Лабораторная работа №13
Вычисление производных

Необходимые понятия и теоремы: формулы для производных основных функций; правила дифференцирования, связанные с арифметическими действиями над функциями; производная сложной функции; дифференциал; производная обратной функции; производная функции, заданной параметрически; производная функции, заданной неявно.

Литература: [1] с. 232 – 243, [2] с. 146 – 157.

1 Вычислить производные данных функций.

№	$y=f(x)$		$y=f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
1.1	*а*) $y=2x^5+3\sqrt{x^3}$; *б*) $y=(x^2+1)\sin x$; *в*) $y=\arcsin(x+1)$; *г*) $y=\sin 3+\cos 3x$	1.11	*а*) $y=\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{2}{x^3}$; *б*) $y=x^3 tgx$; *в*) $y=\log_2(x+3)$; *г*) $y=ctg8+tg(8+x)$
1.2	*а*) $y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}$; *б*) $y=x\ln x$; *в*) $y=arctg(2x+3)$; *г*) $y=e^3+\cos(3x+1)$	1.12	*а*) $y=4\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}$; *б*) $y=xtgx$; *в*) $y=\dfrac{1}{\ln x}$; *г*) $y=2^{3-\sqrt{5}}+\arcsin(1+x)$
1.3	*а*) $y=8x^2+\dfrac{1}{x}$; *б*) $y=(3x^2+2x+1)e^x$; *в*) $y=\dfrac{1}{2}\arccos(2x)$; *г*) $y=\ln\pi+\sin(5x+8)$	1.13	*а*) $y=\dfrac{4}{x^3}-2x^5$; *б*) $y=(x^5-3)2^x$; *в*) $y=\dfrac{1}{tg(x+1)}$; *г*) $y=\sqrt{x-3}+\sin 8$
1.4	*а*) $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}$; *б*) $y=x^2\cdot\cos x$; *в*) $y=-arcctg(x+5)$; *г*) $y=\cos 2+\sin 2x$	1.14	*а*) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}$; *б*) $y=\sqrt{x}\cos x$; *в*) $y=\dfrac{1}{ctg(x+3)}$; *г*) $y=e^7+\sqrt[3]{x+1}$

1	2	3	4
1.5	$а) y = 4x^3 - \frac{7}{x^4};$ $б) y = (x^4 + 3)\sin x;$ $в) y = \ln(2x+5);$ $г) y = tg4 + ctg4x$	1.15	$а) y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^4};$ $б) y = x^2 \cdot \ln x;$ $в) y = \arctan(1+x);$ $г) y = \sin 3x + \text{tg}\,2$
1.6	$а) y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{2}{x^3};$ $б) y = x^3 tgx;$ $в) y = \log_2(x+3);$ $г) y = ctg8 + tg(8+x)$	1.16	$а) y = \sqrt{x^3} + \frac{6}{x^2};$ $б) y = x(1+tgx);$ $в) y = \arccos(2-3x);$ $г) y = \cos 3 - \sin\frac{x}{3}$
1.7	$а) y = 4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2};$ $б) y = xtgx;$ $в) y = \frac{1}{\ln x};$ $г) y = 2^{3-\sqrt{5}} + \arcsin(1+x)$	1.17	$а) y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[5]{x^2};$ $б) y = x^2(\sin x + 1);$ $в) y = arctg(2-x);$ $г) y = tg\frac{1}{3} + ctg\frac{x}{3}$
1.8	$а) y = \frac{4}{x^3} - 2x^5;$ $б) y = (x^5 - 3)2^x;$ $в) y = \frac{1}{tg(x+3)};$ $г) y = \sqrt{x+3} + \sin 9$	1.18	$а) y = 7x^2 - \sqrt[3]{x^8};$ $б) y = e^{x+3}(x^2 + x + 1);$ $в) y = \lg(2x+1);$ $г) y = \arcsin 2x + e^2$
1.9	$а) y = 5x^3 - \frac{8}{x^2};$ $б) y = \sqrt{x}\cos x;$ $в) y = \frac{1}{ctg(x+3)};$ $г) y = e^7 + \sqrt[3]{x+1}$	1.19	$а) y = \frac{1}{x} + \sqrt{x^7};$ $б) y = \frac{x+1}{3} tgx;$ $в) y = 10^{3-2x};$ $г) y = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{2}{3}$

1	2	3	4
1.10	$а) y=\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^5}$; $б) y=\frac{x}{2}\ln x$; $в) y=\arcsin(1-x)$; $г) y=\sin 3+tg2x$	1.20	$а) y=\frac{6}{x^4}-\sqrt{x^5}$; $б) y=(2x^3+3x-1)e^{2+x}$; $в) y=arcctg(3-2x)$; $г) y=tg8+\sin\frac{x}{4}$

2 Пользуясь правилами дифференцирования, вычислить производные данных функций.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
2.1	$y=\frac{\cos x}{tgx+ctgx}$	2.11	$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$
2.2	$y=\frac{\sin}{1+ctgx}$	2.12	$y=\frac{\cos x}{\cos x+1}$
2.3	$y=\frac{\cos x}{1+tgx}$	2.13	$y=\frac{xe^x}{x+1}$
2.4	$y=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$	2.14	$y=\frac{x+1}{e^x}$
2.5	$y=\frac{\arccos x}{\arcsin x}$	2.15	$y=\frac{x\sin x}{x^2+x+1}$
2.6	$y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$	2.16	$y=\frac{(x+2)\cos x}{1-\sin x}$
2.7	$y=\frac{x^2+tgx}{x^2-tgx}$	2.17	$y=\frac{arctgx}{x^2+1}$
2.8	$y=\frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x}}$	2.18	$y=\frac{x^2+1}{arcctgx}$
2.9	$y=\frac{x\ln x}{x+1}$	2.19	$y=\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}+1}$
2.10	$y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$	2.20	$y=\frac{x\sin x+\cos x}{x}$

3 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислить производную функции $y = f(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$y=\log_2^3(2x+3)$	3.11	$y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$
3.2	$y=\cos\dfrac{1}{\ln(3x+7)}$	3.12	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x)$
3.3	$y=3^{arctg(2x+\pi)}$	3.13	$y=2^{\sin x^2}$
3.4	$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{4x-5}{\sqrt{3x}}$	3.14	$y=3^{tg^2(5x+\sqrt{2})}$
3.5	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x}}$	3.15	$y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$
3.6	$y=arctg\ \ tg^2x$	3.16	$y=\ln tg(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sin x}{2})$
3.7	$y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$	3.17	$y=\arccos\sqrt{1-x^2}$
3.8	$y=\dfrac{2}{7}\ln(\sqrt{x^7}+\sqrt{1+x^7})$	3.18	$y=arctg\dfrac{1+x}{1-x}$
3.9	$y=tg^2x+\ln\cos^2 x$	3.19	$y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$
3.10	$y=e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$	3.20	$y=\ln(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

4 Найти производную функции $y = f(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
4.1	$y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$	4.11	$y=x^3\arccos x-\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$
4.2	$y=\dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$	4.12	$y=\ln(1+e^x)+2e^{-x/2}arctge^{x/2}$
4.3	$y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$	4.13	$y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$
4.4	$y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$	4.14	$y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$

1	2	3	4
4.5	$y=\dfrac{2\sqrt{2x-x^2}}{x-1}+\ln\dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$	4.15	$y=arctg\,\dfrac{\sqrt{2tgx}}{1-tgx}$
4.6	$y=\ln\dfrac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$	4.16	$y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}arctg\,\dfrac{2tg^{x/2}+1}{\sqrt{3}}$
4.7	$y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$	4.17	$y=\dfrac{5^x(2\sin 2x+\cos 2x\cdot\ln 5)}{4+\ln^2 5}$
4.8	$y=2\arcsin\dfrac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$	4.18	$y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{\dfrac{x+2}{5}}$
4.9	$y=6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$	4.19	$y=\dfrac{(1+x)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$
4.10	$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{1/x^2-1}-\dfrac{\arccos x}{2x^2}$	4.20	$y=\ln(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1})+\arcsin e^{-5x}$

5 Найти производную. Записать дифференциал $df(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*
5.1	$y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}arctg\,\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}$	5.11	$y=tg^2x+\ln\cos^2 x$
5.2	$y=\dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}$	5.12	$y=\ln\dfrac{\sqrt{2}+thx}{\sqrt{2}-thx}$
5.3	$y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$	5.13	$y=\dfrac{1}{\sin 5}\ln(tgx+ctg5)$
5.4	$y=\dfrac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)$	5.14	$y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$
5.5	$y=e^{\sin x}(x-\dfrac{1}{\cos x})$	5.15	$y=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$
5.6	$y=-e^{3x}/(3sh^3x)$	5.16	$y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$
5.7	$y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$	5.17	$y=\dfrac{1-8ch^2x}{4ch^4x}$
5.8	$y=\dfrac{tg^2x}{tgx^2}$	5.18	$y=\ln^3(5x+\sqrt{1+25x^2})$
5.9	$y=\cos^4 x\cdot\cos 4x-\dfrac{1}{\cos 4x}$	5.19	$y=\dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$

1	2	3	4
5.10	$y = x\cos x + \sin 3 \cdot \ln\sin(x-3)$	5.20	$y = arctg\,\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$

6 Используя метод логарифмического дифференцирования, найти производную.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
6.1	$y = \dfrac{(1+x)^5\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^4}}$	6.11	$y = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$
6.2	$y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}\cdot\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$	6.12	$y = \dfrac{(x-1)^5\cdot(2x+1)^4}{\sqrt{(x+2)^3}}$
6.3	$y = \dfrac{x\cdot(x-1)^3}{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+x)^3}$	613.	$y = \dfrac{(2x-1)^2\cdot(5x+1)^3}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$
6.4	$y = \dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$	614	$y = \dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^5\cdot(x+4)^8}$
6.5	$y = \dfrac{x(x-1)^2(x-2)^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$	6.15	$y = \dfrac{(x^2+1)\sqrt[3]{x^2}}{(x-1)^2(x+\sqrt{2})}$
6.6	$y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\cdot\dfrac{x}{x^2+1}$	6.16	$y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}\cdot\dfrac{(x-3)^2}{\sqrt{x+5}}$
6.7	$y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2+1}{(x-3)^3}}\cdot\dfrac{(x-2)^3}{(x+1)^4}$	6.17	$y = \dfrac{(x-1)^2(x-2)^3\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}$
6.8	$y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-7)^4}}{x(x+1)^2(x+2)^3}$	6.18	$y = \dfrac{(x-3)^7\cdot\sqrt{3x+1}}{x\cdot(x+1)^9}$
6.9	$y = \dfrac{(x-2)^4}{(x+3)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2+1}}$	6.19	$y = \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x}$
6.10	$y = \sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{3x+2}}\cdot\dfrac{(x-1)^4}{(x+1)^2}$	6.20	$y = \sqrt[5]{\dfrac{(x+1)^4}{2x+3}}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{(x-3)^7}$

7 Найти производную показательно-степенной функции, используя метод логарифмического дифференцирования.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
7.1	$y=(\sin x)^{\cos x}$	7.11	$y=(\cos x)^{\sin x}$
7.2	$y=x^{x^2}$	7.12	$y=(\ln x)^x$
7.3	$y=x^{\ln x}$	7.13	$y=x^{3/\ln x}$
7.4	$y=x^{2^x}$	7.14	$y=(ctg 3x)^{2e^x}$
7.5	$y=(x^2+1)^{\cos x}$	7.15	$y=(\ln x)^{3x}$
7.6	$y=(\sin x)^{e^x}$	7.16	$y=(x^2-1)^{shx}$
7.7	$y=(x^3+4)^{tgx}$	7.17	$y=(\cos 5x)^{e^x}$
7.8	$y=(tgx)^{4e^x}$	7.18	$y=x^{\sin x^3}$
7.9	$y=(\arcsin x)^{e^x}$	7.19	$y=x^{\arcsin x}$
7.10	$y=(\ln x)^x$	7.20	$y=(2x)^{\sqrt{x}}$

8 Показать, что для данной функции $f(x)$ в окрестности точки y_0 существует $(f^{-1}(y))'$. Найти производную функции, обратной к функции $y=f(x)$, в указанной точке y_0.

№	y_0	$f(x)$	№	y_0	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
8.1	6/5	$y=x+\frac{1}{5}x^5$	8.11	5	$y=x^2+\frac{4}{x^2}, x>0$
8.2	1	$y=0{,}1x+e^{0{,}1x}$	8.12	-12	$y=\frac{1}{3}x^3+x$
8.3	$-1/2$	$y=2x-\frac{\cos x}{2}$	8.13	$5\sqrt{2}$	$y=x^3+3x$
8.4	0	$y=2x^2-x^4, x>1$	8.14	π	$y=x-\frac{1}{2}\sin x$
8.5	3/4	$y=2x^2-x^4, 0<x<1$	8.15	2,5	$y=x^2+\frac{1}{x^2}, x>1$
8.6	1	$y=x+\ln x$	8.16	3	$y=2x+x^5$

1	2	3	4	5	6
8.7	1	$y=2x+e^x$	8.17	0	$y=x+2arctgx$
8.8	4/5	$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}, x>0$	8.18	0	$y=x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$
8.9	-3	$y=x^3+2x$	8.19	3	$y=x^2+\dfrac{2}{x^2}, x<-1$
8.10	30	$y=(2x-5)^5-2$	8.20	0	$y=x+\arcsin x^3$

9 Вычислить производную y'_x функции, заданной параметрически, при $t\in(a;b)$.

№	$x(t)$, $y(t)$	$(a;b)$
1	*2*	*3*
9.1	$x=ctg(2e^t),\ y=\ln tge^t$	$(-\infty;0)$
9.2	$x=\arcsin(\sin\ t),\ y=\arccos(\cos t)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
9.3	$x=(t-1)^2\cdot(t-2),\ y=(t-1)^2\cdot(t-3)$	$\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$
9.4	$x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\ y=e^{2t}\cdot\sin^2 t$	$(0;+\infty)$
9.5	$x=e^{2t}\cdot\cos^2 t,\ y=tg\sqrt{1+t}$	$\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
9.6	$x=\sqrt{1-t^2},\ y=a\sin^3 t$	$(0;1)$
9.7	$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$	$(0;\pi)$
9.8	$x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}},\ y=\sqrt{1-t^2}$	$(-1;1)$
9.9	$x=\ln(ctgt),\ y=1/\cos^2 t$	$\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

1	2	3
9.10	$x=\arcsin\sqrt{1-t^2},\ y=(\arccos t)^2$	$(0;1)$
9.11	$x=\sqrt{2t-t^2},\ y=\arcsin(t-1)$	$(0;1)$
9.12	$x=(1+\cos^2 t)^2,\ y=\cos t/\sin^2 t$	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
9.13	$x=\sqrt{2t-t^2},\ y=1\Big/\sqrt[3]{(t-1)^2}$	$(0;1)$
9.14	$x=\ln tgt,\ y=1\big/\sin^2 t$	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
9.15	$x=(\arcsin t)^2,\ y=t\Big/\sqrt{1-t^2}$	$(0;1)$
9.16	$x=(1+\ln t)\big/t^2,\ y=(3+2\ln t)\big/t$	$(2;+\infty)$
9.17	$x=arctge^{t/2},\ y=\sqrt{e^t+1}$	$(-\infty;+\infty)$
9.18	$x=\arccos\frac{1}{t},\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\frac{1}{t}$	$(1;+\infty)$
9.19	$x=2tgt,\ y=2\sin^2 t+\sin 2t$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
9.20	$x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$(-\infty;+\infty)$

10 Вычислить $y'(x_0)$ для функции $y(x)$, удовлетворяющий данному уравнению $F(x,y)=0$.

№	$F(x,y)=0$	№	$F(x,y)=0$
1	*2*	*3*	*4*
10.1	$x^3+y^3-\frac{9}{2}xy=0,\ x_0=1, y>0$	10.11	$xy+\ln y=1,\ x_0=0$
10.2	$x^2+y^2=4e^x,\ x_0=0, y>0$	10.12	$x^4+y^4-2xy=0,\ x_0=1, y>0$

1	2	3	4
10.3	$x^2-5y^2+4xy-1=0,$ $x_0=1, y>0$	10.13	$x\operatorname{arctg}y=ye^x,\ x_0=0$
10.4	$x^2+xy+y^2=3,\ x_0=0, y<0$	10.14	$(1-x)y=x^3e^y,\ x_0=0$
10.5	$ye^y-xe^x=y(x-1),\ x_0=0$	10.15	$x^2+2y^2+4x-4y=0,$ $x_0=0, y>1$
10.6	$e^y+xy=e,\ x_0=0$	10.16	$x^2+y^2-2x+6y=0,$ $x_0=0, y>-3$
10.7	$e^{xy}+x^2+y^3=2,\ x_0=1$	10.17	$y^4-4x^4-6xy=0,\ x_0=1, y>0$
10.8	$y^5+y^3+y-x=0,\ x_0=3$	10.18	$xe^y+ye^x=1,\ x_0=0$
10.9	$y+e^y+\sin(x^2y)=1,\ x_0=0$	10.19	$x^2\sin y+y=\pi,\ x_0=0$
10.10	$x^2+y^2-6x+10y-11=0,$ $x_0=0, y>0$	10.20	$3x^4-y^5+2xy=0,\ x_0=-1$

Решение типовых примеров

1.20 Вычислить производные данных функций

а) $y=\dfrac{6}{x^4}-\sqrt{x^5}$; в) $y=arcctg(3-2x)$;

б) $y=(2x^3+3x-1)e^{2+x}$; г) $y=tg8+\sin\dfrac{x}{4}$.

Решение

а) Так как $y=\dfrac{6}{x^4}-\sqrt{x^5}=6x^{-4}-x^{5/2}$, то

$$y'=6\cdot(-4)x^{-4-1}-\frac{5}{2}x^{5/2-1}=-24x^{-5}-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}};$$

б) $y=(2x^3+3x-1)e^{2+x}$. Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$y' = (2x^3+3x-1)' \cdot e^{2+x} + (2x^3+3x-1)\cdot(e^{2+x})' =$$
$$= (6x^2+3)\cdot e^{2+x} + (2x^3+3x-1)\cdot e^{2+x} = e^{2+x}\cdot(2x^3+6x^2+3x+2);$$

в) $y = arcctg(3-2x)$.

$$y' = -\frac{1}{1+(3-2x)^2}\cdot(3-2x)' = -\frac{1}{1+9-12x+4x^2}\cdot(-2) =$$
$$= \frac{2}{10-12x+4x^2} = \frac{1}{5-6x+2x^2};$$

г) $y = tg8 + \sin\frac{x}{4}$. Воспользуемся формулой производной сложной функции.

Так как $tg8$ — постоянная, то $(tg8)' = 0$. Тогда

$$y' = \left(\sin\frac{x}{4}\right)' = \cos\frac{x}{4}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)' = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}.$$

2.20 Пользуясь правилами дифференцирования, вычислить производную функции

$$y = \frac{x\sin x + \cos x}{x}.$$

Решение Воспользуемся формулой производной частного:

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'\cdot x - (x\sin x+\cos x)\cdot x'}{x^2} =$$
$$= \frac{(\sin x + x\cos x - \sin x)\cdot x - x\sin x - \cos x}{x^2} = \frac{(x^2-1)\cos x - x\sin x}{x^2}.$$

3.20 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислить производную функции

$$y = \ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Решение

$$y' = \frac{1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-1/x}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$
$$= \frac{-1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{1-1/x}}\cdot\left(x^{-1/2}\right)' = \frac{-1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\cdot\frac{-1}{2x^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2x \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \sqrt{x-1}}.$$

4.20 Найти производную функции

$$y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}) + \arcsin e^{-5x}$$

Решение

Воспользуемся правилом дифференцирования. Получим

$$y' = \frac{1}{e^{5x} + \sqrt{e^{10x}-1}} \cdot \left(5e^{5x} + \frac{10e^{10x}}{2\sqrt{e^{10x}-1}}\right) + \frac{-5e^{-5x}}{\sqrt{1-e^{-10x}}} =$$

$$= \frac{5e^{5x}}{e^{5x} + \sqrt{e^{10x}-1}} \cdot \left(1 + \frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{10x}-1}}\right) - \frac{5}{e^{5x} \cdot \sqrt{1-e^{-10x}}} =$$

$$= \frac{5e^{5x}}{\sqrt{e^{10x}-1}} - \frac{5}{\sqrt{e^{10x}-1}} = \frac{5(e^{5x}-1)}{\sqrt{e^{10x}-1}}.$$

5.20 Найти производную. Записать дифференциал dy, если

$$y = arctg \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Решение Так как

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \frac{(\sqrt{1-x})'(1-\sqrt{x}) - \sqrt{1-x}(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}}}{1-2\sqrt{x}+x+1-x} =$$

$$= \frac{-(1-\sqrt{x})\sqrt{x}+1-x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}\cdot 2(1-\sqrt{x})} = \frac{-\sqrt{x}+x+1-x}{4\sqrt{x-x^2}\,(1-\sqrt{x})} = \frac{1}{4\sqrt{x-x^2}},$$

то дифференциал $dy = \frac{1}{4\sqrt{x-x^2}}dx$.

6.20 Используя метод логарифмического дифференцирования, найти производную функции

$$y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^4}{2x+3} \cdot \frac{x^2+x+1}{(x-3)^7}}$$

Решение Заметим, что

$$\ln y = \frac{4}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{5}\ln(2x+3) + \ln(x^2+x+1) - 7\ln(x-3).$$

Продифференцируем обе части равенства по x, учитывая, что $y = y(x)$. Получим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{4}{5(x+1)} - \frac{2}{5(2x+3)} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x-3}.$$

Теперь

$$y' = y\left(\frac{4}{5\ x+1} - \frac{2}{5\ 2x+3} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x-3}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(x+1)^4}{2x+3}}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x-3)^7}\cdot\left(\frac{4}{5\ x+1} - \frac{2}{5\ 2x+3} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x-3}\right).$$

7.20 Найти производную показательно-степенной функции, используя метод логарифмического дифференцирования

$$y = (2x)^{\sqrt{x}}$$

Решение

I способ $\ln y = \sqrt{x}\cdot\ln(2x) = \sqrt{x}(\ln 2 + \ln x),$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\sqrt{x})'(\ln 2 + \ln x) + \sqrt{x}\cdot(\ln 2 + \ln x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(2x) + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln(2x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}}.$$

Теперь $y' = y\cdot\dfrac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}} = (2x)^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}}.$

II способ Воспользуемся основным логарифмическим тождеством. Тогда $y = e^{\ln(2x)^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\ln(2x)}$. Теперь

$$y' = e^{\sqrt{x}\ln\ 2x}\cdot\left(\sqrt{x}\ln\ 2x\right)' = \ 2x^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\ 2x + \sqrt{x}\cdot\frac{2}{2x}\right) = \ 2x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{2+\ln\ 2x}{2\sqrt{x}}.$$

9.20 Вычислить производную y'_x функции, заданной параметрически:

$$x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ t\in(-\infty;+\infty).$$

Решение Так как

$$x'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-t\cdot\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$y'(t)=\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+t^2}}}\cdot\frac{-\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}\cdot\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

то $y'_x=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\operatorname{sgn} t.$

10.20 Вычислить $y'(x_0)$ для функции $y(x)$, удовлетворяющий уравнению $3x^4-y^5+2xy=0,$ если $x_0=-1.$

Решение Продифференцируем обе части данного равенства, учитывая, что y есть функция от x:

$$12x^3-5y^4y'+2(y+x\cdot y')=0.$$

Выразим из этого равенства y':

$$y'(2x-5y^4)=-12x^3-2y,$$

$$y'=\frac{12x^3+2y}{5y^4-2x}.$$

Для нахождения y_0, подставим в данное уравнение $x=x_0=-1$:

$$3-y^5-2y=0.$$

Так как слева – монотонная функция, то уравнение может иметь не более одного решения. Очевидно, это $y_0=1.$

Тогда $y'(-1)=\dfrac{-12+2}{5+2}=-\dfrac{10}{7}.$