Лабораторная работа №1
Элементы теории множеств и математической логики

Необходимые понятия и теоремы: операции над множествами, равенство множеств, декартово произведение множеств, высказывания и формулы алгебры высказываний, таблица истинности, кванторы, важнейшие тавтологии.
Литература: [1] с. 5 – 16, [2] с. 9 – 2, [3] с. 413 – 23.

1 Составьте подмножества множества *A* элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа.

№	A	№	A
1.1	$\left\{-20;-1;\frac{3}{4};2;0\right\}$	1.11	$-12;0;21;23;27$
1.2	$\left\{-10;-\frac{3}{5};0;2;13;7\right\}$	1.12	$2,5;2,6;2,7;2,8;2,9;3$
1.3	$\left\{1;2;3;17;\frac{2003}{10}\right\}$	1.13	$2;4;6;8;10;12;14;16;18$
1.4	$\left\{0;1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$	1.14	$;3;7;9;11,13;15;17$
1.5	$2,5;3,5;6,7;12$	1.15	$-3;3;-4;4;-5;5;-6;6$
1.6	$-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2$	1.16	$\left\{;\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$
1.7	$\left\{-7;-5;-3;-1;0;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7}\right\}$	1.17	$\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$
1.8	$\left\{-\frac{9}{10};-\frac{8}{10};-\frac{7}{10};-\frac{6}{10}\right\}$	1.18	$\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$
1.9	$24;25;26;27;28$	1.19	$\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$
1.10	$\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{1}{8}\right\}$	1.20	$\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$

2 Найти пересечение, объединение, разность множеств A и B.

№	A	B	№	A	B
2.1	$2;4;6;8;10;\ldots$	$4;8;12;16;20;\ldots$	2.11	$-10;-100;-1000;\ldots$	$-10;-20;-30;\ldots$
2.2	$3;6;9;12;15;\ldots$	$9;18;27;36;\ldots$	2.12	$-4;-8;-12;-16;-20;\ldots$	$-8;-16;-24;\ldots$
2.3	$4;8;12;16;20;\ldots$	$8;16;24;\ldots$	2.13	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}\ldots\right\}$
2.4	$5;10;15;20;\ldots$	$10;20;30;\ldots$	2.14	$\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27}\ldots\right\}$	$\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$
2.5	$6;12;18;24;\ldots$	$3;6;9;12;15;\ldots$	2.15	$0,1;0,01;0,001;\ldots$	$0,1;0,2;0,3;\ldots$
2.6	$8;16;24;\ldots$	$2;4;6;8;10;\ldots$	2.16	$-1;-2;-3;-4;\ldots$	$-1;-3;-5;-7;\ldots$
2.7	$9;18;27;\ldots$	$3;6;9;12;15;\ldots$	2.17	$-5;-10;-15;-20;\ldots$	$-10;-100;-1000;\ldots$
2.8	$10;100;1000;\ldots$	$10;20;30;\ldots$	2.18	$-5;-10;-15;-20;\ldots$	$-10;-20;-30;\ldots$
2.9	$2;4;6;8;10;\ldots$	$2;4;8;16;\ldots$	2.19	$\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$	$\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$
2.10	$3;6;9;12;15;\ldots$	$1;3;5;7;9;\ldots$	2.20	$0,1;0,2;0,3;\ldots$	$\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$

3 Выяснить, в каком из соотношений $\subset,\supset,=$ находятся множества А и В?

№	A	B	№	A	B
3.1	$\mathbb{Z}\setminus\ -1;0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$	3.11	$0;1\ \cap\mathbb{Q}$	$0;2\ \setminus\mathbb{Z}$
3.2	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}\setminus\ 0;1;2;\ldots$	3.12	$[0;1]\cap(\{1\}\cup\{0\})$	$([0;1]\setminus\{1\})\cup\{0\}$
3.3	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}\setminus\ 0;1;2;\ldots$	3.13	$([0;2]\setminus[0;1])\cap[1,3]$	$([0;2]\cap[1;3])\setminus[0;1]$
3.4	$\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}$	$\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}$	3.14	$\mathbb{R}\cap\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$
3.5	$\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}$	3.15	$(-\infty;0]\cap\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$
3.6	$\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	3.16	$(A\cap B)\cup C$	$(A\cup C)\cap(B\cup C)$
3.7	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	3.17	$(A\setminus B)\cap C$	$(A\cap C)\setminus B$
3.8	$\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$	3.18	$A\setminus B$	$A\setminus(A\cap B)$
3.9	$(-\infty;0)$	$\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	3.19	A	$(A\cap C)\cup(A\setminus B)$
3.10	$\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	$(-\infty;0]\cap\mathbb{Z}$	3.20	$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	$(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

4 Найти декартово произведение множеств A *и* B. Изобразить на плоскости $A\times B$.

№	A	B	№	A	B
4.1	[0;1]	[0;1]	4.11	$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$
4.2	[0;2]	[-1;1]	4.12	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;0)$
4.3	(0;3)	[1;2)	4.13	$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
4.4	(1;2]	(3;4]	4.14	$(-\infty;0]$	$(-\infty;+\infty)$
4.5	{1,2,3}	{3,4,5}	4.15	$(-\infty;+\infty)$	[0;1]
4.6	{1,2,5}	{3,6,7}	4.16	[0;2]	$(-\infty;+\infty)$
4.7	$[0;+\infty)$	$(-\infty;0]$	4.17	$[0;1]\cup[3;4]$	[2;5]
4.8	$(-\infty;0)$	$(-\infty;0)$	4.18	$[-1;0]\cup[1;2]$	$[0;+\infty)$
4.9	$(-\infty;0]$	$[0;+\infty)$	4.19	$\mathbb{N}$	$(-\infty;+\infty)$
4.10	$[0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	4.20	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$

5 Каким из знаков $\Rightarrow,\Leftarrow,\Leftrightarrow$ связаны высказывания A и B. Докажите это. Является ли A необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для B? Здесь $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$.

№	A	B	№	A	B
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
5.1	f принимает только положительные значения	$a>0$	5.11	множеством значений f является $[-\frac{D}{4a};+\infty)$	$a>0$
5.2	f принимает только отрицательные значения	$a<0$	5.12	множеством значений f является $(-\infty;-\frac{D}{4a}]$	$a<0$
5.3	f принимает только неотрицательные значения	$D\le 0$	5.13	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$
5.4	f принимает только положительные значения	$a>0$ и $D<0$	5.14	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$
5.5	f принимает только отрицательные значения	$a<0$ и $D<0$	5.15	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$ и $\frac{c}{a}>0$

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
5.6	f принимает только неотрицательные значения	$a>0$ и $D\le 0$	5.16	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$ и $\frac{c}{a}>0$
5.7	f принимает только неположительные значения	$a<0$ и $D\le 0$	5.17	уравнение $f(x)=0$ имеет 1 положительный и 1 отрицательный корень	$\frac{c}{a}<0$
5.8	f принимает положительные и отрицательные значения	$D>0$	5.18	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$
5.9	множеством значений f является $[-2;+\infty)$	$a>0$	5.19	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$
5.10	множеством значений f является $(-\infty;4]$	$a<0$	5.20	уравнение $f(x)=0$ имеет неотрицательные корни	$-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$

6 Записать с помощью кванторов высказывание и его отрицание

6.1 Все элементы *x* числового множества *X* удовлетворяют условию $x \ge m$.

6.2 В числовом множестве *X* существует элемент x_0 такой, что все элементы *x* числового множества *X* удовлетворяют условию $x \ge x_0$.

6.3 Все элементы *x* числового множества *X* удовлетворяют условию $x \le M$.

6.4 В числовом множестве *X* существует элемент x_0 такой, что все элементы *x* числового множества *X* удовлетворяют условию $x \le x_0$.

6.5 Существует число *M* такое, что все элементы *x* числового множества *X* удовлетворяют условию $x \le M$.

6.6 Во всяком подмножестве *B* числового множества *X* существует элемент x_0 такой, что все элементы *x* множества *B* удовлетворяют условию $x \le x_0$.

6.7 Существует число *m* такое, что все элементы *x* числового множества *X* удовлетворяют условию $x \ge m$.

6.8 Во всяком подмножестве B числового множества X существует элемент x_0 такой, что все элементы x множества B удовлетворяют условию $x \geq x_0$.

6.9 Существуют числа m и M такие, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $m \leq x \leq M$.

6.10 Все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' > M'$.

6.11 Существуют элементы x числового множества X, удовлетворяющие условию $x \geq m$.

6.12 Все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' < m'$.

6.13 Существуют элементы x числового множества X, удовлетворяющие условию $x \leq M$.

6.14 Существует число M такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' > M'$.

6.15 Для любого числа M существует элемент x числового множества X такой, что $x > M$.

6.16 Существует число m такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' < m'$.

6.17 Для любого числа m существует элемент x числового множества X такой, что $x < m$.

6.18 Существует число c такое, что любой элемент x числового множества X удовлетворяет условию $x \leq c$ и любой элемент y числового множества Y удовлетворяет условию $y \geq c$.

6.19 Для любых чисел m и M существуют элементы x и y числового множества X такие, что $x < m$ и $y > M$.

6.20 Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что любой элемент x из множества X меньше либо равен любого элемента y из множества Y, существует число M такое, что $x \leq M \leq y$ для любых элементов x из X и y из Y.

Решение типовых примеров

1.20 Составьте подмножества множества *A* элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа .

Решение. Множество *B* называется подмножеством множества *A*, если любой элемент множества *B* является элементом множества *A*. Так как множество натуральных чисел $\mathbb{N}=\ 1;2;3;4;...$, то подмножеством натуральных чисел для A будет $\ 22;23$. Множество целых чисел $\mathbb{Z}=\ ...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...$. Поэтому подмножеством целых чисел для A будет $\ 22;23$. Нечётными называются числа вида $2n+1$, где $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому подмножеством нечётных чисел для A будет $\ 23$, поскольку $23=2\cdot 11+1$. Чётными называются числа вида $2n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому подмножеством чётных чисел для A будет $\ 22$, поскольку $22=2\cdot 11$. Отрицательными называются числа, расположенные слева от нуля на числовой прямой. Таких во множестве *A* нет. Поэтому и подмножеств, состоящих из этих чисел для *A* нет. Положительными называются числа, расположенные справа на числовой прямой. Все элементы множества *A* являются положительными числами. Поэтому в качестве подмножества положительных чисел для *A* можно взять само множество *A*.

2.20 Найти пересечение, объединение, разность множеств
$A=\ 0,1;0,2;0,3;...$ и $B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};...\right\}$.

Решение. Пересечением множеств *A* и *B* называется множество $A\cap B=\ x\,|\,x\in A$ и $x\in B$. Поскольку $0,1=\frac{1}{10}$, а все остальные элементы множества *B* меньше любого элемента множества *A*, то других общих элементов для *A* и *B* нет и следовательно в данном случае $A\cap B=\left\{\frac{1}{10}\right\}$. Объединением множеств *A* и *B* называется множество $A\cup B=\ x\,|\,x\in A$ или $x\in B$. Таким образом в объединение множеств *A* и *B* входят все элементы как множества *A*, так и множества *B*. В нашем случае $A\cup B=\left\{0;\frac{1}{10};0,2;\frac{1}{20};0,3;\frac{1}{30};0,4;\frac{1}{40};...\right\}$. Разностью множеств *A* и *B* называется множество $A\setminus B=\ x\,|\,x\in A$ и $x\notin B$. В нашем случае только элемент 0,1 из множества *A* принадлежит *B*. Поэтому $A\setminus B=\ 0;0,2;0,3;0,4;...$

3.20 Выяснить, в каком из соотношений $\subset, \supset, =$ находятся множества $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$?

Решение. Докажем, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Два множества равны, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Покажем, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Пусть $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, тогда $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$.

Если $x \in A \setminus B$, то $x \in A$ и $x \notin B$. Из того, что $x \in A$ следует, что $x \in A \cup B$, а из того, что $x \notin B$ следует, что $x \notin A \cap B$. Значит $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Аналогично получаем, что $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, если $x \in B \setminus A$.

Докажем теперь, что $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пусть $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, тогда $x \in A \cup B$ и $x \notin A \cap B$. Из того, что $x \in A \cup B$ следует, что $x \in A$ или $x \in B$, а из того, что $x \notin A \cap B$ следует, что $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда, если $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$, а, если $x \in B$ и $x \notin A$, то $x \in B \setminus A$. Других ситуаций быть не может. Итак, $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$. Значит $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ доказано.

4.20 Найти декартово произведение множеств $A = \mathbb{N}$ *и* $B = \mathbb{Z}$. Изобразить на плоскости $A \times B$.

Решение. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \ (x, y) | x \in A, y \in B \ $. В нашем случае $A \times B = \ (x, y) | x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z} \ $. Изобразим множество $A \times B$ на плоскости

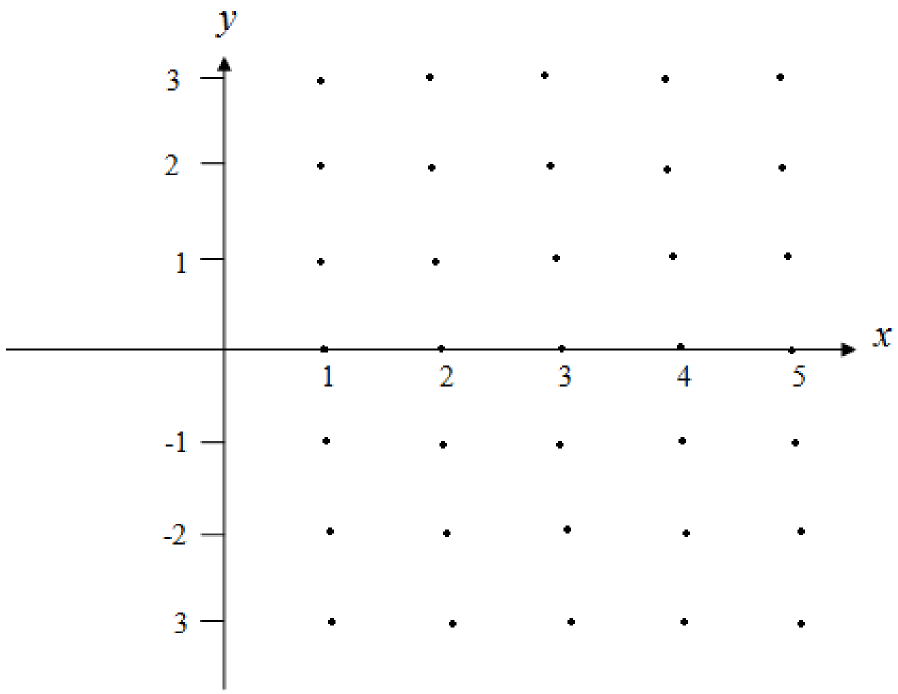

Рисунок 1 – Множество $A \times B = \ (x, y) | x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$

5.20 Каким из знаков $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ связаны высказывания A={ уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет неотрицательные корни } и B={$-\frac{b}{a}\geq 0$, $\frac{c}{a}\geq 0$ и $D\geq 0$}. . Докажите это. Является ли A необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для B? Здесь $D=b^2-4ac$.

*Решение***.** Докажем, что из A не следует B. Рассмотрим уравнение $x^2+3x-4=0$. Оно имеет неотрицательный корень $x=1$. Однако $-\frac{b}{a}=\frac{-3}{1}=-3<0$.

Докажем, что $B\Rightarrow A$. Пусть $-\frac{b}{a}\geq 0$, $\frac{c}{a}\geq 0$ и $D\geq 0$. Из условия $D\geq 0$ следует, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни. Из теоремы Виета следует, что их произведение равно $\frac{c}{a}$ и поскольку $\frac{c}{a}\geq 0$, то либо оба корня имеют одинаковый знак либо один из них равен нулю. Если один из корней равен нулю, то он и является неотрицательным корнем, т.е. A выполнено. Если же оба корня имеют одинаковый знак, то из теоремы Виета и условия $-\frac{b}{a}\geq 0$ следует, что их сумма $x_1+x_2=-\frac{b}{a}\geq 0$. Поэтому они оба положительные. Значит и в этом случае уравнение имеет неотрицательный корень. Итак импликация $B\Rightarrow A$ доказана.

6.20 Записать с помощью кванторов высказывание A={Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что любой элемент x из множества X меньше либо равен любого элемента y из множества Y, существует число M такое, что $x\leq M\leq y$ для любых элементов x из X и y из Y} и его отрицание

*Решение***.** Запишем с помощью кванторов высказывание A и его отрицание $\neg A$:

$$A= \forall X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\rightarrow x\leq y\exists M: x\leq M\leq y\forall x\in X,\forall y\in Y$$

$$\neg A= \exists X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\rightarrow x\leq y\wedge\forall M\exists x\in X,\exists y\in Y: x>M\vee y<M$$

Заметим, что высказывание A представляет собой теорему об отделимости числовых множеств и выполняется всегда. Поэтому высказывание $\neg A$ ложно.