

Контрольная работа по ТФКП
3 курс математический факультет

Расчёт номера варианта контрольной работы:

Всего вариантов – 5.

Номер по списку в журнале следует разделить на 5. К остатку в результате деления прибавить 1.

Пример: порядковый номер в журнале – 11.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ - 10 & 2 \\ \hline & 1(\text{ост.}) \end{array}$$

$1+1=2$ – второй вариант.

№ варианта	№ задания														
	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71
1	2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72
2	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73
3	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74
4	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

В задачах 1-5 требуется выяснить, какие линии заданы указанными уравнениями, и изобразить эти линии на чертежах.

1. $z=i+2e^{it}$, ($3\pi \leq t \leq 5\pi$).
2. $z=it+2$, ($-\infty < t < \infty$).
3. $z=(1+i)t^2+i$, ($-\infty < t < \infty$).
4. $z=1/t+it$, ($-\infty < t < \infty$).
5. $z=(1-i)t+i$, ($-\infty < t < \infty$).

В задачах 6-10 найти и изобразить на чертеже линии, заданные указанными уравнениями.

6. $\left| \frac{z-1}{z+3} \right| = 1$.
7. $|z-2| + |z+2| = 4$
8. $|z-2| + |z+2| = 6$.
9. $|z-2| + |z+2| = 1$.
10. $|z-2| - |z+2| = 1$.

В задачах 11-15 требуется выделить действительную и мнимую части каждой из указанных функций.

11. $w = z^2 + az + b$, (a, b – действительные числа).

12. $w = z^2 - 1/z^2$.

13. $w = \bar{z}^2 + |z|^2$.

14. $w = e^{i\alpha} z + e^{i\beta} \bar{z}$, (α, β – действительные числа).

15. $w = \frac{z + I}{z - i}$.

В задачах 16 – 20 требуется установить, имеют ли данные функции предел в указанных точках; если предел существует, найти его.

16. $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $z = 0$.

17. $w = \frac{|z|}{z}$, $z = 0$.

18. $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z = 0$,

19. $w = \frac{|z|}{z}$, $z = 0$.

20. $w = \frac{z}{z-i}$, $z = \infty$.

В задачах 21 – 25 требуется выяснить, в каких точках комплексной плоскости имеют производную указанные функции. Чему равна производная в каждой из этих точек? Являются ли данные функции аналитическими в каких-нибудь точках плоскости?

21. $w = z^2 + i|z|^2$.

22. $w = 1/z$.

23. $w = x^2 + iy^2$.

24. $w = yx + i(x^2 - y^2)$.

25. $w = \operatorname{tg} y - i \operatorname{tg} x$.

В задачах 26 -28 выяснить, существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

26. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$;

27. $\operatorname{Im} f(z) = xy$;

28. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$?

В задачах 29-30 проверить, являются ли указанные функции гармоническими.

29. $x^2 + y^2$.

30. $\frac{x}{x^2 + y^2}$.

В задачах 31-35 найти аналитические функции $f(z) = u + iv$ по заданной действительной или мнимой части:

31. $u(x,y) = e^x \sin y$;

33. $u(x,y) = \frac{x^2 - x + y^2}{x^2 + y^2}$;

32. $u(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$;

34. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

35. $u(x,y) = 3x^2y - y$, $f(0) = 0$.

В задачах 36-40 вычислить логарифмы следующих чисел и изобразить на чертеже несколько значений логарифма:

36. i .

38. $-i$.

40. 5 .

37. $1 - i\sqrt{3}$.

39. $1 + i\sqrt{3}$.

В задачах 41 -45 найти все значения указанных степеней. Ответ записать в показательной форме. Значение, отвечающее $k = 0$, записать в алгебраической форме, вычислив действительную и мнимую части с двумя верными десятичными знаками.

41. 1^{-i}

43. $(1 - i)^{i-1}$

44. $(1 + i)^i$

42. i^i

45. 1^i

В задачах 46-50 найти взаимно-однозначное конформное отображение данной области на полуплоскость $Im w > 0$. Выполнить чертёж.

46. Верхняя полуплоскость с разрезом вдоль отрезка мнимой оси $[0, ih]$ (рис. 1)

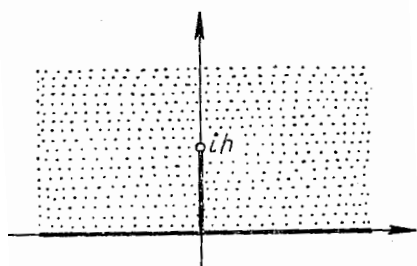


Рис. 1

47. Полуокруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ (рис.2)

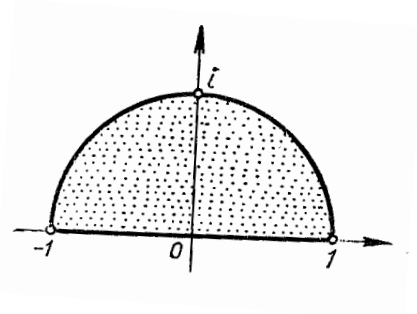


Рис. 2

48. Полоса с вырезом (рис 3)

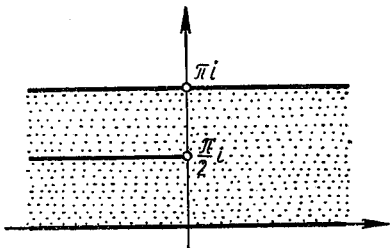


Рис. 3

49. Луночка (рис. 4)

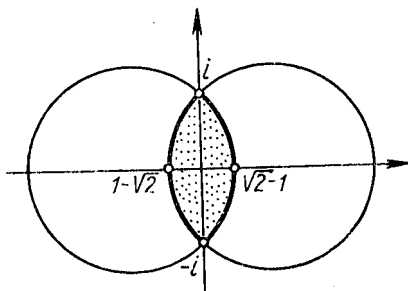


Рис. 4

50. Верхняя полуплоскость с вырезанным полуокругом (рис. 5)

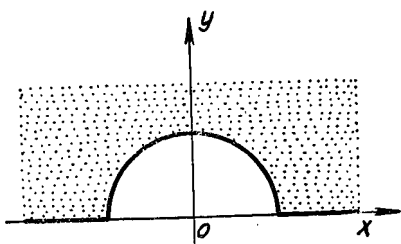


Рис. 5

В задачах 51-60 найти круг сходимости каждого из данных степенных рядов.

$$51. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(2+i)^n}.$$

$$52. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}.$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot z^n}{n^n}.$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n.$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}.$$

В задачах 56-60 вычислить указанные интегралы

$$56. \int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z+1| = 1/2$$

$$57. \int_C \frac{e^z dz}{z^2-1}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z| = 2$$

$$58. \int_C \frac{\operatorname{sh} z dz}{z(z+\pi i/4)}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z| = 1$$

$$59. \int_C \frac{(z^2+5z-4) dz}{(1-z)^3}, \quad \text{где } C - \text{эллипс } x^2/4 + y^2/2 = 1$$

$$60. \int_C \frac{e^z dz}{z(z-1)^2}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z-1| = 1/2$$

В задачах 61-64 разложить данные функции в ряд Лорана в указанных кольцах.

$$61. \frac{z}{(z-i)(z+3)}, \quad 1 < |z| < 3$$

$$63. z^3 e^{1/z}, \quad 0 < |z| < \infty$$

$$62. \frac{1}{z(1-z)}, \quad 0 < |z| < 1$$

$$64. \frac{3}{z^2+z-2}, \quad 1 < |z| < 2$$

65. Найти все возможные разложения в ряд Лорана по степеням следующей функции

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 3}, \alpha=1$$

В задачах 66 -70 вычислить указанные определённые интегралы.

$$66. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \cos\varphi/3}.$$

$$69. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 + \cos\varphi}.$$

$$67. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + 2 \sin\varphi}.$$

$$70. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos\varphi)^2}.$$

$$68. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 3 \sin\varphi)^2}.$$

В задачах 71 -75 вычислить несобственные интегралы, используя сведения из теории вычетов.

$$71. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

$$72. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$73. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2) dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$74. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$75. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{9 + x^2} dx.$$