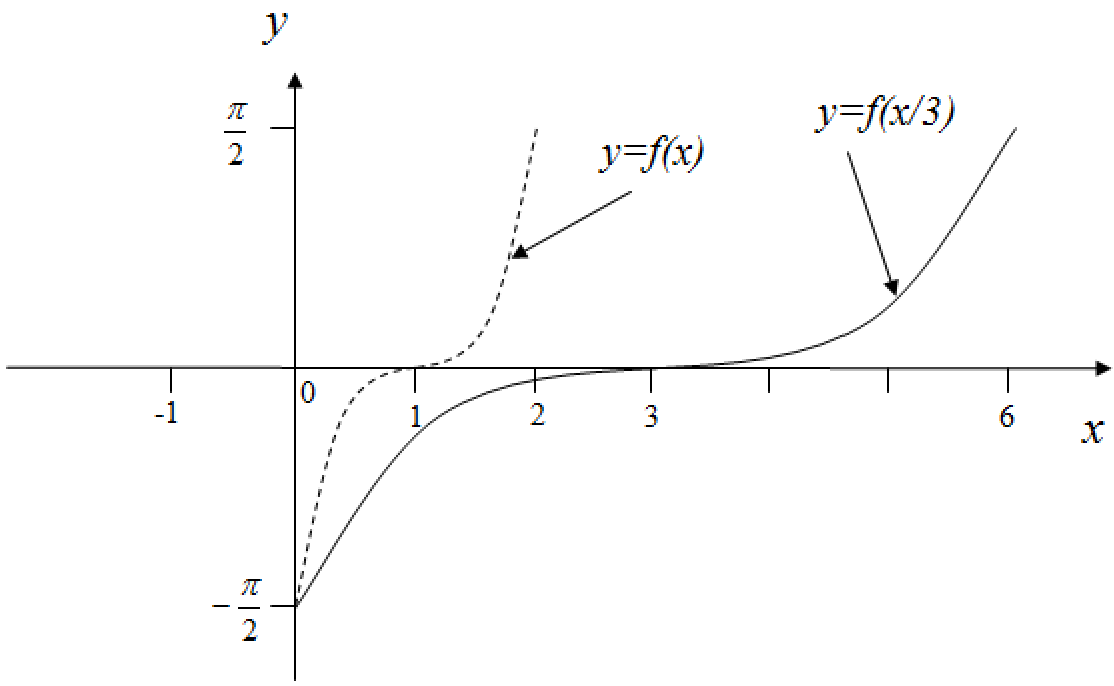

Рисунок 12 – График функции $y = f(\frac{x}{3})$

График функции $y = |f(x)|$ состоит из части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси Ox и линии, симметричной относительно оси Ox части графика $y = f(x)$, расположенной ниже оси Ox (объяснить).

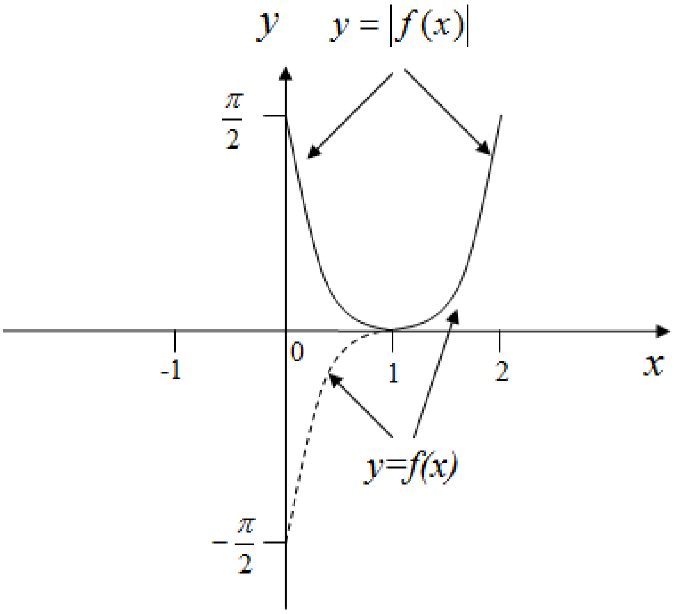

Рисунок 13 – График функции $y = |f(x)|$

График функции $y = f(|x|)$ состоит из графика функции $y = f(x)$ и линии, симметричной графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (объяснить)

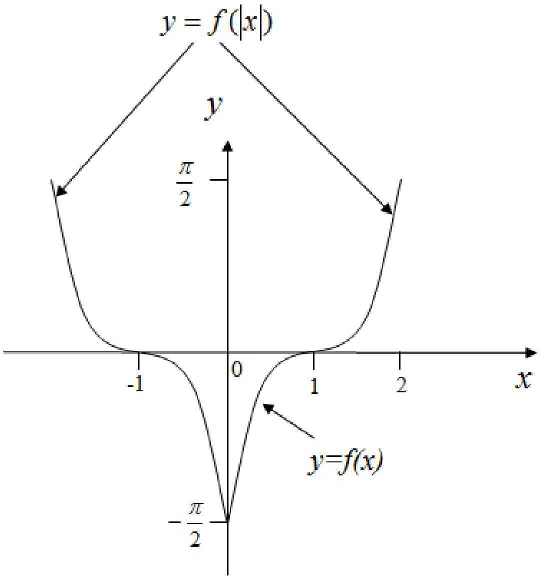

Рисунок 14 – График функции $y = f(|x|)$

График функции $y = 2f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Oy в 2 раза (объяснить)

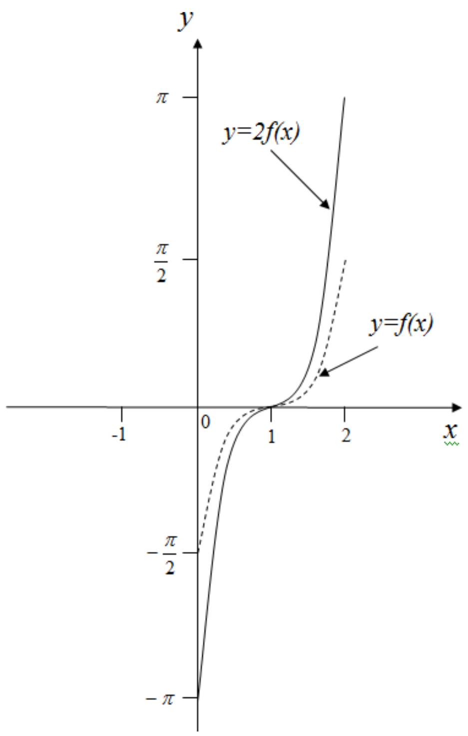

Рисунок 15 – График функции $y = 2f(x)$

График функции $y = -f(x)$ состоит из линии, симметричной относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси Ox и линии, симметричной относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной ниже оси Ox (объяснить)

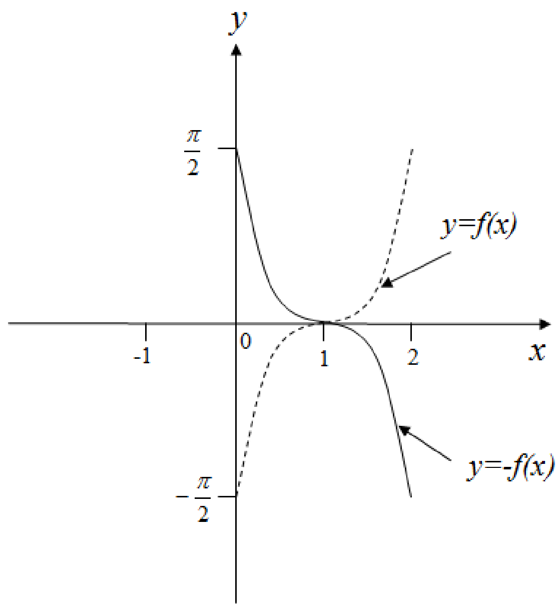

Рисунок 16 – График функции $y = -f(x)$

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси Oy (объяснить)

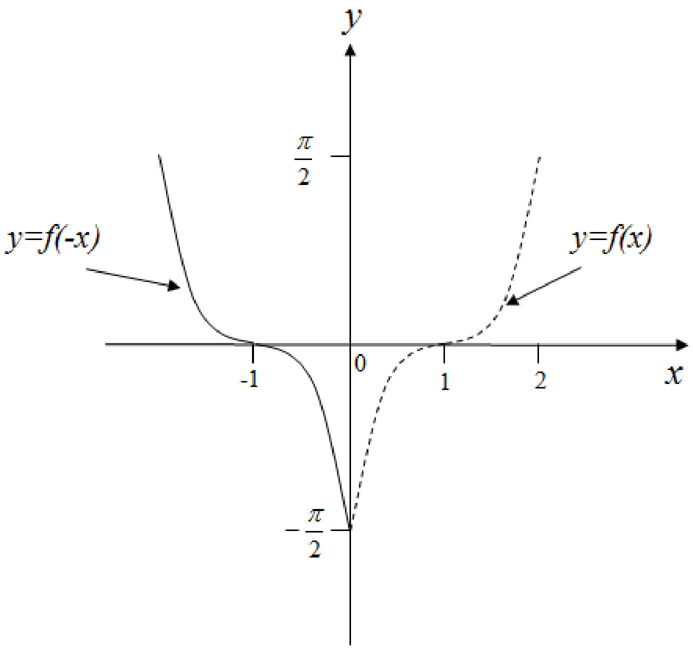

Рисунок 17 – График функции $y = f(-x)$

5.20 Найдите функцию $y = f(x)$, если известно, что $f(|x|) = \ln x^6 - |x|$.

Решение. Поскольку $x^6 = |x|^6$, то $f(|x|) = \ln|x|^6 - |x|$. Отсюда заключаем, что $f(x) = \ln x^6 - x, x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.