Э. И. Зверович

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
в шести частях

Часть 2
Интегральное исчисление функций скалярного аргумента

Минск

БГУ

2004

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов во втором семестре. Сюда входят: теория неопределенного интеграла, теория определенного интеграла Римана, интеграл Стилтьеса, несобственные интегралы, а также приложения интегрального исчисления к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, площадей поверхностей вращения и объемов некоторых тел.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов во втором семестре. Сюда входят: теория неопределенного интеграла, теория определенного интеграла Римана, несобственные интегралы, а также приложения интегрального исчисления к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, площадей поверхностей вращения и объемов некоторых тел. В качестве дополнительного материала включена глава, посвященная теории интеграла Римана — Стилтьеса. Кроме того, излагается теория криволинейных интегралов по плоским кривым.

Нумерация глав продолжает нумерацию глав части 1. Продолжена также линия на сближение учебных дисциплин вещественного и комплексного анализа. Например, обоснование теоремы об интегрировании рациональных функций и метода Остроградского даны с использованием основной теоремы алгебры комплексных чисел. Кроме того, теория определенного интеграла излагается не только для вещественнозначных, но и для комплекснозначных функций. Введено также понятие «обобщенной первообразной», которое использовано при доказательстве «второй теоремы о среднем». Теория несобственных интегралов изложена без подразделения их на интегралы 1-го и 2-го рода, что ведет к экономии учебного времени.

В основном тексте даются образцы решения типовых задач. В конце каждой главы приведены небольшие подборки задач, дополняющие основной текст. Эти подборки задач составлены доцентом О. Б. Долгополовой.

Выражаю благодарность профессорам В. Г. Кротову и П. П. Забрейко, а также лаборантке Е. К. Щетникович за квалифицированную помощь при подготовке рукописи в издательской системе LaTeX 2_ε. Благодарю также рецензентов этой книги — профессоров Н. В. Лазаковича и Ф. В. Чумакова.

Глава 9

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В дифференциальном исчислении рассматривалась задача нахождения производной от заданной функции. В интегральном исчислении возникает обратная задача: *найти функцию, если известна ее производная.* Настоящая глава посвящена изложению основных способов решения этой обратной задачи. При этом всегда предполагается, что подынтегральные функции рассматриваются как функции, определенные на некоторых промежутках.

§ 1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение 1. *Функция F называется первообразной по отношению к функции $f : \langle a\,,\, b\rangle \longrightarrow \mathbb{C}$ на промежутке $\langle a\,,\, b\rangle \subset \mathbb{R}$, если на этом промежутке функция F дифференцируема, причем*[1] $F' = f$.

Так как производная постоянной функции тождественно равна нулю, то *первообразная функции, тождественно равной нулю, равна произвольной постоянной.* Более того, в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях *любая функция, первообразная к функции $f(x) \equiv 0$ на промежутке, равна тождественно постоянной.* Отсюда заключаем, что если функция F — первообразная к f на $\langle a\,,\, b\rangle$, то любая другая функция, первообразная к f на $\langle a\,,\, b\rangle$, представима в виде $F(\cdot) + C$, где C — некоторая постоянная.

Определение 2. *Неопределенным интегралом от функции f на некотором промежутке называется обозначаемая символом*

[1] Напомним, что равенства типа $F' = f$ понимаются в следующем смысле: $F'(x) = f(x)$ для всех x.

$\int f(x)dx$ *общая формула, представляющая все функции, первообразные к функции* f *на заданном промежутке, и только эти функции.*

В силу этого определения и сделанного выше замечания имеем

$$\int f(x)dx := F(x) + C, \tag{9.1}$$

где F — любая первообразная для f, а C — произвольная постоянная. Равенства, аналогичные (9.1), т. е. содержащие неопределенные интегралы, понимаются в следующем смысле: *две функции считаются равными, если разность между ними — некоторая функция, постоянная на данном промежутке.*

Поясним обозначение для неопределенного интеграла. Символ $\int$ — стилизованная буква S — называется *знаком интеграла*; $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*; $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением (дифференциалом).*

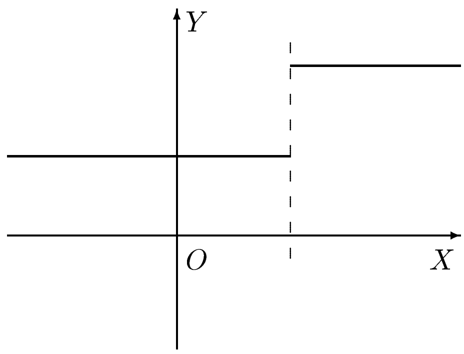

Рис. 1. График кусочно-постоянной функции

Задача нахождения неопределенного интеграла (или, что равносильно, первообразной) по заданной подынтегральной функции f называется *задачей (неопределенного) интегрирования.* Решение этой задачи существует не для всякой функции f. Из теоремы Дарбу следует, что для существования первообразной от функции f необходимо, чтобы эта функция принимала в некоторых точках промежутка все значения, заключенные между значениями на концах этого промежутка. Таким свойством обладают, например, функции, непрерывные на отрезке, и в следующей главе будет доказано, что все они имеют первообразные. С другой стороны, кусочно-постоянные функции (см. рис. 1), определенные на отрезках, не принимают всех промежуточных значений, и потому на этих отрезках не существует и функций, первообразных к данным кусочно-постоянным функциям. Отметим простейшие свойства неопределенного интеграла.

1°. *Интеграл от дифференциала функции* F *равен* $F(x)+C$, *где* C — *произвольная постоянная, т. е.*

$$\int dF(x) = F(x) + C\,.$$

◀ Так как F — первообразная для F', то в силу (9.1) имеем

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C\,. \ ▶$$

2°. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\,.$$

◀ Из (9.1) имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) =$$
$$= dF(x) + dC = F'(x)dx = f(x)dx\,. \ ▶$$

3°. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.*

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\,.$$

◀ Из (9.1) имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x)+C) = F'(x) + \frac{d}{dx}C = f(x)\,. \ ▶$$

Эти свойства показывают, что операции интегрирования и дифференцирования являются в некотором смысле взаимно обратными.

2. Непосредственное (табличное) интегрирование

Учитывая, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x)\,, \tag{9.2}$$

можно в некоторых случаях найти первообразную на основании формул для производных от элементарных функций.

Например,

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,, \qquad \text{так как} \qquad \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x\,;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C\,, \qquad \text{так как} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{x^2+1}\,;$$

$$\int \frac{dx}{x-\lambda} = \ln|x-\lambda| + C\,, \qquad \text{так как} \qquad \frac{d}{dx}\ln|x-\lambda| = \frac{1}{x-\lambda}\,.$$

Во многих случаях отыскание первообразной с помощью попытки обращения операции дифференцирования не представляет больших затруднений, например

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{e^{2x}}{2} + C\,.$$

Читателю рекомендуется запомнить следующую *таблицу интегралов* от некоторых (часто встречающихся) элементарных функций:

$\int 0\cdot dx = C$;

$\int dx = x + C$;

$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad \alpha \neq -1$;

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|\,x| + C$;

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\,, \quad a \neq 1\,,\ a > 0$;

$\int e^x dx = e^x + C\,$;

$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C\,,\ a \neq 0$
(формула «короткого логарифма»);

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C\,,\ \alpha \neq 0$
(формула «длинного логарифма»);

$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C\,,\ a > 0$;

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C\,,\;\; a > 0;$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

Каждая формула этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащимся в естественной области определения соответствующей подынтегральной функции. Читателю предлагается проверить все формулы таблицы интегралов с помощью дифференцирования.

Иногда в таблицу включают следующие интегралы, содержащие под знаком интеграла гиперболические функции:

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C\,;$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C\,;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C\,;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C\,;$$

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x + C\,;$$

$$\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C\,.$$

§ 2. Методы неопределенного интегрирования

Кроме непосредственного (табличного) интегрирования можно выделить три основных метода интегрирования: *метод разложения, метод подстановки и метод интегрирования по частям.* При вычислении конкретных интегралов эти методы сравнительно редко применяются «в чистом виде», чаще дело сводится к комбинированию всех методов. В связи с этим следует отметить, что умению успешного применения методов неопределенного интегрирования невозможно научиться «чисто теоретически». Это умение вырабатывается опытом: каждый студент должен реально и самостоятельно вычислить достаточ но большое количество разнообразных интегралов.

1. Метод разложения

Этот метод основан на применении следующей теоремы.

Теорема 1. *Интеграл от линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{C}$ конечного числа интегрируемых функций f_k равен линейной комбинации с теми же коэффициентами интегралов от функций f_k, т. е.*

$$\int \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int f_k(x)dx\,. \tag{9.3}$$

◀ Учитывая (9.2), достаточно проверить, что производные от левой и правой частей равенства (9.3) равны. Имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\int \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)dx\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\,.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int f_k(x)dx\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{d}{dx}\left(\int f_k(x)dx\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\,.$$

Таким образом, требуемое равенство производных выполняется. ▶

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int p(x)dx$, где $p(x)$ — многочлен от x, т. е.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

◀ Применяя формулу (9.3), имеем

$$\int p(x)dx = \int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)dx =$$

$$= a_n \int x^n dx + a_{n-1} \int x^{n-1}dx + \ldots + a_0 \int dx =$$

$$= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + a_0 x + C . \quad ▶$$

2) Вычислить интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Разложим $f(x)$ по формуле бинома Ньютона, затем применим равенство (9.3)

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n dx = \int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{x})^k \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int \binom{n}{k} x^{k-n/2}dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1-n/2)} x^{k+1-n/2} + C . \quad ▶$$

3) Вычислить табличный интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$, где $a > 0$.

◀ Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{(a+x)+(a-x)}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C . \quad ▶$$

Эти примеры показывают, что успех применения метода разложения зависит от возможности представить подынтегральную функцию в виде линейной комбинации функций, интегралы от которых вычисляются проще.

2. Метод подстановки (замены переменных)

Теорема 2. *Если при* $x \in [a\,,\, b]$ *существует интеграл* $\int f(x)dx$, *а отображение* $\varphi\ :\ [\alpha\,,\, \beta] \longrightarrow [a\,,\, b]$ *— дифференцируемое и сюръек-*

тивное, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,, \tag{9.4}$$

где $x = \varphi(t)\,,\ t \in [\alpha\,,\,\beta]$.

◀ Пусть F — первообразная для f на $[a\,,\,b]$. Имеем

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1\,, \quad x \in [a\,,\,b]\,. \tag{9.5}$$

Так как $(F \circ \varphi)'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ при любом $t \in [\alpha\,,\,\beta]$, то композиция $F \circ \varphi$ является первообразной для функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ на $[\alpha\,,\,\beta]$. Таким образом, при $t \in [\alpha\,,\,\beta]$ имеем

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C_2\,. \tag{9.6}$$

При $x = \varphi(t)$ правые части равенств (9.5) и (9.6) отличаются на постоянное слагаемое. Поэтому при $x = \varphi(t)$ справедливо равенство (9.4). ▶

Рассмотрим **примеры** на применение метода подстановки.

1) Вычислить интеграл $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$.

◀ Полагая $t = f(x)$, имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C\,. \quad ▶$$

2) Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Вычислить $\int f(at+b)dt$, где $a \neq 0$.

◀ Производя замену $x = at + b$, получим

$$\int f(at+b)dt = \int f(x)\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\int f(x)dx = \frac{1}{a}F(x) + C = \frac{1}{a}F(at+b) + C\,. \quad ▶$$

3) Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$, где $x \in [0\,,\,1]$.

◀ Производя замену $x = \sin t$, $dx = \cos t \cdot dt$, $t \in [0\,,\,\pi/2]$, получим

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\,. \quad ▶$$

4) Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

◀ Произведем в знаменателе преобразование, известное под названием «выделение полного квадрата»

$$x^2+px+q = \left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Производя замену $x+\frac{p}{2}=t$, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Дальнейшие вычисления зависят от знака дискриминанта $D := \frac{p^2}{4}-q$. Рассмотрим 3 случая.

(a) $D>0$. Вводя обозначение $a:=\sqrt{D}>0$, имеем

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{D}}\ln\left|\frac{x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{D}}{2}}{x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{D}}{2}}\right|+C.$$

(b) $D<0$. Вводя обозначение $a:=\sqrt{|D|}>0$, имеем

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C = \frac{1}{\sqrt{|D|}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{|D|}}+C.$$

(c) $D=0$. В этом случае

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{x+\frac{p}{2}}+C. \quad ▶$$

3. Метод интегрирования по частям

Этот метод основан на применении следующей теоремы.

Теорема 3. *Предположим, что функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$, *дифференцируемы на промежутке* $\langle a\,,\, b\rangle$, *и пусть существует один из интегралов* $\int u(x)dv(x)$, $\int v(x)du(x)$. *Тогда существует другой интеграл, и справедливо равенство*

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)\,. \tag{9.7}$$

◀ Дифференцируя произведение $u(x)\cdot v(x)$, получим

$$d(u(x)\cdot v(x)) = u(x)\cdot dv(x) + v(x)\cdot du(x)\,.$$

Отсюда заключаем, что функция $u \cdot v$ является первообразной для функции $u\cdot dv + v\cdot du$, и значит, с точностью до постоянного слагаемого справедливо равенство

$$\int u(x)\cdot dv(x) + \int v(x)\cdot du(x) = u(x)\cdot v(x)\,.$$

Перенося второй интеграл в правую часть, получим (9.7). ▶

Замечание. Равенство (9.7), сокращенно записываемое в виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

называется *формулой интегрирования по частям.* Она широко применяется при вычислении интегралов. Ее успешное применение для вычисления интеграла $\int f(x)dx$ часто зависит от удачного представления подынтегрального выражения в виде произведения $f(x)dx = u(x)\cdot dv(x)$. Это представление стремятся подобрать, образно говоря, так, чтобы функция $u(x)$ «упрощалась при дифференцировании», а интеграл $\int dv(x)$ «легко вычислялся».

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int xe^x dx$.

◀ Желая применить интегрирование по частям, полагаем

$$\left[\begin{array}{c|c} u := x & du = dx \\ dv := e^x dx & v = e^x \end{array}\right].$$

Применяя, далее, формулу (9.7), находим

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C\,. \ ▶$$

2) Вычислить интеграл $\int \ln x\cdot dx$.

◀ Полагаем
$$\left[\begin{array}{l|c} u := \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv := dx & v = x \end{array}\right].$$
Применяя, далее, формулу (9.7), имеем
$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C\,. \ ▶$$

3) Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x \cdot dx$.

◀ Положим
$$\left[\begin{array}{c|c} u := \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv := dx & v = x \end{array}\right].$$
Применяя, далее, формулу (9.7), находим
$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{x^2+1} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\,. \ ▶$$

4) Вычислить интеграл $\int \arcsin x \cdot dx$.

◀ Положим
$$\left[\begin{array}{c|c} u := \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv := dx & v = x \end{array}\right].$$
Применяя, далее, формулу (9.7), получаем
$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\,. \ ▶$$

5) Вычислить интеграл $\int e^x \sin x dx$.

◀ Полагаем
$$\left[\begin{array}{c|c} u := e^x & du = e^x dx \\ dv := \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right].$$
Применяя, далее, формулу (9.7), будем иметь
$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\,.$$
Далее, полагая
$$\left[\begin{array}{c|c} u := e^x & du = e^x dx \\ dv := \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right],$$

получим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx\,.$$

Отсюда легко находится исходный интеграл

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C\,. \ \blacktriangleright$$

§ 3. Интегрирование рациональных функций

1. Постановка задачи интегрирования «в конечном виде»

Правила дифференцирования таковы, что производная от любой элементарной функции в свою очередь является элементарной функцией, нахождение которой не представляет принципиальных трудностей. Иначе обстоит дело с неопределенным интегрированием. Общих правил интегрирования, аналогичных правилам дифференцирования, не существует. Даже если функция f — элементарная, то и тогда ложным является утверждение, что первообразная к ней функция F — элементарная. Известно, например, что не являются элементарными функциями следующие, встречающиеся в приложениях, интегралы:

$\int \frac{e^{\lambda x}}{x} dx$ (интегральная показательная функция);

$\int \frac{dx}{\ln x}$ (интегральный логарифм);

$\int \frac{\sin x}{x} dx\,, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx$ (интегральные синус и косинус);

$\int e^{\lambda x^2} dx$ (интеграл вероятностей);

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}\,, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ (эллиптические интегралы первого рода)

и многие другие. В связи с этим представляет некоторый интерес нахождение таких классов элементарных функций f, интегралы от которых $\int f(x)dx$ тоже являются элементарными функциями.

Определение 3. *Говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в конечном виде (или в элементарных функциях), если первообразная F функции f является элементарной функцией.*

Так как производная от любой элементарной функции в свою очередь является элементарной функцией, то интеграл $\int f(x)dx$ может выражаться в конечном виде только тогда, когда подынтегральная функция f является элементарной. Поскольку класс элементарных функций является сравнительно узким, то и проблема выражения интегралов в конечном виде очень большого значения, естественно, не имеет. По этой причине мы ограничимся по возможности кратким ее исследованием. Основной факт, который будет установлен в этом параграфе, заключается в том, что *интеграл $\int f(x)dx$ от любой рациональной функции выражается «в конечном виде».* Для обоснования этого факта нам потребуются некоторые сведения из алгебры.

2. Необходимые сведения из алгебры

Рассмотрим многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ от z

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{9.8}$$

с числовыми коэффициентами, причем $a_0 \neq 0$. Согласно так называемой *основной теореме алгебры комплексных чисел* существует по меньшей мере один (вообще говоря, комплексный) корень уравнения $Q(z) = 0$. Обозначая его через z_1 и применяя теорему Безу[2], заключаем, что многочлен $Q(z)$ делится без остатка на разность $z - z_1$, т. е. $Q(z) = (z - z_1)Q_1(z)$, где $Q_1(z)$ — многочлен степени $(n-1)$ от z. Если $n - 1 \geqslant 1$, то к многочлену $Q_1(z)$ можно применить те же рассуждения. Продолжая этот процесс, приходим к выводу, что многочлен $Q(z)$ разлагается над полем $\mathbb{C}$ на линейные множители

$$Q(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)\,, \tag{9.9}$$

где z_1, z_2, … z_n — корни многочлена $Q(z)$, причем каждый корень записан столько раз, какова его кратность. Разложение (9.9) — единственное с точностью до порядка следования множителей. Желая представить разложение (9.9) в удобной для дальнейших приложений форме, обозначим через z_1, z_2, …, z_m — все попарно

[2] *Безу* Этьен (1730—1783) — французский математик. Теорема Безу: *остаток от деления многочлена $Q(z)$ на разность $(z-a)$ равен $Q(a)$.*

различные[3] корни многочлена $Q(z)$. Тогда, собирая в (9.9) одинаковые множители, приведем $Q(z)$ к виду

$$Q(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}, \tag{9.10}$$

где $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Натуральные числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ называются *кратностями* корней $z_1, z_2, \dots, z_m$ соответственно. В случае $m = n$ многочлен $Q(z)$ имеет n попарно различных корней, кратности всех этих корней равны 1, и разложения (9.9), (9.10) ничем не различаются. В другом крайнем случае все корни многочлена $Q(z)$ между собой равны, т. е. $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, и разложение (9.10) приобретает вид $Q(z) = a_0 \cdot (z - z_1)^n$.

Предположим теперь, что все коэффициенты многочлена (9.8) — вещественные числа. Будем искать его разложение над полем $\mathbb{R}$ на *неприводимые множители*. Разложение *над полем* $\mathbb{R}$ означает, что коэффициенты всех множителей должны быть вещественными. *Неприводимость* множителей означает, что они не допускают дальнейшего разложения над $\mathbb{R}$. В случае, когда все корни многочлена $Q(z)$ — вещественные, искомое разложение совпадает с (9.10). Предположим, что многочлен $Q(z)$ имеет комплексные корни. Так как все коэффициенты многочлена $Q(z)$ — вещественные, то имеем $Q(z) = 0 \iff Q(\overline{z}) = 0$, т. е. что комплексные корни входят в множество всех корней *сопряженными парами*. Учитывая это, разобьем множество всех попарно различных корней многочлена $Q(z)$ на три подмножества следующим образом.

1°. *Вещественные корни $x_1, \dots, x_r$, с кратностями $k_1, \dots, k_r$ соответственно.*

2°. *Комплексные корни $z_1, \dots, z_s$, лежащие в верхней полуплоскости, с кратностями $l_1, \dots, l_s$ соответственно.*

3°. *Комплексные корни $\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_s$, лежащие в нижней полуплоскости, с кратностями $l_1, \dots, l_s$ соответственно.*

В этих обозначениях разложение (9.10) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(x) = a_0 \cdot (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \times& \\ \times (x - z_1)^{l_1} \dots (x - z_s)^{l_s} (z - \overline{z}_1)^{l_1} \dots (x - \overline{z}_s)^{l_s}&, \end{aligned} \tag{9.11}$$

где $(k_1 + \dots + k_r) + 2(l_1 + \dots + l_s) = n$. Перемножив в (9.11) биномы $(x - z_\nu)$ и $(x - \overline{z}_\nu)$, получим один множитель с вещественными коэффициентами

$$(x - z_\nu)(x - \overline{z}_\nu) = x^2 + p_\nu x + q_\nu, \ \nu = 1, \dots, l,$$

где обозначено

$$p_\nu := -2 \operatorname{Re} z_\nu \ ; \quad q_\nu = |z_\nu|^2 .$$

[3]Слова «попарно различные» здесь и в дальнейшем означают, что никакие два из перечисленных элементов не равны между собой.

Таким образом, из (9.11) получается следующее разложение многочлена $Q(z)$ над полем $\mathbb{R}$ на неприводимые (линейные и квадратичные) множители:

$$Q(x) = a_0 \cdot (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s} . \qquad (9.12)$$

Напомним, что *рациональной дробью* (или *дробной рациональной функцией*) над числовым полем $\mathbb{P}$ называется любая функция $R(z)$, представимая в виде отношения двух многочленов

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (9.13)$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$. *Рациональная дробь $R(z)$ называется правильной (неправильной), если в ее представлении в виде* (9.13) *степень числителя меньше (не меньше) степени знаменателя.* Если дробь (9.13) неправильная, то, производя деление числителя на знаменатель, заключаем, что существуют единственные многочлены $q(z)$ (частное) и $r(z)$ (остаток), такие, что $P(z) = q(z)Q(z) + r(z)$, причем степень многочлена $r(z)$ меньше, чем степень многочлена $Q(z)$, Таким образом, *неправильную рациональную дробь можно однозначно представить в виде суммы*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)} , \qquad (9.14)$$

где $q(z)$, $r(z)$ — многочлены, а дробь $\dfrac{r(z)}{Q(z)}$ — правильная.

Теорема 4. *Правильная рациональная дробь $\dfrac{r(z)}{Q(z)}$, знаменатель которой представлен в виде произведения попарно взаимно простых множителей $Q(z) = Q_1(z) \cdot Q_2(z) \cdot \dots$, однозначно представима в виде суммы правильных рациональных дробей*

$$\frac{r(z)}{Q(z)} = \frac{r_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{r_2(z)}{Q_2(z)} + \dots . \qquad (9.15)$$

◀ Сначала рассмотрим случай, когда знаменатель разложен на произведение *двух* взаимно простых множителей

$$Q(z) = Q_1(z) \cdot Q_2(z) .$$

В этом случае правая часть равенства (9.15) сводится к сумме двух слагаемых

$$\frac{r(z)}{Q(z)} = \frac{r_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{r_2(z)}{Q_2(z)} . \qquad (9.16)$$

Это равенство представляет собой уравнение, из которого должны быть найдены многочлены $r_1(z)$ и $r_2(z)$. Введем в рассмотрение натуральные числа n, p, q — степени многочленов $Q(z)$, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ соответственно. Очевидно, что $n = p + q$. Так как в (9.16) все дроби — правильные, то степени многочленов $r_1(z)$ и $r_2(z)$

не превосходят соответственно чисел $(p-1)$ и $(q-1)$. Достаточно найти коэффициенты многочленов $r_1(z)$ и $r_2(z)$. Их будем искать *методом неопределенных коэффициентов.* Общее число неопределенных коэффициентов равно $p+q=n$. Для их нахождения составим систему линейных уравнений. С этой целью, умножив равенство (9.16) на знаменатель, получим

$$r(z) = Q_2(z)\cdot r_1(z) + Q_1(z)\cdot r_2(z)\,. \tag{9.17}$$

Получилось равенство многочленов, степени которых не превосходят $(n-1)$. Приравнивая в (9.17) коэффициенты при одинаковых степенях переменного z (т. е. при $z^0, z^1, z^2, \dots, z^{n-1}$), получим систему n линейных уравнений с n неизвестными коэффициентами многочленов $r_1(z)$ и $r_2(z)$. Решая ее, находим искомые коэффициенты. Покажем, что *полученная система имеет единственное решение (т. е. ее определитель отличен от нуля).* Для этого достаточно убедиться в том, что соответствующая *однородная система* имеет только нулевое решение[4]. Однородная система равносильна уравнению (9.17) с $r(z)\equiv 0$, т. е. уравнению

$$0 = Q_2(z)\cdot r_1(z) + Q_1(z)\cdot r_2(z)\,. \tag{9.18}$$

Надо показать, что из (9.18) следует, что $r_1(z)\equiv r_2(z)\equiv 0$. Предположим, что $r_1(z)\not\equiv 0$. Так как дробь $\dfrac{r_1(z)}{Q_1(z)}$ — правильная, то число корней ее числителя меньше, чем число корней знаменателя (кратности учитываются). Поэтому существует точка $\widetilde{z}\in\mathbb{C}$, такая, что $Q_1(\widetilde{z})=0$ и $\lim\limits_{z\to\tilde{z}}\dfrac{r_1(z)}{Q_1(z)}=\infty$. Так как $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ взаимно просты, то $Q_2(\tilde{z})\neq 0$. Деля равенство (9.18) на $Q(z)=Q_1(z)\cdot Q_2(z)$ и переходя в полученном равенстве к пределу при $z\to\widetilde{z}$, получим противоречие

$$0 = \lim_{z\to\tilde{z}}\left[\frac{r_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{r_2(z)}{Q_2(z)}\right] = \infty\,.$$

Таким образом, $r_1(z)\equiv r_2(z)\equiv 0$, т. е. *однородная система имеет только нулевое решение.*

Итак, доказано, что уравнение (9.16) имеет единственное решение. Разлагая $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ на произведение взаимно простых множителей и применяя уже доказанную часть теоремы, можно получить общее разложение (9.15). ▶

Замечание. Если, в частности,

$$Q(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)\,, \tag{9.19}$$

[4]Здесь используется следующая, известная из линейной алгебры, альтернатива: *либо неоднородная система линейных уравнений имеет единственное решение при любой правой части, либо соответствующая ей однородная система имеет ненулевые решения.*

где все z_1, z_2, ..., z_n различны, то согласно теореме 4 имеет место разложение

$$\frac{r(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \ldots + \frac{A_n}{z - z_n}, \tag{9.20}$$

где A_1, A_2, ..., A_n — постоянные коэффициенты. Для них имеем

$$A_k = \lim_{z \to z_k} \left[(z - z_k) \frac{r(z)}{Q(z)} \right], \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.21}$$

Вычисление коэффициента A_k по формуле (9.21) удобно для запоминания и в связи с этим называется иногда «правилом пальцев».

Теорема 5. *Пусть* $\dfrac{r(z)}{Q(z)}$ *— правильная рациональная дробь с коэффициентами из поля* $\mathbb{C}$, *а разложение знаменателя на линейные множители имеет вид*

$$Q(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{r(z)}{Q(z)} = \sum_{\nu=1}^{m} \left[\frac{A_{\nu 0}}{(z - z_\nu)^{k_\nu}} + \frac{A_{\nu 1}}{(z - z_\nu)^{k_\nu - 1}} + \ldots + \frac{A_{\nu, k_\nu - 1}}{z - z_\nu} \right], \tag{9.22}$$

где $A_{\nu,\mu}$ *— комплексные коэффициенты. Это разложение — единственное.*

◀ Так как все многочлены

$$(z - z_1)^{k_1}, \ (z - z_2)^{k_2}, \ \ldots, \ (z - z_m)^{k_m}$$

— попарно взаимно простые, то в силу теоремы 4 справедливо разложение

$$\frac{r(z)}{Q(z)} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{r_\nu(z)}{(z - z_\nu)^{k_\nu}}, \tag{9.23}$$

где все дроби — правильные. Записывая многочлен $r_\nu(z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки z_ν, получим

$$r_\nu(z) = A_{\nu 0} + A_{\nu 1}(z - z_\nu) + \ldots + A_{\nu,\, k_{\nu - 1}} (z - z_\nu)^{k_\nu - 1}.$$

Подставляя это в (9.23) и производя почленное деление, получим разложение (9.22). ▶

Теорема 6. *Пусть* $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь с коэффициентами из* $\mathbb{R}$, *а разложение знаменателя* $Q(x)$ *на неприводимые над полем* $\mathbb{R}$ *множители имеет вид* (9.12). *Тогда имеем такое разложение*

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{A_{\nu\mu}}{(x - x_\nu)^\mu} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\mu=1}^{l_s} \frac{B_{\nu\mu} x + C_{\nu\mu}}{(x^2 + p_\nu x + q_\nu)^\mu}, \tag{9.24}$$

где $A_{\nu\mu}$, $B_{\nu\mu}$, $C_{\nu\mu}$ *— вещественные коэффициенты. Это разложение — единственное.*

◀ Так как многочлены

$$(x-x_1)^{k_1},\ \ldots,(x-x_r)^{k_r},\ (x^2+p_1x+q_1)^{l_1},\ldots,\ (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

— попарно взаимно простые, то в силу теоремы 4 существует единственное разложение

$$\frac{r(x)}{Q(x)}=\sum_{\nu=1}^{r}\frac{r_\nu(x)}{(x-x_\nu)^{k_\nu}}+\sum_{\nu=1}^{s}\frac{s_\nu(x)}{(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{l_\nu}}\,, \tag{9.25}$$

где все дроби — правильные. Разложим многочлен $r_\nu(x)$ по степеням $(x-x_\nu)$ (т. е. по формуле Тейлора)

$$r_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{k_\nu}A_{\nu\mu}(x-x_\nu)^{k_\nu-\mu}\,. \tag{9.26}$$

Производя деление многочлена $S_\nu(x)$ на $(x^2+p_\nu x+q_\nu)$ с остатком, имеем

$$S_\nu(x)=S_{1\nu}(x)(x^2+p_\nu x+q_\nu)+(B_{\nu l_\nu}x+C_{\nu l_\nu})\,. \tag{9.27}$$

Деля затем многочлен $S_{1\nu}(x)$ на $(x^2+p_\nu x+q_\nu)$, подставляя результат в (9.27) и продолжая этот процесс, получим такое разложение

$$S_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{l_\nu}(B_{\nu\mu}x+C_{\nu\mu})(x^2+p_\nu+q_\nu)^{l_\nu-\mu}\,. \tag{9.28}$$

Подставив разложения (9.26) и (9.28) в (9.25), получим разложение (9.24). Его единственность следует из единственности разложения (9.15). Вещественность коэффициентов разложения (9.24) следует из единственности. ▶

Отметим, что коэффициенты $A_{\nu\mu}$, $B_{\nu\mu}$, $C_{\nu\mu}$ разложения (9.24) можно найти, применяя непосредственно к нему метод неопределенных коэффициентов. Например,

$$\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим

$$x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)\,.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях переменного x, найдем

$$\begin{array}{r|l} x^0 & 1=A-C\,; \\ x^1 & 0=A-B+C\,; \\ x^2 & 1=A+B\,. \end{array}$$

Решая эту систему, получим $A=\dfrac{2}{3}$, $B=\dfrac{1}{3}$, $C=-\dfrac{1}{3}$. Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}\,.$$

3. Интегрирование рациональных функций

Теорема 7. *Интеграл от любой рациональной функции выражается через элементарные функции.*

◀ Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная над полем $\mathbb{R}$ функция. Деля числитель на знаменатель, получим равенство (9.14)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}\,,$$

где $q(x)$ — многочлен от x, а дробь $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная.

Используя, далее, разложения (9.24), имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} = \\ = \int q(x)dx + \sum_{\nu}\sum_{\mu} A_{\nu\mu}\int \frac{dx}{(x-x_\nu)^\mu} + \\ + \sum_{\nu}\sum_{\mu}\int \frac{B_{\nu\mu}x + C_{\nu\mu}}{(x^2+p_\nu+q_\nu)^\mu}dx\,. \qquad (9.29)\end{aligned}$$

Интеграл от многочлена $q(x)$, как было показано в § 1, выражается в конечном виде. Далее

$$\int \frac{dx}{x-x_\nu} = \ln|x-x_\nu| + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{(x-x_\nu)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}(x-x_\mu)^{1-\mu} + C \quad \text{при} \quad \mu > 1\,.$$

Таким образом, интегралы, входящие в первую сумму правой части равенства (9.29), выражаются в конечном виде. Далее

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\dfrac{B}{2}(2x+p) + \left(C - \dfrac{B}{2}p\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(C - \frac{B}{2}p\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{(2C-Bp)}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C\,.$$

При $\mu > 1$ имеем

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+(C-\frac{Bp}{2})}{(x^2+px+q)^\mu}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{(2C-Bp)}{2}\int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^\mu} =$$

$$= \frac{B}{2(1-\mu)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \frac{2C-Bp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\mu}\,,$$

где положено $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Осталось только вычислить интеграл

$$I_\mu = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\mu} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^\mu}dt = \frac{1}{a^2}I_{\mu-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^\mu}\,.$$

К последнему интегралу применяем метод интегрирования по частям, полагая

$$\left[\begin{array}{c|c} u = t & du = dt \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^\mu} & v = \int \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^\mu} = \dfrac{1}{2(1-\mu)}(t^2+a^2)^{1-\mu} \end{array}\right].$$

Тогда получим равенство

$$I_\mu = \frac{1}{a^2}I_{\mu-1} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(1-\mu)}(t^2+a^2)^{1-\mu} - \frac{1}{2(1-\mu)}I_{\mu-1}\right),$$

равносильное следующему

$$I_\mu = \frac{t(t^2+a^2)^{1-\mu}}{2a^2(\mu-1)} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(\mu-1)}\right) I_{\mu-1}\,.$$

Получена *рекуррентная формула*, дающая явное выражение I_μ через $I_{\mu-1}$. Поскольку выражение для I_1 известно, то рекуррентная формула позволяет вычислить I_2, затем I_3 и вообще I_μ для любого натурального μ. Итак, все интегралы правой части равенства (9.29) выражаются в конечном виде. ▶

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+1}{x^3-1}dx$.

◀ Используя разложение (9.24), имеем:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-1}dx = \int \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,. \ ▶$$

2) Вычислить интеграл

$$\int\frac{dx}{(x+1)^3(x^2-x+1)^2}\,.$$

◀ Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)^2} =$$

$$= \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{B_2x+C_2}{x^2-x+1}\,,$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, C_1, B_2, C_2$ – неопределенные коэффициенты. Для их вычисления приведем дроби к общему знаменателю и отбросим его

$$1 = \left[A_1 + A_2(x+1) + A_3(x+1)^2\right](x^2-x+1)^2 + (B_1x+C_1)(x+1)^3 +$$
$$+ (B_2x+C_2)(x^2-x+1)(x+1)^3\,.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях переменного x, получим систему семи линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов. Дальнейшие вычисления оставляем читателю. ▶

4. Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла

Вычисление интеграла $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ от рациональной функции, вообще говоря, усложняется при увеличении кратностей k_ν, l_μ множителей, входящих в разложение (9.24) знаменателя $Q(x)$. Замечено, что результат вычисления интеграла от любой рациональной функции можно представить в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = R(x) + \sum_k \lambda_k \ln |R_k(x)| + \sum_j \mu_j \operatorname{arctg} r_j(x)\,, \qquad (9.30)$$

где λ_k, μ_j — вещественные коэффициенты, а $R(x), R_k(x), r_j(x)$ — некоторые рациональные функции. Входящая в правую часть равенства (9.30) функция $R(x)$ называется *рациональной частью* интеграла $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, а сумма всех остальных слагаемых — *трансцендентной частью* этого интеграла. М. В. Остроградский[5] предложил метод, позволяющий предварительно находить рациональную часть интеграла и тем самым упрощать его вычисление. Изложим кратко суть этого метода.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int \dfrac{r(x)}{Q(x)}dx$ от правильной рациональной дроби $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой представлен в виде произведения (9.24). Метод Остроградского дает эффект, когда *не все* показатели k_μ, l_μ равны единице. Положим

$$\begin{gathered} L(x) = a_0(x-x_1)^{k_1-1}\ldots(x-x_r)^{k_r-1}\times \\ \times\,(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}\,, \\ K(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s)\,. \quad (9.31) \end{gathered}$$

Очевидно, что $Q(x) \equiv L(x)\cdot K(x)$. Следуя М. В. Остроградскому,

[5] *Остроградский* Михаил Васильевич (1801—1861) — знаменитый украинский математик.

будем искать представление данного интеграла в виде

$$\int \frac{r(x)}{Q(x)}dx = \frac{M(x)}{L(x)} + \int \frac{N(x)}{K(x)}dx\,, \tag{9.32}$$

где $\dfrac{M(x)}{L(x)}$ и $\dfrac{N(x)}{K(x)}$ — правильные рациональные дроби, а многочлены $L(x)$, $K(x)$ — из (9.31). Коэффициенты многочленов $M(x)$ и $N(x)$ находятся *методом неопределенных коэффициентов.* С этой целью вычислим производные от обеих частей равенства (9.32)

$$\frac{r(x)}{L(x)K(x)} = \frac{M'(x)L(x) - L'(x)M(x)}{(L(x))^2} + \frac{N(x)}{K(x)}\,.$$

Умножая это равенство на $L(x)K(x)$, найдем

$$r(x) = K(x)M^{'}(x) - \frac{L^{'}(x)}{L(x)}K(x)M(x) + L(x)N(x)\,. \tag{9.33}$$

Из представлений (9.31) следует, что функция $\dfrac{L'(x)}{L(x)}K(x)$ — многочлен. Таким образом, (9.33) — равенство многочленов. Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях переменного x, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов $M(x)$ и $N(x)$. Покажем, что *эта система имеет единственное решение.*

◀ Для этого достаточно убедиться в том, что соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Однородная система возникает из уравнения (9.33), в котором надо положить $r(x) \equiv 0$, т. е. из уравнения

$$0 = \frac{M'(x)L(x) - L'(x)M(x)}{(L(x))^2} + \frac{N(x)}{K(x)}\,.$$

Перепишем его в следующем равносильном виде

$$\frac{N(x)}{K(x)} + \frac{d}{dx}\frac{M(x)}{L(x)} = 0\,.$$

Так как дробь $\dfrac{M(x)}{L(x)}$ — правильная, то число корней многочлена L больше, чем число корней многочлена M. Значит, существует точка $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, такая, что $\lim\limits_{z\to\tilde{z}} \dfrac{M(z)}{L(z)} = \infty$. Так как $K(x)$ имеет в точке $\tilde{z}$ нуль кратности 1, то $\lim\limits_{z\to\tilde{z}} \dfrac{(z-\tilde{z})N(z)}{K(z)} \in \mathbb{C}$. Далее имеем

$$\frac{M(z)}{L(z)} = f(z)(z-\tilde{z})^{-k}, \text{ где } f(\tilde{z}) \neq 0,\ k \in \mathbb{N}\,,$$

откуда

$$\lim_{z\to\tilde{z}}(z-\tilde{z})\frac{d}{dz}\frac{M(z)}{L(z)} = \lim_{z\to\tilde{z}}(z-\tilde{z})\left[f'(z)(z-\tilde{z})^{-k} - kf(z)(z-\tilde{z})^{-k-1}\right] =$$

$$= \lim_{z\to\tilde{z}} \frac{f'(z)(z-\tilde{z}) - k\cdot f(z)}{(z-\tilde{z})^k} = \infty\,.$$

Таким образом, имеем

$$\infty = \lim_{z\to\tilde{z}}(z-\tilde{z})\left[\frac{N(z)}{K(z)} + \frac{d}{dz}\frac{M(z)}{L(z)}\right] = 0\,,$$

т. е. $\infty = 0$ — противоречие. ▶

Итак, система линейных уравнений имеет единственное решение. Решая ее, можно найти коэффициенты многочленов $M(x)$ и $N(x)$, входящих в правую часть равенства (9.32). Тем самым дело сводится к вычислению интеграла $\int \dfrac{N(x)}{K(x)}dx$, который проще исходного.

Пример. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{(x^3-1)^2}$.

◀ Применяем метод Остроградского. Равенство (9.32) в данном случае можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}dx\,.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}\,.$$

Отсюда

$$1 = (2Ax + B)(x^3 - 1) + 3x^2(Ax^2 + Bx + C) + (Ex^2 + Fx + G)(x^3 - 1)\,.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях переменного x и решая полученную систему линейных уравнений, находим

$$A = F = E = C = 0\,, \quad B = \frac{1}{3}\,, \quad G = -\frac{4}{3}\,.$$

Таким образом, имеем

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{x}{3(x^2-1)} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}\,. \tag{9.34}$$

Далее

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{\tilde{A}}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}\,.$$

Умножая это равенство на (x^3-1), получим

$$1 = \tilde{A}(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)\,.$$

Отсюда $\tilde{A} = \dfrac{1}{3}$, а для нахождения M и N составим систему

$$\begin{cases} 1 = \tilde{A} - N\,, \\ 0 = \tilde{A} + N - M\,. \end{cases}$$

Решив ее, получим $N = -\dfrac{2}{3}\,,\ M = \dfrac{1}{3}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx = \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-5}{(x^2+x+1)}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \\ &\quad - \frac{5}{6}\int \frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \\ &\quad + \frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}} + C\,. \end{aligned}$$

Подставляя найденное значение интеграла в правую часть (9.34), получим выражение для исходного интеграла. ▶

§ 4. Вычисление некоторых типов интегралов, сводящихся к интегралам от рациональных функций.

Здесь будут рассмотрены некоторые типы интегралов, которые с помощью тех или иных подстановок сводятся к интегралам от рациональных функций (или, как иногда говорят, *рационализируются*).

1. Интегрирование функций, рационально зависящих от $\sin$ и $\cos$

Теорема 8. *Интегралы вида*

$$\int R(\sin x\,,\,\cos x)dx\,, \tag{9.35}$$

где $w = R(u, v)$ — рациональная функция от переменных u, v, выражаются в конечном виде.

◀ Произведем в интеграле (9.35) замену

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,, \quad x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi\,, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,.$$

Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через t

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}\,, \tag{9.36}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,. \tag{9.37}$$

Подставляя найденные выражения для $\sin x$, $\cos x$, dx через t в (9.35), получим

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\,;\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int r(t)dt\,, \tag{9.38}$$

где функция $r(t)$ — рациональная как произведение композиции рациональных функций на рациональную функцию $\dfrac{2}{1+t^2}$. Применяя к интегралу $\int r(x)dt$ теорему 7, мы на основании равенства (9.38) заключаем, что интеграл (9.35) выражается в конечном виде. ▶

Подстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, с помощью которой рационализируются интегралы вида (9.35), называется *универсальной*. Рассмотрим **примеры** на применение универсальной подстановки.

1) Вычислить интегралы $\int \dfrac{dx}{\sin x}$ и $\int \dfrac{dx}{\cos x}$.

◀ Полагая $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{(1+t^2)}{2t} \frac{2dt}{(1+t^2)} = \\ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

Используя полученный результат, вычислим второй интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C\,.$$ ▶

2) Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{3+\cos x}$.

◀ Полагая $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, имеем

$$\int \frac{dx}{3+\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + C\,.$$ ▶

Следует отметить, что универсальная подстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, хотя и рационализирует любой интеграл типа (9.35), часто приводит к громоздким вычислениям. Чтобы упростить подобные вычисления, в некоторых частных случаях применяют другие подстановки, которые ведут к менее громоздким вычислениям. Например, интеграл

$$\int R_1(\operatorname{tg} x)dx\,, \tag{9.39}$$

где $R_1(\cdot)$ — рациональная функция, рационализируется с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg} x\,, \quad x = \operatorname{arctg} t + k\pi\,, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Эта же подстановка рационализирует интеграл

$$\int R_2(\sin^2 x,\ \cos^2 x)dx\,,$$

где $w = R_2(u,v)$ — рациональная функция, так как

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}\,,\quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\,,\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

◀ После замены

$$t = \operatorname{tg} x\,,\ x = \operatorname{arctg} t\,,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

получим

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= t - \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \operatorname{tg} x - x + C\,. \ \blacktriangleright$$

И наконец, интегралы вида

$$\int R_3(\sin x)\cdot\cos x\cdot dx \quad \text{и} \quad \int R_4(\cos x)\cdot\sin x\cdot dx\,,$$

где $R_3(\cdot)$ и $R_4(\cdot)$ — рациональные функции, рационализируются соответственно подстановками $t=\sin x$ и $t=\cos x$.

2. Интегрирование некоторых алгебраических функций

Определение 4. *Непрерывная функция $y = y(x)$ называется алгебраической, если она удовлетворяет алгебраическому уравнению*

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0\,,$$

все коэффициенты которого $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ — рациональные функции. Функции, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными.

Примерами алгебраических функций являются рациональные функции, а также подынтегральные функции интегралов, рассматриваемых в этом пункте.

Теорема 9. *Интегралы вида*

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx\,, \tag{9.40}$$

где $R(\cdot,\cdot)$ — *рациональная функция,* $n\in\mathbb{N}$, *выражаются в конечном виде.*

◀ Ограничимся только случаем

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0\,,$$

поскольку в противном случае будет $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\equiv\mathrm{const}$, и теорема становится повторением теоремы 7. Произведем в интеграле (9.40) следующую замену:

$$t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\,,\quad t^n=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\,,\quad x=\frac{\delta t^n-\beta}{-\gamma t^n+\alpha}\,,$$

$$dx=\frac{n\delta t^{n-1}(\alpha-\gamma t^n)+n\gamma t^{n-1}(\delta t^n-\beta)}{(\alpha-\gamma t^n)^2}dt=\frac{n\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}dt\,.$$

Тогда получим

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx=\int R\left(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}\,,\,t\right)\cdot\frac{n\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}dt\,,$$

где подынтегральная функция от t — рациональная. Таким образом, интеграл (9.40) рационализируется подстановкой $t=\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. ▶

Пример. Вычислить интеграл $\int(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1})dx$.

◀ Производя замену

$$\sqrt[6]{x-1} = t\,,\ x = t^6 + 1\,,\ dx = 6t^5 dt\,,$$

получим

$$\int (\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1})dx = \int (t^3 + t^2)6t^5 dt = 6\int (t^8 + t^7)dt =$$
$$= \frac{6}{9}t^9 + \frac{6}{8}t^8 + C = \frac{2}{3}(\sqrt[6]{x-1})^9 + \frac{3}{4}(\sqrt[6]{x-1})^8 + C\,. \ ▶$$

Теорема 10. *Интегралы вида*

$$\int R(x\,,\ \sqrt{ax^2 + bx + c})dx\,, \tag{9.41}$$

где $R(\cdot,\cdot)$ — рациональная функция, выражаются в конечном виде.

◀ Доказательство проведем с помощью так называемых *подстановок Эйлера*, рационализирующих интеграл (9.41).

В случае $a > 0$ можно применить *первую подстановку Эйлера*

$$t \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c},\ t^2 \pm 2tx\sqrt{a} + ax^2 = ax^2 + bx + c\,,$$

откуда $x = \dfrac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}}$, $dx = r(t)dt$, и очевидно, что интеграл (9.41) рационализируется.

В случае $c > 0$ можно применить *вторую подстановку Эйлера*

$$xt \pm \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c},\ x^2t^2 \pm 2\sqrt{c}tx + c = ax^2 + bx + c\,,$$

откуда после сокращений получим

$$x = \frac{t^2 - a}{b \pm 2c\sqrt{t}}\ ,\quad dx = r(t)dt\,,$$

и очевидно, что интеграл (9.41) рационализируется.

Если $a < 0$, $c < 0$, то $b^2 - 4ac \geqslant 0$, иначе $\forall x \in \mathbb{R}$ будет $ax^2 + bx + c < 0$, и потому область определения корня $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ будет пустой[6]. Так как $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ —

[6]Здесь мы рассматриваем интегралы от вещественнозначных функций.

вещественные. Полагая $ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$, производим *третью подстановку Эйлера*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)\,,$$

откуда $t^2 = a\dfrac{x-x_2}{x-x_1}$.

Из представления интеграла (9.41) в виде

$$\int R\left(x\,,\ (x-x_1)\sqrt{a\cdot\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right)dx$$

и из теоремы 9 заключаем, что 3-я подстановка Эйлера его рационализирует. ▶

Определение 5. *Биномиальным дифференциалом (или дифференциальным биномом) называется дифференциал вида*

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx\,,$$

где $a\neq 0\,,\ b\neq 0\,,\ n,m,p\in\mathbb{Q}$.

Теорема 11. *Если является целым хотя бы одно из следующих трех чисел:* $p\,,\ q\,,\ p+q$, *где* $q=\dfrac{m+1}{n}-1$, *то интеграл от биномиального дифференциала*

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{9.42}$$

выражается в конечном виде.

◀ Производя в интеграле (9.42) замену

$$x^n = t\,,\ x = t^{\frac{1}{n}},\ dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt\,,$$

получим

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p\cdot\frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt = \frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p dt\,.$$

Предположим сначала, что $p \in \mathbb{Z}$. Тогда интеграл (9.42) в силу теоремы 9 рационализируется подстановкой $\tau = \sqrt[\lambda]{t}$, где λ — знаменатель дроби q. Если $q \in \mathbb{Z}$, то в силу теоремы 9 интеграл (9.42) рационализируется подстановкой $\tau = \sqrt[\mu]{a+bt}$, где μ — знаменатель дроби p. Если же $(p+q) \in \mathbb{Z}$, то из равенства

$$\int t^q (a+bt)^p dt = \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

в силу теоремы 9 вытекает, что интеграл (9.42) рационализируется подстановкой $\tau = \sqrt[\mu]{\dfrac{a+bt}{t}}$, где μ — знаменатель дроби p. ▶

Замечание. Возникает естественный вопрос: существуют ли другие условия, при выполнении которых интеграл (9.42) выражается в элементарных функциях? Оказывается, не существуют: П.Л.Чебышёв[7] доказал, что *если ни одно из чисел* p, q, $p+q$ *не является целым, то интеграл* (9.42) *не выражается в конечном виде.*

Задачи к главе 9

9.1. Доказать, что любая функция, первообразная к функции $f(x) \equiv 0$, заданной на промежутке, тождественно равна постоянной.

9.2. Доказать, что сужение функции sign на промежуток вида $(-a\,,\, a)$ не имеет первообразной.

9.3. Доказать, что функция $f(x) := \begin{cases} 1/x\,, & x \neq 0, \\ 0\,, & x = 0, \end{cases}$ на интервалах вида $(-a,\, a)$ не имеет первообразной.

9.4. Обобщить «правило пальцев» (т. е. вычисление неопределенных коэффициентов по формуле (9.21)) на случай, когда многочлен Q имеет кратные корни.

[7] *Чебышёв* Пафнутий Львович (1821—1894) — знаменитый русский математик.

9.5. Предполагая, что α, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, вычислить следующие интегралы от комплекснозначных функций:

$$\text{a)} \int \frac{dx}{x-\alpha-i\beta}\,; \quad \text{b)} \int \frac{dx}{(x-\alpha-i\beta)^k}\,, \quad k>1\,.$$

9.6. Используя результат предыдущей задачи и разложение

$$Q(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m}$$

над полем $\mathbb{C}$, доказать, что интеграл от рациональной дроби $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ выражается в элементарных функциях.

9.7. Пусть $w = R(u\,,\,v)$ — рациональная функция, а основной период функции $y = R(\cos x\,,\,\sin x)$ равен π. Доказать, что интеграл $\int R(\cos x\,,\,\sin x)\,dx$ рационализируется подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

9.8. Пусть $w = R(u\,,\,v)$ — рациональная функция. Допуская комплекснозначные функции в качестве подынтегральных функций, показать, что интеграл

$$\int R\left(x\,,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$

рационализируется с помощью лишь одной (например, третьей) подстановки Эйлера.

9.9. Пусть F — первообразная на $\mathbb{R}$ для f. Доказать следующие утверждения:

a) если функция f — нечетная, то функция F — четная;

b) если функция f — четная, то функция $F(\cdot)-F(0)$ — нечетная;

c) если функция f — периодическая с периодом T, и $F(0) = F(T)$, то функция F — периодическая с периодом T.

9.10. Пусть функции $F\,:\,(a\,,\,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ и $f\,:\,(a\,,\,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ непрерывны в точке $c\in(a\,,\,b)$, а F является первообразной для f на интервалах $(a\,,\,c)$ и $(c\,,\,b)$. Показать, что F является первообразной для f и на интервале $(a\,,\,b)$.

9.11. Вывести рекуррентные формулы для вычисления интегралов

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sin^n x}\,.$$

9.12. Вычислить неопределенные интегралы от следующих функций:

a) $\cos^3 x \sin\beta x$;

b) $(2x+3)^2\,(1-x)^8$;

c) $\dfrac{1}{\sin 3x}$;

d) $\dfrac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3}$;

e) $\dfrac{x+\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

f) $x\sin^3 x$

g) $\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$;

h) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$;

i) $\cos^2 \ln x$;

j) $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

k) $x\arccos\dfrac{1}{x}$;

l) $\sqrt{2-x^2}$;

m) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}$;

n) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos x}$;

o) $\sin^4 x\cos^2 x$;

p) $x^2\sqrt{x^2+a^2}$;

q) $x^2\sqrt{x^2-a^2}$;

r) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$;

s) $\dfrac{x^4}{(x^2+a^2)^2}$;

t) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$;

u) $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$;

v) $\dfrac{\ln x+2}{x\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}}$;

w) $5^{\sqrt{x}}$;

x) $x\cos\sqrt{x}$;

y) $\dfrac{2x-5}{x^2+x+3}$;

z) $\dfrac{e^{2x}+e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}+2e^x+4}}$;

a′) $|\cos x|$;

b′) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{4x^{-}10x+7}}$;

c′) $\arccos x$;

d′) $\cos x\sqrt{\cos 2x}$;

e′) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$;

f′) $\dfrac{1}{x^4+1}$;

g′) $\dfrac{x-1}{(x^2+x+1)^2}$;

h′) $\dfrac{x^2+1}{x^4+5x^2+1}$;

i′) $\dfrac{x^{11}}{(x^6+1)^3}$;

j′) $\dfrac{1}{\sin x+2\cos x+6}$.

k′) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}$;

l′) $\dfrac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

m′) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg} x}$;

n′) $\operatorname{arctg} x$;

o′) $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

p′) $\dfrac{x-1}{(x^2+1)\sqrt{3-x^2}}$;

q′) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$;

r′) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$;

s′) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^7}}$;

t′) $\dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2}$;

u′) $x\,|2 - x|$;

v′) $\min\left\{\sqrt{x}\,;\ 2\right\}$;

w′) $\max\left\{9 - x^2\,;\ 3\right\}$;

x′) $\cos x + |\cos x|$;

y′) $\dfrac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)^{-1}}{\sqrt{\sin x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x}}$;

z′) $|x|e^x$.

Глава 10
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§ 1. Понятие определенного интеграла

1. Некоторые прикладные задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

К понятию определенного интеграла приводят многочисленные задачи геометрии, физики и других наук. Решение задач такого типа основано на определении искомых величин с помощью специального предельного перехода. Здесь рассмотрим кратко схему решения нескольких типичных задач такого рода.

1°. **Задача о площади криволинейной трапеции.** Пусть требуется дать определение и вычислить площадь плоской фигуры

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b\,,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}\,, \tag{10.1}$$

где $\mathbb{R}^2$ — координатная плоскость, а $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная функция. Такие фигуры называются *криволинейными трапециями* (рис. 2).

Площадь фигуры $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $S(A)$. Это понятие будем пытаться определить так, чтобы оставались справедливыми следующие (основные) свойства площади:

неотрицательность, т. е. $S(A) \geqslant 0$,

аддитивность, т. е. $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$,

монотонность, т. е. $A \subset B \Longrightarrow S(A) \leqslant S(B)$,

а также учитывая, что *площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.*

Чтобы дать определение величины $S(T)$, т. е. площади криволинейной трапеции T, произведем следующие построения (рис. 4). Возьмем последовательность из $(n + 1)$ точек $(x_0\,,\, x_1\,,\, \ldots\,,\, x_{n-1}\,,\, x_n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

а в остальном произвольных. Это называется *«произвести разбиение отрезка* $[a\,,\,b]$ *точками* $x_0\,, x_1\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$». Обозначим $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$. Параметр

$$\lambda := \max\{\Delta x_0\,, \Delta x_1\,, \ldots\,, \Delta x_{n-1}\}$$

характеризует «мелкость» взятого разбиения. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ выберем произвольно точку $\xi_k \in [x_k\,, x_{k+1}]$. Произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ равно площади прямоугольника с основанием $[x_k\,, x_{k+1}]$ длины Δx_k и высотой, равной $f(\xi_k)$. Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ равна площади «ступенчатой фигуры», изображенной на рис. 4, и при некоторых условиях ее можно считать приближенным значением искомой площади $S(T)$. За площадь криволинейной трапеции естественно принять предел

$$S(T) := \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k\,, \tag{10.2}$$

т. е. предел площадей ступенчатых фигур при условии, что разбиение отрезка $[a\,,\,b]$ неограниченно измельчается.

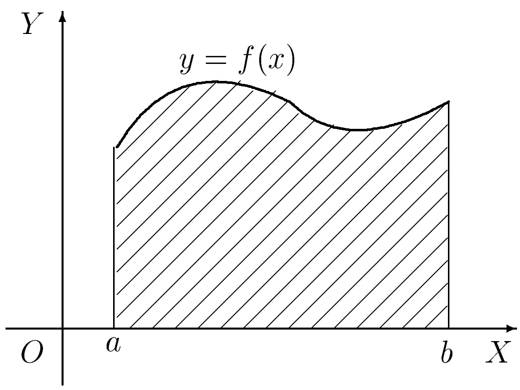

Рис. 2. Криволинейная трапеция

2°. **Задача о работе переменной силы на криволинейном участке пути.** Напомним известный из физики факт, что работа (постоянного) вектора силы $\boldsymbol{F}$ на прямолинейном участке пути $\boldsymbol{s}$ равна $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ (т. е. скалярному произведению векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{s}$). Предположим теперь, что на ориентированной кривой $L = AB$ (рис. 3) задана переменная сила, т. е. вектор-функция $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P)$, $P \in L$. Требуется определить и вычислить работу силы $\boldsymbol{F}(P)$ на пути L. С этой целью произведем разбиение кривой L точками

$$A = P_0\,, P_1\,, P_2\,, \ldots\,, P_{n-1}\,, P_n = B\,,$$

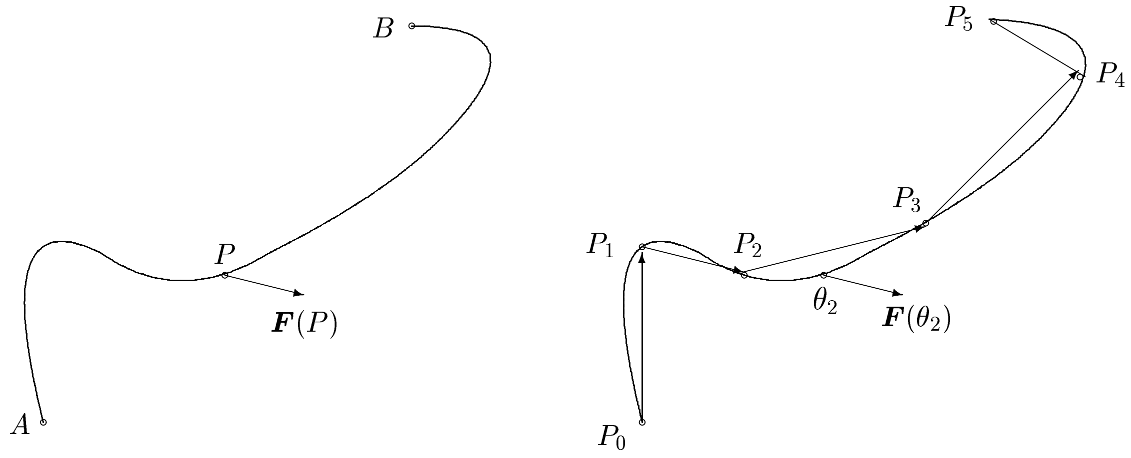

Рис. 3. К определению понятия работы

расположенными в порядке обхода кривой от точки A к точке B. Обозначим $\Delta \boldsymbol{s}_k = \overrightarrow{P_k P_{k+1}}$, и пусть

$$\lambda = \max\{|\Delta \boldsymbol{s}_0|\,,\ |\Delta \boldsymbol{s}_1|\,,\ \ldots\,,\ |\Delta \boldsymbol{s}_{n-1}|\}\,.$$

На кривой выберем произвольно последовательность точек $(\theta_0\,,\ \theta_1\,,\ \ldots\,,\ \theta_{n-1})$ так, чтобы было $\theta_k \in [P_k\,,\ P_{k+1}]$ при каждом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (рис. 3). За работу силы $\boldsymbol{F}(P)$ на кривой L по определению принимается предел

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\theta_k)\cdot \Delta \boldsymbol{s}_k\,. \tag{10.3}$$

При некоторых ограничениях на кривую L и функцию $\boldsymbol{F}$ этот предел существует.

3°. **Задача о массе неоднородного стержня.** Пусть теперь кривая $L = AB$ является изображением *криволинейного стержня*. Предположим, что стержень является *неоднородным*, т. е. что его линейная плотность ρ задается с помощью положительной функции $\rho = \rho(P)$, $P \in L$. Требуется определить и вычислить массу данного стержня. Воспользуемся тем, что масса прямолинейного и однородного стержня равна произведению его длины и плотности. Применяя разбиение, показанное на рис. 3, можно аналогично предыдущему заключить, что при некоторых ограничениях за искомую массу естественно принять предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\rho(\theta_k)\cdot\Delta s_k\,, \tag{10.4}$$

где $\Delta s_k = |\overrightarrow{P_kP}_{k+1}|$.

4°. **Задача о длине пути, пройденном материальной точкой.** Предположим, что закон движения материальной точки задан с помощью вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)\,,\ t\in[0\,,\,T]$. Требуется найти длину пути, пройденного материальной точкой за весь промежуток времени $[0\,,\,T]$. Если бы движение было равномерным и прямолинейным, то длина пройденного пути была бы равна произведению модуля скорости на длину промежутка времени. Для решения задачи в общем случае берем разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T\,,$$

и пусть $\lambda = \max\{\Delta t_0\,,\,\Delta t_1\,,\ldots,\,\Delta t_{n-1}\}$. Выбирая произвольно точки $\theta_k\in[t_k\,,\,t_{k+1}]$, будем приближенно считать, что на отрезке $[t_k\,,\,t_{k+1}]$ движение точки является равномерным и прямолинейным, а его скорость равна $\boldsymbol{r}'(\theta_k)$. Тем самым длину пути, пройденного точкой за промежуток времени $[t_k\,,\,t_{k+1}]$, мы считаем приблизительно равной $|\boldsymbol{r}'(\theta_k)|\cdot\Delta t_k$. За точное значение пройденного пути принимается предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}|\boldsymbol{r}'(\theta_k)|\cdot\Delta t_k\,. \tag{10.5}$$

Общим в рассмотренных задачах является то, что их решения находятся в виде пределов сумм, входящих в (10.2) — (10.5), построенных по одному и тому же принципу. В основе построения этих сумм лежит одна и та же идея, состоящая в том, что на малых участках изменения аргумента можно приближенно считать постоянной заданную функцию, а также вера в то, что пределы (10.2) — (10.5), если их корректно определить, существуют. Исследование условий существования пределов таких сумм, а также способов их вычисления составляет содержание теории определенного интеграла в смысле Б. Римана[1].

2. Понятие определенного интеграла

Определение 6. *Разбиением отрезка* $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ *называется последовательность*

$$T = (x_0\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\ldots,\,x_{n-1}\,,\,x_n)\,,$$

состоящая из $(n+1)$ *точек, удовлетворяющих неравенствам*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Отрезки

$$\Delta_1 := [x_0\,,\,x_1]\,,\ \Delta_2 := [x_1\,,\,x_2]\,,\ \ldots\,,\ \Delta_n := [x_{n-1}\,,\,x_n]$$

называются *отрезками разбиения.* Обозначая через Δx_k длину отрезка Δ_k, вводят число

$$\lambda = \lambda(T) := \max\{\Delta x_0\,,\,\Delta x_1\,,\ldots,\,\Delta x_{n-1}\}\,,$$

называемое *параметром* или *диаметром* или *мелкостью* разбиения T.

Определение 7. *Разбиением с отмеченными точками называется пара* $(T\,,\,\xi)$, *где* $T = (x_0\,,\,x_1\,,\ldots,\,x_{n-1}\,,\,x_n)$ *— разбиение, а* $\xi = (\xi_0\,,\,\xi_1\,,\ldots\,,\,\xi_{n-1})$ *— последовательность произвольно зафиксированных точек* $\xi_k \in \Delta_k\,,\ k = 0\,,\,1\,,\ldots\,,\,n-1$.

Определение 8. *Пусть задана функция* $f\,:\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, *и пусть* (T,ξ) *— разбиение с отмеченными точками отрезка* $[a\,,\,b]$. *Сумма*

$$\sigma(f;T,\xi) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (10.6)$$

называется интегральной суммой Римана функции f, *построенной для разбиения* (T,ξ) *отрезка* $[a\,,\,b]$.

[1] *Риман* Бернгард (1826—1866) — знаменитый немецкий математик.

Определение 9. *Число J называется пределом суммы $\sigma(f;T,\xi)$ при $\lambda(T)\to 0$, если*

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall(T,\xi)\ :\ \lambda(T)\leqslant\delta\Longrightarrow|\sigma(f,T,\xi)-J|\leqslant\varepsilon\,. \qquad (10.7)$$

Определение 10. *Функция $f:[a\,,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a\,,b]$, если существует конечный предел интегральных сумм $\sigma(f;T,\xi)$ при $\lambda(T)\to 0$. Этот предел называется интегралом в пределах от a до b от функции f и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается: «интеграл от a до b от функции $f(x)$ на dx»).

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma(f;T,\xi)\,. \qquad (10.8)$$

В этом определении функция f считается комплекснозначной. Так как $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, то определение 10 содержит в себе в качестве частного случая и определение понятия интеграла от вещественнозначной функции f.

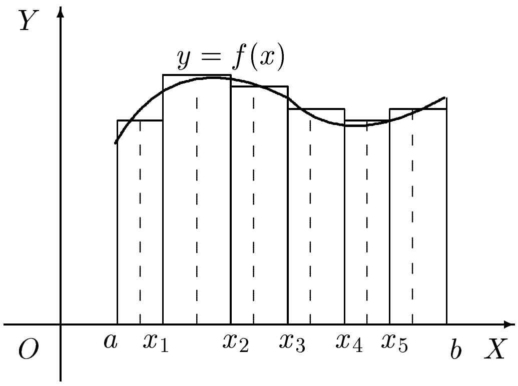

Рис. 4. К определению понятия интеграла Римана

Переходя к установлению необходимого условия интегрируемости функций, отметим следующее. При фиксированной функции $f:[a\,,b]\longrightarrow\mathbb{C}$, интегральную сумму $\sigma(f;T,\xi)$ можно рассматривать как функцию от (T,ξ), т. е. от разбиения с отмеченными точками. Так как на множестве всех разбиений (T,ξ) не была введена топология, то построение теории пределов функций в смысле определения 9 представляет некоторые трудности. Однако при надлежащем переформулировании основные факты теории пределов функций остаются справедливыми и для пределов в смысле определения 9. В тех местах, где эти факты нам потребуются, мы будем их либо доказывать, либо использовать без доказательств (если они достаточно очевидны).

Теорема 12 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция* $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a\,,\,b]$*, то она ограничена на этом отрезке.*

◀ Используем тот факт, что функция $\sigma(f;T,\xi)$, имеющая конечный предел при $\lambda(T) \to 0$, финально ограничена, т. е. из интегрируемости вытекает выполнение следующего условия:

$$\exists E \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall (T,\xi) \ : \ \lambda(T) \leqslant \delta \Longrightarrow |\sigma(f;T,\xi)| \leqslant E\,. \qquad (10.9)$$

Предположим, что функция f не ограничена на $[a\,,\,b]$. Тогда она не будет ограниченной на некотором отрезке $[x_{k_0}\,,\,x_{k_0+1}]$ разбиения T с $\lambda(T) \leqslant \delta$. Выделяя из интегральной суммы слагаемое с номером k_0, преобразуем ее следующим образом:

$$\sigma(f;T,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k = f(\xi_{k_0})\cdot \Delta x_{k_0} + \sum_{k\neq k_o} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k\,. \quad (10.10)$$

Пользуясь неограниченностью функции f на отрезке $[x_{k_0}\,,\,x_{k_0+1}]$, попытаемся выбрать новое значение $\xi_{k_0} \in [x_{k_0}\,,\,x_{k_0+1}]$ так, чтобы выполнялось неравенство $|\sigma(f;T,\xi)| > E$. С этой целью, используя равенство (10.10), оценим снизу интегральную сумму

$$|\sigma(f;T,\xi)| \geqslant |f(\xi_{k_0})|\Delta x_{k_0} - \Big|\sum_{k\neq k_0} f(\xi_k)\Delta x_k\Big|\,.$$

Выбрав ξ_{k_0} так, чтобы было

$$|f(\xi_k)| > \frac{1}{\Delta x_{k_0}}\cdot\left(E + \Big|\sum_{k\neq k_0} f(\xi_k)\Delta x_k\Big|\right),$$

получим $|\sigma(f;T,\xi)| > E$, что противоречит неравенству (10.9). ▶

§ 2. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости

Учитывая необходимый признак интегрируемости, будем в этом параграфе рассматривать только *ограниченные* на $[a\,,\,b]$ функции. Кроме того, будем рассматривать здесь только *вещественнозначные* функции, так как нам предстоит иметь дело с неравенствами.

Пусть $T = (x_0\,,\, x_1\,,\, x_2\,, \dots x_{n-1}\,,\, x_n)$ — разбиение отрезка $[a\,,\, b]$. Обозначим, как и прежде, $\Delta_k := [x_k\,,\, x_{k+1}]$, и пусть

$$m_k := \inf_{x\in\Delta_k} f(x)\,, \quad M_k := \sup_{x\in\Delta_k} f(x)\,, \quad k = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

Определение 11. *Нижней и верхней суммами Дарбу функции* $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *построенными для разбиения* T, *называются следующие суммы:*

$$s(f,T) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{(нижняя сумма Дарбу);}$$

$$S(f,T) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k \quad \text{(верхняя сумма Дарбу).}$$

Если функция f неотрицательна, то суммы Дарбу имеют очевидный геометрический смысл. Именно, сумма $s(f,T)$ равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на левом рисунке 5, а сумма $S(f,T)$ равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на правом рисунке 5.

Замечания. 1. Не следует думать, что суммы Дарбу $s(f,T)$ и $S(f,T)$ во всех случаях равны интегральным суммам $\sigma(f;T,\xi)$ (при специальном выборе отмеченных точек ξ).

◀ В самом деле, для произвольной ограниченной функции f *может не существовать точек* $\xi_k'\,,\, \xi_k'' \in \Delta_k$, *в которых*

$$m_k = f(\xi_k')\,, \;\; M_k = f(\xi_k'')\,, \;\; k = 0\,, 1\,, \dots, n-1\,. \;\; ▶ \tag{10.11}$$

2. Однако *в том частном случае, когда функция* $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a\,,\, b]$, *обе суммы Дарбу являются интегральными суммами.*

◀ В самом деле, в этом случае по теореме Вейерштрасса о максимуме и минимуме существуют точки $\xi_k'\,,\, \xi_k'' \in \Delta_k$, в которых выполняются равенства (10.11). ▶

Теорема 13. *Для любого разбиения с отмеченными точками* (T,ξ) *отрезка* $[a\,,\, b]$ *справедливы неравенства*

$$s(f,T) \leqslant \sigma(f;T,\xi) \leqslant S(f,T)\,, \tag{10.12}$$

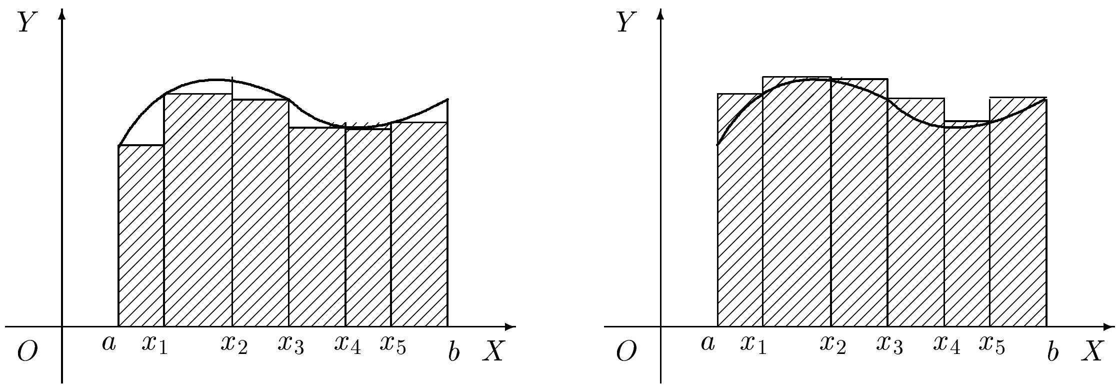

Рис. 5. К определению сумм Дарбу

причем

$$s(f,T) = \inf \sigma(f;T,\xi)\,; \quad S(f,T) = \sup \sigma(f;T,\xi)\,, \tag{10.13}$$

где inf *и* sup *берутся по всевозможным совокупностям отмеченных точек* $\xi = (\xi_0\,,\, \xi_1\,, \ldots, \xi_{n-1})$.

◀ Складывая неравенства

$$m_k \cdot \Delta x_k \leqslant f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leqslant M_k \cdot \Delta x_k\,,$$

получим неравенства (10.12). Учитывая, что

$$m_k = \inf_{\Delta_k} f(\xi_k)\,, \quad M_k = \sup_{\Delta_r} f(\xi_k)\,,$$

заключаем, что справедливы равенства (10.13). ▶

Теорема 14. *При измельчении разбиения* T, *т. е. при переходе к новому разбиению* $T' \supset T$ *нижняя сумма Дарбу может только увеличиться, т. е.* $s(f,T') \geqslant s(f,T)$, *а верхняя может только уменьшиться, т. е.* $S(f,T') \leqslant S(f,T)$.

◀ При доказательстве достаточно ограничиться только тем случаем, когда T' получается из T добавлением одной точки $x'_k = (x_k\,,\, x_{k+1})$. Обозначим $\Delta'_k := [x_k\,,\, x'_k]$, $\Delta''_k := [x'_k\,,\, x_{k+1}]$ — отрезки разбиения T', и пусть $\Delta x'_k := x'_k - x_k$, $\Delta x''_k := x_{k+1} - x'_k$. Очевидно, что $\Delta x'_k + \Delta x''_k = \Delta x_k$, и

$$m'_k := \inf_{x \in \Delta'_k} f(x) \geqslant \inf_{x \in \Delta_k} f(x) = m_k\,,$$

так как $\Delta_k' \subset \Delta_k$. Аналогично, $m_k'' := \inf\limits_{x\in\Delta_k''} f(x) \geqslant m_k$. Сумма Дарбу $s(f,T')$ получается из суммы Дарбу $s(f,T)$ путем замены в последней сумме слагаемого $m_k \cdot \Delta x_k$ на сумму $m_k' \cdot \Delta x_k' + m_k'' \cdot \Delta x_k''$. Но так как

$$m_k' \cdot \Delta x_k' + m_k'' \cdot \Delta x_k'' \geqslant m_k \cdot (\Delta x_k' + \Delta x_k'') = m_k \cdot \Delta x_k\,,$$

то $s(f,T') \geqslant s(f,T)$.

Аналогично можно показать, что $S(f,T') \leqslant S(f,T)$. ▶

Теорема 15. *Если разбиение T' получено из разбиения T добавлением новых l точек, то справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &0 \leqslant s(f,T') - s(f,T) \leqslant (M-m)\cdot l \cdot \lambda(T)\,;\\ &0 \leqslant S(f,T) - S(f,T') \leqslant (M-m)\cdot l \cdot \lambda(T)\,, \end{aligned} \tag{10.14}$$

где $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, а $\lambda(T)$ — мелкость разбиения T.

◀ Левые неравенства (10.14) установлены в предыдущей теореме. Чтобы установить правые неравенства, достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Итак, пусть T' получается из T добавлением только одной точки $x_k' \in (x_k\,, x_{k+1})$. Учитывая различие между суммами Дарбу $s(f,T)$ и $s(f,T')$, в обозначениях предыдущей теоремы имеем

$$\begin{aligned} s(f,T') - s(f,T) &= m_k' \cdot \Delta x_k' + m_k'' \cdot \Delta x_k'' - m_k \cdot \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \Delta x_k' + M \cdot \Delta x_k'' - m \cdot \Delta x_k = M(\Delta x_k' + \Delta x_k'') - m \cdot \Delta x_k = \\ &= (M-m)\cdot \Delta x_k \leqslant (M-m)\cdot 1 \cdot \lambda(T)\,. \end{aligned}$$

Тем самым установлено первое неравенство (10.14). Аналогично можно установить и второе неравенство (10.14). ▶

Теорема 16. *Нижняя сумма Дарбу не превосходит верхней суммы Дарбу, даже если они построены для различных разбиений, т. е.*

$$\forall T'\,,\, T'' \ :\ \ s(f,T') \leqslant S(f,T'')\,. \tag{10.15}$$

◀ Для разбиения $T = T' \cup T''$ справедливы включения $T \supset T'$ и $T \supset T''$. Учитывая теорему 14, имеем:

$$s(f,T') \leqslant s(f,T) \leqslant S(f,T) \leqslant S(f,T'')\,,$$

откуда вытекает неравенство (10.15). ▶

Определение 12. *Нижний интеграл Дарбу (число I_*) и верхний интеграл Дарбу (число I^*) функции f по отрезку $[a\,,\,b]$ определяется соответственно равенствами*

$$I_* := \sup s(f,T)\,, \quad I^* := \inf S(f,T)\,,$$

где точные границы берутся по всевозможным разбиениям T отрезка $[a\,,\,b]$.

Теорема 17. *Для любой ограниченной функции $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ оба интеграла Дарбу (нижний и верхний) существуют и связаны неравенствами*

$$m\cdot(b-a) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant M\cdot(b-a)\,, \tag{10.16}$$

где $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)\,, \quad M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)\,.$

◀ Пусть $T = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ — произвольное разбиение отрезка $[a\,,\,b]$. Имеем

$$\begin{aligned} s(f,T) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k \geqslant m\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = m\cdot(b-a)\ ;\\ S(f,T) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k \leqslant M\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = M\cdot(b-a)\,. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Пусть теперь T', T'' — произвольные разбиения отрезка $[a\,,\,b]$. В силу оценок (10.17) и теоремы 16 имеем:

$$m\cdot(b-a) \leqslant s(f,T') \leqslant S(f,T'') \leqslant M\cdot(b-a)\,. \tag{10.18}$$

Эти неравенства означают, что множество всех нижних сумм Дарбу ограничено сверху любой верхней суммой, а множество всех верхних сумм Дарбу ограничено снизу любой нижней суммой. Отсюда на основании теоремы существования точных границ заключаем, что существуют числа I_* и I^*. Взяв в неравенствах (10.18) sup по всем T' и inf по всем T'', получим неравенства (10.16). ▶

Теорема 18 (основная лемма Дарбу). *Для любой ограниченной функции $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$I_* = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(f,T)\,, \quad I^* = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(f,T)\,. \tag{10.19}$$

◀ Если функция f — постоянная, т. е. $f(x) \equiv c$, то для любого разбиения T имеем

$$s(f,T) = S(f,T) = c \cdot (b-a) = I_* = I^*\,,$$

и так как предел постоянного равен постоянному, то в этом случае равенства (10.19) установлены.

Предположим теперь, что $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Обозначая, как обычно, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, заключаем, что $m < M$, и значит, $M - m > 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $I^* = \inf S(f,T)$, то существует разбиение T_0, такое, что $S(f,T_0) \leqslant I^* + \varepsilon/2$. Пусть разбиение T_0 содержит $l > 1$ точек. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\cdot(M-m)\cdot l}$, и пусть T — произвольное разбиение, такое, что $\lambda(T) \leqslant \delta$. Взяв разбиение $T' := T \cup T_0$, имеем $T' \supset T$, $T' \supset T_0$, и поэтому $S(f,T') \leqslant S(f,T)$ и $S(f,T') \leqslant S(f,T_0)$. Разбиение T' можно получить из T добавлением $k \leqslant l$ новых точек. Тогда по теореме 15 имеем

$$S(f,T) - S(f,T') \leqslant (M-m)\cdot k \cdot \lambda(T) \leqslant (M-m)\cdot l \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Отсюда

$$S(f,T) \leqslant S(f,T') + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant S(f,T_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant I^* + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I^* + \varepsilon\,.$$

Итак, установлено

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall T \ : \ \lambda(T) \leqslant \delta \Longrightarrow 0 \leqslant S(f,T) - I^* \leqslant \varepsilon\,,$$

что равносильно второму равенству (10.19). Первое равенство (10.19) можно установить аналогично. ▶

Теорема 19 (критерий интегрируемости). *Для любой ограниченной функции $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ равносильны следующие утверждения:*

(a) *f интегрируема на $[a\,,\,b]$;*
(b) *нижний интеграл Дарбу I_* равен верхнему I^*;*
(c) $\lim\limits_{\lambda\to 0}[S(f,T) - s(f,T)] = 0$;

(d) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k = 0$, *где* $\omega(f,\Delta_k)$ — *колебание функции* f *на отрезке* Δ_k.

◀ $(a)\Rightarrow(b)$ Пусть $f:[a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ интегрируема. Тогда существует число I, такое, что

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall(T,\xi)\ :\ \lambda(T)\leqslant\delta\Longrightarrow|\sigma(f;T,\xi)-I|\leqslant\varepsilon\,.$$

Беря здесь sup и inf по всем ξ, получим

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall T\ :\ \lambda(T)\leqslant\delta\Longrightarrow\begin{cases}|S(f,T)-I|\leqslant\varepsilon\,;\\|s(f,T)-I|\leqslant\varepsilon\,.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\lim_{\lambda\to 0}S(f,T)=\lim_{\lambda\to 0}s(f,T)=I\,.$$

С другой стороны, в силу теоремы 18 (т. е. основной леммы Дарбу) справедливы следующие равенства:

$$\lim_{\lambda\to 0}S(f,T)=I^*\,,\ \lim_{\lambda\to 0}s(f,T)=I_*\,.$$

Из этих равенств на основании единственности предела получаем $I_*=I^*=I$.

$(b)\Rightarrow(c)$ Пусть $I_*=I^*=I$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to 0}S(f,T)=\lim_{\lambda\to 0}s(f,T)=I\,.$$

Значит,

$$\lim_{\lambda\to 0}[S(f,T)-s(f,T)]=\lim_{\lambda\to 0}S(f,T)-\lim_{\lambda\to 0}s(f,T)=I-I=0\,.$$

$(c)\Rightarrow(d)$ Имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\cdot\Delta x_k=$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}M_k\cdot\Delta x_k-\sum_{k=0}^{n-1}m_k\cdot\Delta x_k\right)=$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}[S(f,T)-s(f,T)]=0\,,$$

где обозначено

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \ , \quad M_k = \sup_{\Delta_k} f(x) \ , \quad m_k = \inf_{\Delta_k} f(x)\,.$$

$(d) \Rightarrow (a)$ Пусть $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k = 0$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to 0}[S(f,T) - s(f,T)] = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k = 0\,,$$

и значит,

$$\lim_{\lambda\to 0} S(f,T) = \lim_{\lambda\to 0} s(f,T) = I\,.$$

Так как

$$s(f,T) \leqslant \sigma(f;T,\xi) \leqslant S(f,T)\,,$$

то отсюда в пределе при $\lambda(T)\to 0$ получим

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma(f;T,\xi) = I\,,$$

т. е. функция интегрируема на $[a\,,\,b]$. ▶

§ 3. Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега

1. Классы интегрируемых функций

Теорема 20. *Если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

◀ Так как f непрерывна на $[a\,,\,b]$, то по теореме Вейерштрасса она ограничена на $[a\,,\,b]$, т. е. выполнено необходимое условие интегрируемости. Для доказательства интегрируемости будем проверять выполнение условия критерия интегрируемости

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k = 0\,.$$

С этой целью зададим $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна на $[a\,,\,b]$, то по теореме Кантора она и равномерно непрерывна, т. е.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x', x'' \; : \qquad |x' - x''| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\,. \tag{10.20}$$

Зададим теперь такое разбиение (T, ξ), для которого $\lambda(T) \leqslant \delta$. Тогда в силу (10.20) будет $\omega(f, \Delta_k) \leqslant \varepsilon/(b-a)$, и значит,

$$0 \leqslant \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon\,.$$

Итак,

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall(T,\xi) \; : \; \lambda(T) \leqslant \delta \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant \varepsilon\,.$$

т. е. выполнено условие (d) теоремы 19. ▶

Теорема 21. *Если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена на отрезке $[a\,,\,b]$ и непрерывна там всюду, кроме конечного множества точек, то она интегрируема на на этом отрезке.*

◀ Обозначим $M := \sup\limits_{[a,b]}|f(x)| \in \mathbb{R}_+$, и пусть $m \in \mathbb{N}$ — число точек разрыва функции f. Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Возьмем число $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{16\cdot M\cdot m}$ и построим окрестности

$$U_\mu = (c_\mu - \delta_1\,,\, c_\mu + \delta_1)\,,\; \mu = 1\,,\,2\,\ldots\,,\,m\,,$$

радиуса δ_1 с центрами в каждой из m точек разрыва c_μ функции f. Множество $[a\,,\,b]\diagdown\bigcup U_\mu$ — компактное, а функция f непрерывна на нем. По теореме Кантора (а она справедлива для любых компактных подмножеств числовой оси) функция f равномерно непрерывна на этом компактном множестве, т. е.

$$\exists\delta_2 > 0 \;\; \forall x', x'' \; : \; |x' - x''| \leqslant \delta_2 \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Полагая $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, возьмем любое разбиение (T, ξ), для которого $\lambda(T) \leqslant \delta$. Для него имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k = \sum{}' \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k + \sum{}'' \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k \,,$$

где сумма $\sum'$ содержит все те слагаемые, для которых $\Delta_k \cap (\cup U_\mu) = \varnothing$, а сумма $\sum''$ содержит все остальные слагаемые, т. е. все те, для которых $\Delta_k \cap (\cup U_\mu) \neq \varnothing$. Для слагаемых первой суммы имеем

$$\omega(f, \Delta_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \,,$$

а для слагаемых второй суммы будет $\omega(f, \Delta_k) \leqslant 2M$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k = \sum{}' \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k + \sum{}'' \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum{}' \Delta x_k + 2M \sum{}'' \Delta x_k \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot m \cdot (2\delta_1 + 2\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot m \cdot 4 \cdot \delta_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall T \ : \ \lambda(T) \leqslant \delta \ \ \Longrightarrow \ \ \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \leqslant \varepsilon \,,$$

т. е. выполнено условие (d) теоремы 19. ▶

Замечание. Из способа доказательства этой теоремы следует, что изменение значений подынтегральной функции на конечном множестве точек не влияет ни на интегрируемость функции, ни на величину интеграла от нее. Отсюда, в частности, можно заключить, что функция, ограниченная и непрерывная всюду на отрезке, кроме конечного множества точек, интегрируема на этом отрезке даже в тех случаях, когда в точках этого конечного множества она вообще не определена. Например, существует такой интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \sin \frac{1}{x} \cdot dx$.

Теорема 22. *Если функция $f : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ монотонна на отрезке $[a\,, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

◀ Так как функция f монотонна на $[a\,,\,b]$, то все значения функции f заключены между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, монотонная на $[a\,,\,b]$ функция ограничена на $[a\,,\,b]$. Если $f(a)=f(b)$, то функция f — постоянная, и значит, интегрируемая на $[a\,,\,b]$.

Пусть теперь $f(a)\neq f(b)$. Задавая $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, положим $\delta := := \varepsilon\diagup|f(b)-f(a)|$, и пусть (T,ξ) — произвольное разбиение отрезка $[a\,,\,b]$, для которого $\lambda(T)\leqslant\delta$. Тогда в силу монотонности функции f имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\Delta x_k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=$$
$$=\frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}|f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})|=$$
$$=\frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}|f(x_n)-f(x_0)|=\varepsilon\,,$$

так как $x_0=a\,,\ x_n=b\,$. Итак,

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall(T,\xi)\ :\ \lambda(T)\leqslant\delta\Longrightarrow\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k\leqslant\varepsilon\,,$$

т. е. функция f интегрируема. ▶

Замечание. Монотонная на отрезке (а, значит, и интегрируемая) функция может иметь и бесконечное (счетное) множество точек разрыва. Например, функция $f:[0\,,\,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, задаваемая равенствами

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,,\ \text{при}\ 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\,;\\ \dfrac{3}{4}\,,\ \text{при}\ \dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{3}{4}\,;\\ \dfrac{7}{8}\,,\ \text{при}\ \dfrac{3}{4}\leqslant x<\dfrac{7}{8}\,;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\\ \dfrac{2^{n-1}-1}{2^n}\,,\ \text{при}\ \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\leqslant x<\dfrac{2^n-1}{2^n}\,;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}\qquad(10.21)$$

не убывает на отрезке $[0\,,\,1]$ и имеет разрывы в точках $\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{4}\,,\,\frac{7}{8}\,,\,\ldots$. На основании теоремы 22 заключаем, что она интегрируема на отрезке $[0\,,\,1]$. Кроме того, нетрудно показать, что интеграл от нее равен

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\,.$$

2. Критерий Лебега

В этом пункте будет весьма просто описано множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a\,,\,b]$. Предварительно изучим множества меры нуль на прямой.

Определение 13. *Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества E конечным или счетным семейством интервалов $\{I_1\,,\ I_2\,,\ldots\}$, сумма длин которых не превосходит ε.*

Поскольку ряд $\sum\limits_k |I_k|$ из длин отрезков I_k — положительный, то он сходится абсолютно. Поэтому не имеет значения порядок, в котором занумерованы интервалы покрытия. Значит, определение 13 является корректным.

Лемма 1.(a) *Множество, состоящее из одной точки, имеет меру нуль.*

(b) *Объединение конечного или счетного семейства множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

(c) *Подмножество любого множества меры нуль является множеством меры нуль.*

(d) *Отрезок $[a\,,\,b]$ при $a < b$ не является множеством меры нуль.*

◀ (a) Зададим любое $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Любая точка $x \in \mathbb{R}$ покрывается интервалом $(x - \varepsilon/2\,,\, x + \varepsilon/2)$ длина которого равна ε.

(b) Пусть $\{E_1,\ E_2,\ E_3, \ldots\}$ — конечное или счетное семейство множеств меры нуль. Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, для каждого $k = 1\,,\,2\,,\ldots$ покроем множество E_k системой интервалов $\{I_{1k}\,,\ I_{2k}\,,\ldots\}$, сумма длин которых не превосходит $\dfrac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда система интервалов

$$\{I_{mk}\mid(m\,,\,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$$

будет покрывать множество $E_1\cup E_2\cup E_3\ldots$, а сумма длин этих интервалов не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{\varepsilon}{2^3}+\ldots=\varepsilon\,.$$

(c) Пусть E — множество меры нуль, и $E_1\subset E$. Тогда любое покрытие множества E будет покрытием и множества E_1. Отсюда и следует утверждение (c).

(d) Покажем, что сумма длин интервалов, покрывающих отрезок $[a\,,\,b]$, больше, чем $(b-a)$. С этой целью применим метод индукции по числу покрывающих интервалов. Если $[a\,,\,b]\subset(\alpha\,,\,\beta)$, то

$$\alpha<a<b<\beta\,,\quad\text{и значит,}\quad\beta-\alpha>b-a\,.$$

Таким образом, утверждение установлено для системы, состоящей из одного интервала. Предположим теперь, что утверждение справедливо для покрытия отрезка $[a\,,\,b]$ количеством интервалов, не превосходящим k. Рассмотрим покрытие, состоящее из $(k+1)$ интервалов. Пусть $(\alpha_1,\,\alpha_2)$ — интервал из этого покрытия, содержащий точку a. Если $\alpha_2\geqslant b$, то $(\alpha_1\,,\,\alpha_2)\supset[a\,,\,b)$, и значит, $\alpha_2-\alpha_1>b-a$. Если $\alpha_2<b$, то отрезок $[\alpha_2\,,\,b]$ покрыт системой, состоящей уже не более чем из k интервалов, и, значит, сумма длин их не меньше, чем $(b-\alpha_2)$. Но

$$(b-a)=(b-\alpha_2)+(\alpha_2-a)<(b-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_1)$$

поэтому сумма длин интервалов, покрывающих $[a\,,\,b]$ больше, чем $(b-a)$.

Если же отрезок $[a\,,\,b]$ покрыт бесконечным семейством интервалов, то в силу леммы Гейне — Бореля это покрытие содержит конечное подпокрытие. По доказанному выше сумма длин интервалов, образующих это конечное подпокрытие, больше, чем $(b-a)$. Значит, и сумма длин интервалов, образующих бесконечное покрытие, подавно больше $(b-a)$. ▶

В качестве примера рассмотрим множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Оно, как известно, счетное[2], т. е. его можно представить в виде счетного объединения одноточечных множеств, каждое из которых имеет лебегову меру нуль. Отсюда и из леммы 1 (b) заключаем, что *множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, а также любое его подмножество, имеет лебегову меру нуль.*

Определение 14. *Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет жорданову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества E конечным семейством интервалов, сумма длин которых не превосходит ε.*

Условимся для краткости множества лебеговой[3] меры нуль называть множествами *меры нуль*, а множества жордановой[4] меры нуль — множествами *длины нуль*. Очевидно, что любое множество длины нуль является множеством меры нуль. Обратное верно, например, для компактных множеств. Множество $\mathbb{Q}$ является множеством меры нуль, но не является компактным, поэтому его невозможно покрыть конечным множеством интервалов. Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ *не является* множеством длины нуль.

Для дальнейшего весьма полезным является понятие *колебания функции в точке.*

Определение 15. *Колебанием функции f в точке x называется предел*

$$\omega(f;x) := \lim_{\delta \to +0} \omega(f;[x-\delta\,,\,x+\delta])\,. \tag{10.22}$$

Так как функция $\omega\,(f;[x-\delta, x+\delta])$ не возрастает при убывании $\delta > 0$, то существует конечный предел (10.22), причем $\omega(f;x) \in \in \overline{\mathbb{R}_+}$. В терминах колебания очень удобно описывать свойства функций, связанные с непрерывностью и разрывностью.

Лемма 2. *Для любой функции $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ справедливы следу-*

[2]Множество называется счетным, если существует биекция его на множество $\mathbb{N}$. Счетность множества $\mathbb{Q}$ легко установить, нумеруя в определенном порядке все попарно различные обыкновенные дроби.

[3]*Лебег* Анри Леон (1875—1941) — французский математик, построивший теорию интеграла, более общую по сравнению с теорией интеграла Римана.

[4]*Жордан* Мари Энмон Камиль (1838—1922) — французский математик.

ющие утверждения:

(a) *непрерывность функции f в точке x равносильна выполнению равенства $\omega(f;x)=0$;*

(b) *множество E всех точек разрыва функции f можно задать равенством $E=\{x\in[a\,,\,b]\mid\omega(f;x)>0\}$.*

(c) *для любого $\alpha>0$ множество $E_\alpha:=\{x\in[a\,,\,b]\mid\omega(f;x)\geqslant\alpha\}$ — компактное.*

◀ (a) Непрерывность функции f в точке x равносильна такому утверждению:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall\ x',x''\in[x-\delta\,,\,x+\delta]\ :\ |f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon\,.$$

Беря здесь sup по всем таким x', x'', получим

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ :\ \omega(f;[x-\delta,x+\delta])\leqslant\varepsilon\,,$$

т. е.

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(f;[x-\delta,x+\delta])=0\ \ \text{или}\ \ \omega(f;x)=0\,.$$

(b) Это утверждение вытекает из (a), так как

$$E=[a\,,\,b]\diagdown\{x\in[a,b]\mid\omega(f,x)=0\}=\{x\in[a,b]\bigm|\omega(f;x)>0\}\,.$$

(c) Так как $E_\alpha\subset[a\,,\,b]$, то E_α — ограниченное множество. Покажем, что оно замкнутое, т. е. что все его предельные точки ему принадлежат. Пусть x_0 — одна из таких предельных точек. Это означает, что существует последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$, такая, что $x_n\to x_0\,,\ \omega(f;x_n)\geqslant\alpha$. Тогда $\forall\delta>0$ будет: $\omega(f;[x_0-\delta,x_0+\delta])\geqslant\alpha$, и, значит, $\omega(f;x_0)\geqslant\alpha$, т. е. $x_0\in E_\alpha$. Замкнутость множества E_α установлена. ▶

Лемма 3. *Если для функции $f:[a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ выполнено условие*

$$\exists\alpha>0\ \ \forall x\in[a\,,\,b]\ :\ \omega(f;x)<\alpha\,, \tag{10.23}$$

то

$$\exists\lambda>0\ \ \forall x',x''\in[a\,,\,b]\ :\ |x'-x''|\leqslant\lambda\Longrightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\alpha\,.$$

◀ Предположим противное, а именно

$$\forall\lambda > 0 \ \exists\ x'_\lambda,\ x''_\lambda \in [a\,,\,b] \ : \ \begin{cases} |x'_\lambda - x''_\lambda| \leqslant \lambda\,, \\ |f(x'_\lambda) - f(x''_\lambda)| \geqslant \alpha\,. \end{cases} \tag{10.24}$$

Полагая здесь $\lambda = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, получим две последовательности $(x'_{1/n})_{n=1}^\infty$ и $(x''_{1/n})_{n=1}^\infty$. Так как обе эти последовательности ограничены, то по теореме Больцано — Вейерштрасса существуют их подпоследовательности $(x'_{n_k})_{k=1}^\infty$ и $(x''_{n_k})_{k=1}^\infty$, сходящиеся к некоторой точке $x_0 \in [a\,,\,b]$. Точка x_0 — одна и та же для обеих подпоследовательностей, так как в силу (10.24) имеем

$$0 \leqslant |x'_{n_k} - x''_{n_k}| \leqslant \frac{1}{n_k} \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty\,.$$

Для δ-окрестности точки x_0 при некотором k имеем

$$\omega(f; [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \geqslant |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \alpha\,.$$

Отсюда при $\delta \to +0$ находим $\omega(f; x_0) \geqslant \alpha$, что противоречит условию (10.23). ▶

Теорема 23 (критерий Лебега). *Для любой функции $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ равносильны следующие утверждения:*

(a) *функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a\,,\,b]$;*

(b) *функция f ограничена на $[a\,,\,b]$, а множество, состоящее из всех ее точек разрыва, имеет меру нуль.*

◀ (a) ⇒ (b) Ограниченность функции f была установлена в теореме 12. Осталось только показать, что множество

$$E = \{x \in [a\,,\,b] \mid \omega(f; x) > 0\} \tag{10.25}$$

имеет меру нуль. Представим это множество в виде объединения

$$E = \bigcup_{n=1}^\infty E_{1/n} \ \text{ где } \ E_{1/n} := \left\{x \in [a\,,\,b] \;\middle|\; \omega(f, x) \geqslant 1/n\right\}\,. \tag{10.26}$$

Предположим противное, т. е. что множество E *не является множеством меры нуль.* Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что E_{1/n_0} не является множеством меры нуль. Последнее вытекает из (10.26) и из леммы 1. Так как множество E_{1/n_0} — компактное, то оно не является и множеством длины нуль. Последнее означает, что $\exists\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого конечного покрытия множества E_{1/n_0} интервалами сумма длин этих интервалов больше ε_0.

Взяв произвольное разбиение $T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a\,,\,b]$ и покрыв каждый отрезок $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ интервалом $(x_k - \delta, x_{k+1} + \delta)$, где $\delta > 0$, мы получим конечное покрытие отрезка $[a\,,\,b]$, а значит, и множества E_{1/n_0} интервалами. Сумма длин интервалов $(x_k - \delta, x_{k+1} + \delta)$, содержащих точки из E_{1/n_0}, больше ε_0. Так как $\delta > 0$ — произвольное, то, устремляя его к нулю, заключаем, что сумма длин отрезков Δ_k^*, соответствующих этим интервалам, не меньше ε_0. Это позволяет получить следующую оценку снизу:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k \geqslant \sum_{\Delta_k^*} \omega(f, \Delta_k^*) \cdot \Delta x_k^* \geqslant \frac{\varepsilon_0}{n_0}\,.$$

Отсюда заключаем, что условие (d) теоремы 19 не выполняется, т. е. функция f не интегрируема на отрезке $[a\,,\,b]$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $M := \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|$. Так как множество (10.25) имеет меру нуль, то для любого $\alpha > 0$ множество E_α также имеет меру нуль и к тому же компактно. Значит, оно имеет и длину нуль. Тогда для $\alpha_0 := \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ существует конечное покрытие множества E_{α_0} интервалами $U_1, \ldots, U_\nu$, сумма длин которых не превосходит $\dfrac{\varepsilon}{8M}$. Положим $\delta := \min\left\{\lambda_0\,, \dfrac{\varepsilon}{16M\nu}\right\}$, где λ_0 — число, соответствующее числу α_0 в силу леммы 3. Пусть T — любое разбиение отрезка $[a\,,\,b]$, для которого $\lambda(T) \leqslant \delta$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k = \sum{}' \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k + \sum{}'' \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k\,, \quad (10.27)$$

где сумма $\sum'$ берется по всем тем слагаемым, для которых $\Delta_k \cap (U_1 \cup \ldots \cup U_\nu) = \varnothing$, а сумма $\sum''$ — по тем, для которых

$\Delta_k \cap (U_1 \cup \ldots \cup U_\nu) \neq \varnothing$. Оценим каждую сумму отдельно:

$$\sum{}' \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k \leqslant \alpha_0 \cdot \sum{}' \Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\sum{}'' \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k \leqslant 2M \sum{}'' \Delta x_k \leqslant 2M \cdot \Big(\frac{\varepsilon}{8M} + 2\nu\delta\Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall T \;:\; \lambda(T) \leqslant \delta \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k \leqslant \varepsilon\,,$$

и значит, выполнено условие (d) теоремы 19. ▶

Замечания. 1. Отметим, что из критерия Лебега вытекает доказанные ранее теоремы об интегрируемости непрерывных функций, ограниченных функций с конечным (и даже счетным) множеством точек разрыва, а также функций, монотонных на отрезке интегрирования.

2. Рассмотрим теперь с точки зрения интегрируемости знакомые нам функции Римана и Дирихле. Функция Римана $\mathcal{R} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0\,,\,1]$, определяемая равенством

$$\mathcal{R}(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{если число } \; x \text{ — иррациональное;} \\ \dfrac{1}{q}\,, & \text{если } \; x = \dfrac{p}{q} \text{ — несократимая дробь} \end{cases}$$

ограничена, а множество всех ее точек разрыва содержится в $\mathbb{Q}$, т. е. имеет меру нуль. Значит, она интегрируема на любом отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}_+$.

Функция Дирихле

$$\mathcal{D}(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{если число } \; x \text{ — иррациональное;} \\ 1\,, & \text{если число } \; x \text{ — рациональное} \end{cases}$$

ограничена, но множество всех ее точек разрыва совпадает с множеством $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел, т. е. не является множеством меры нуль. Значит, функция $\mathcal{D}$ не интегрируема ни на каком отрезке.

3. Тождество

$$\mathcal{D}(x) \equiv \operatorname{sign}(\mathcal{R}(x)) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

показывает, что композиция интегрируемых функций может не быть интегрируемой функцией.

§ 4. Свойства определенного интеграла

Теорема 24 (линейность). *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a\,,\,b]$, то для любых $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{C}$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на отрезке $[a\,,\,b]$, и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx\,. \tag{10.28}$$

◀ Пусть $(T;\xi)$ — разбиение с отмеченными точками отрезка $[a\,,\,b]$. Интегральные суммы интегралов, входящих в равенство (10.28), связаны очевидным равенством

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)]\,\Delta x_k = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k\,. \tag{10.29}$$

По условию обе суммы правой части (10.29) имеют конечные пределы при $\lambda(T) \to 0$. На основании теоремы о пределе линейной комбинации функций заключаем, что и левая часть (10.29) имеет конечный предел при $\lambda(T) \to 0$, т. е. функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a\,,\,b]$. Переходя к пределу в равенстве (10.29) при $\lambda(T) \to 0$, получим равенство (10.28). ▶

Следствие. *Интегрируемость комплекснозначной функции $f\,:\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ равносильна интегрируемости на отрезке $[a\,,\,b]$, вещественнозначных функций $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$, причем справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i \cdot \int\limits_a^b \operatorname{Im} f(x)dx\,.$$

◀ Для доказательства достаточно применить теорему 24 к равенствам

$$f = \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f\ ;\ \ \operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2}\ ;\ \ \operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}\,,$$

где черта сверху означает операцию комплексного сопряжения. ▶

Замечание. Из свойства линейности интеграла вытекает, что критерий Лебега интегрируемости справедлив не только для вещественных, но и для комплексных функций.

Теорема 25 (аддитивность). *Если функция интегрируема на отрезке* $[a\,,\,b]$, *то для любого* $c \in (a\,,\,b)$ *она интегрируема на отрезках* $[a\,,\,c]$ *и* $[c\,,\,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx\,. \tag{10.30}$$

◀ Интегрируемость функции на отрезках $[a\,,\,c]$ и $[c\,,\,b]$ вытекает из критерия Лебега. Желая проверить равенство (10.30), будем брать только такие разбиения отрезка $[a\,,\,b]$, которые содержат точку c

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k_0} = c < x_{k_0+1} < \ldots < x_n = b\ . \tag{10.31}$$

Для таких разбиений интегральную сумму

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

можно представить в виде

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{k=0}^{k_0-1} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=k_0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\ . \tag{10.32}$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим равенство (10.30). ▶

Замечание. Говоря об интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$, мы до сих пор предполагали, что $a < b$. Если предположить, что $a > b$, то в этом случае можно строить разбиения типа

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = b\,,$$

и составлять интегральные суммы

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\,,$$

где все Δx_k отрицательны. В этом состоит единственное отличие случая $a > b$ от случая $a < b$. Поэтому естественно дать следующее определение.

Определение 16. *В случае $a > b$ полагают*

$$\int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)dx\,; \tag{10.33}$$

а в случае $a = b$ полагают:

$$\int\limits_a^a f(x)dx := 0\,. \tag{10.34}$$

С точки зрения этого определения интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ рассматривается как интеграл по отрезку, ориентированному в направлении от a к b. Равенство (10.33) показывает, что если ориентацию изменить (т. е. поменять местами a и b), то интеграл изменит знак. Очевидно, что теорема 24 остается справедливой независимо от соотношения между a и b. Покажем, что при этом остается справедливой и теорема 25.

Теорема 26. *Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a, b, c, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx + \int\limits_c^a f(x)dx = 0\,. \tag{10.35}$$

◀ В случае $a = b = c$, равенство (10.35) является следствием равенства (10.34). Если какие-либо два из чисел a, b, c равны, а третье отлично от них, то равенство (10.35) является следствием равенств (10.34) и (10.33). Предположим теперь, что среди чисел a, b, c нет равных. Пусть, например, $a < b < c$. Тогда, учитывая свойство аддитивности (10.30), имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx\,,$$

что в силу свойства (10.33) равносильно равенству (10.35). Аналогично можно рассмотреть все остальные случаи. ▶

Следствие. *Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$, то*

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx + \int_{a_n}^{a_0} f(x)dx = 0\,.$$

◀ Доказательство легко получается из теоремы 26 с помощью индукции по числу n. ▶

Теорема 27 (монотонность). *Если функции f, $g : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы, $a < b$ и $f \leqslant g$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx\,. \tag{10.36}$$

◀ Напомним, что неравенства между функциями понимаются следующим образом:

$$f \leqslant g \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in [a\,,\, b] :\ f(x) \leqslant g(x)\,.$$

Учитывая это, а также то, что $a < b$, имеем следующее очевидное неравенство между интегральными суммами интегралов (10.36)

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим неравенство (10.36). ▶

Теорема 28 (оценка интеграла). *Если функция f интегрируема на отрезке $[a\,,\, b]$, где $a < b$, то и функция $|f|$ интегрируема на этом отрезке, причем*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \tag{10.37}$$

◀ Интегрируемость функции $|f|$ вытекает из интегрируемости функции f и критерия Лебега. Если функция f — вещественнозначная, то для нее справедливы следующие неравенства:

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|\,,$$

а из них по предыдущей теореме имеем

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx\,,$$

что равносильно неравенству (10.37).

Предположим теперь, что функция f — комплекснозначная. Если интеграл от нее равен нулю, то неравенство (10.37) очевидно. Если же он отличен от нуля, то, представляя его в показательной форме

$$I := \int_a^b f(x)dx = |I|\cdot e^{i\theta}\,,$$

и используя доказанную часть теоремы, имеем

$$|I| = I\cdot e^{-i\theta} = e^{-i\theta}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{-i\theta}f(x)dx =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}[e^{-i\theta}f(x)]dx + i\int_a^b \mathrm{Im}[e^{-i\theta}f(x)]dx =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}[e^{-i\theta}f(x)]dx \leqslant \int_a^b |\,\mathrm{Re}[e^{-i\theta}f(x)]|dx| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |e^{-i\theta}f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx\,.$$

Отсюда и вытекает неравенство (10.37). В последних выкладках мнимая часть интеграла отброшена как величина, заведомо равная нулю. ▶

Теорема 29 (оценка интеграла от произведения). *Если функции* $f, g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *интегрируемы, и* $g \geqslant 0$, *то при* $a < b$ *имеем*

$$m\cdot\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\cdot\int_a^b g(x)dx\,, \tag{10.38}$$

где обозначено $m := \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

◀ Интегрируемость произведения интегрируемых функций вытекает из критерия Лебега (так как произведение ограниченных функций ограничено, а множество всех точек разрыва произведения содержится в объединении множеств точек разрыва сомножителей). Умножая, далее, очевидные неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на неотрицательную функцию g, получим

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x).$$

Из этих неравенств в силу теоремы 27 вытекают неравенства (10.38). ▶

Теорема 30 (первая теорема «о среднем»). *В условиях предыдущей теоремы существует число* $\mu \in [m, M]$, *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.39}$$

Если, кроме того, функция f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то существует точка* $\xi \in [a, b]$, *такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.40}$$

◀ В случае $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$ из неравенств (10.38) вытекает равенство $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, поэтому равенство (10.39) выполняется при любом μ, а равенство (10.40) выполняется при любом ξ.

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то неравенство (10.38) равносильно такому

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Вводя обозначение

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} =: \mu \in [a\,,\,b]\,,$$

мы тем самым получили равенство, равносильное (10.39).

Предполагая, что функция f непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, мы на основании теоремы о промежуточных значениях заключаем, что существует точка $\xi \in [a\,,\,b]$, в которой $f(\xi) = \mu$. Значит, в этом случае (10.39) равносильно (10.40). ▶

Следствие (первая теорема «о среднем»). *Если f интегрируема на $[a\,,\,b]$, то существует такое число $\mu \in [m\,,\,M]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)\,.$$

Если, в частности, f непрерывна на $[a\,,\,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a\,,\,b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)\,.$$

◀ Эти равенства получаются из равенств (10.39) и (10.40), если в них положить $g(x) \equiv 1$. ▶

Замечание. Отметим геометрический смысл последнего равенства при $f \geqslant 0$: *интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади прямоугольника с основанием $[a\,,\,b]$ и высотой, равной значению подынтегральной функции в некоторой точке $\xi \in [a\,,\,b]$.*

§ 5. Формула Ньютона — Лейбница. Существование первообразных. Методы вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 31. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a\,,\,b]$, и на этом отрезке существует первообразная F функции f, то справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,. \tag{10.41}$$

◀ Пусть $T = (x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_{n-1}\,,\,x_n)$ — разбиение отрезка $[a\,,\,b]\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Преобразуем правую часть равенства (10.41)

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) + \ldots +$$
$$+ F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right]\,. \tag{10.42}$$

Так как функция F дифференцируема на $[a\,,\,b]$, то к каждому слагаемому суммы из (10.42) можно применить терему Лагранжа о конечных приращениях

$$\exists \xi_k \in (x_k\,,\,x_{k+1}):\quad F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta x_k\,.$$

Отсюда и из (10.42) следует, что

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\,. \tag{10.43}$$

Правая часть этого равенства — интегральная сумма $\sigma(f; T, \xi)$. Так как функция f предполагалась интегрируемой на $[a\,,\,b]$, то правая часть (10.43) сходится к $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $\lambda(T) \to 0$. Поэтому из (10.43) в пределе получим (10.41). ▶

Замечание. Формула (10.41), связывающая неопределенный интеграл с определенным, была открыта И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем и носит их имя. Формула Ньютона — Лейбница имеет фундаментальное значение в анализе. Для удобства ее использование вводят в так называемый «символ двойной подстановки» $\Big|_a^b$, действующий по правилу

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\,.$$

Используя этот символ, формулу Ньютона — Лейбница можно переписать в следующем равносильном виде:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b\,, \tag{10.44}$$

где F — любая первообразная для f на $[a\,,\,b]$.

Рассмотрим несколько простых **примеров** на непосредственное применение формулы (10.44):

$$1)\quad \int\limits_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\,.$$

$$2)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}\,.$$

$$3)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})\,.$$

2. Существование первообразных

Теорема 32. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a\,,\,b]$, то функция F, задаваемая равенством*

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt\,, \tag{10.45}$$

непрерывна на $[a\,,\,b]$*. Если же функция* f *непрерывна на отрезке* $[a\,,\,b]$*, то функция* (10.45) *дифференцируема на этом отрезке, причем* $F' = f$*.*

◀ Составим приращение функции (10.45) и преобразуем его

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt\,. \qquad (10.46)$$

Отсюда имеем

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int\limits_x^{x+h} f(t)dt\right| \leqslant M \cdot |h| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0\,,$$

где обозначено $M := \sup\limits_{[a,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, функция F непрерывна.

Предполагая, далее, что функция f непрерывна и применяя первую теорему «о среднем», получим

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi) \cdot h\ , \quad \text{где} \quad x \lesseqgtr \xi \lesseqgtr x+h\,.$$

Отсюда находим

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)\,. \quad ▶$$

Замечание. В теории неопределенного интеграла изучались первообразные функции в предположении, что они существуют. Теорема 32 гарантирует существование первообразной для любой функции, непрерывной на отрезке $[a\,,\,b]$. Учитывая, например, что любая элементарная функция непрерывна в своей естественной области определения, из теоремы 32 заключаем, что *любая элементарная функция имеет первообразную на любом отрезке, лежащем в области определения этой функции.*

С другой стороны, не всякая интегрируемая функция имеет первообразную (таковой, например, является любая кусочно-постоянная функция, определенная на отрезке). В связи с этим естественно ввести понятие *обобщенной первообразной*, которая существует для любой интегрируемой функции.

Определение 17. *Обобщенной первообразной для интегрируемой на* $[a\,,\,b]$ *функции* f *называется непрерывная на* $[a\,,\,b]$ *функция* F*, такая, что для интеграла от функции* f *справедлива формула Ньютона — Лейбница* (10.41).

Существование обобщенной первообразной гарантируется теоремой 32. Одной из обобщенных первообразных является функция F, задаваемая равенством (10.45). Любая другая обобщенная первообразная отличается от (10.45) постоянным слагаемым.

3. Замена переменных в определенном интеграле

Теорема 33. *Пусть функция* f *непрерывна на отрезке* $[a\,,\,b]$*, а функция* $\varphi : [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow [a\,,\,b]$ *имеет непрерывную производную на* $[\alpha\,,\,\beta]$*, и пусть выполняются равенства* $\varphi(\alpha) = a\,,\ \varphi(\beta) = b$*. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \tag{10.47}$$

◀ Так как f непрерывна[5] на $[a\,,\,b]$, то по теореме 32 существует первообразная F для f. Согласно «цепному правилу» композиция $F\circ\varphi$ является первообразной для $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ на $[\alpha\,,\,\beta]$. Применяя формулу Ньютона — Лейбница, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F[\varphi(t)]\Big|_{t=a}^{t=b} = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,,$$

т. е. установлено равенство (10.47). ▶

Теорема 34. *Пусть функция* f *интегрируема на отрезке* $[a\,,\,b]$*, а функция* $\varphi : [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow [a\,,\,b]$ *имеет интегрируемую производную, строго монотонная и такая, что* $\varphi(\alpha) = a\,,\ \varphi(\beta) = b$*. Тогда функция* $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ *интегрируема на* $[\alpha\,,\,\beta]$*, причем справедливо равенство* (10.47).

◀ Для определенности предположим, что $a < b\,,\ \alpha < \beta$. Пусть

[5] В этом пункте запись типа $[a\,,\,b]$ не означает, что обязательно $a < b$.

$P := (t_0\,, t_1\,, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ — разбиение отрезка $[\alpha\,,\,\beta]$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta\,,$$

а $\tau_k \in \Delta_k := [t_k\,,\, t_{k+1}]$ — отмеченные точки, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Составим соответствующую интегральную сумму функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ по отрезку $[\alpha\,,\,\beta]$

$$\sigma\,[(f \circ \varphi)\varphi'; P, \tau] = \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k)]\Delta t_k\,. \tag{10.48}$$

Обозначая $x_k := \varphi(t_k)$, $\xi_k := \varphi(\tau_k)$, получим разбиение $T = (x_0\,, x_1\,, x_2\,, \ldots, x_{n-1}\, x_n)$ отрезка $[a\,,\,b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_k\,,\, x_{k+1}]$. Используя это разбиение, построим интегральную сумму функции f по отрезку $[a\,,\,b]$ и преобразуем ее, применяя теорему Лагранжа «о конечных приращениях»

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\theta_k)\Delta t_k\,.$$

Тогда получим

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k)\varphi'(\theta_k)\Delta t_k\,. \tag{10.49}$$

Из того, что φ' интегрируема на $[\alpha\,,\,\beta]$, вытекает, что $|\varphi'(t)| \leqslant C$, и значит, $0 < \Delta x_k < C \cdot \Delta t_k$. Поэтому $\lambda(P) \to 0 \Longrightarrow \lambda(T) \to 0$, и при этом (10.49) сходится к интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$. Обозначая $M := \sup\limits_{[a,b]} |f(x)| < +\infty$, оценим разность между правыми частями равенств (10.48) и (10.49)

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k)]\Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k)]\varphi'(\theta_k)\Delta t_k\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f[\varphi(\tau_k)][\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\theta_k)]|\,\Delta t_k \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1} \omega(\varphi'; \Delta_k)\Delta t_k \to 0$$

при $\lambda(P) \to 0$ по критерию интегрируемости (теорема 19(d)), примененному к интегрируемой функции φ'.

Итак, пределы при $\lambda(P) \to 0$ интегральных сумм (10.48) и (10.49) совпадают. Приравнивая их, получим равенство (10.47). ▶

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$.

◀ Производя замену

$$1+x^2 = t\,; \quad 2xdx = dt\,; \quad x=0 \ \Rightarrow \ t=1\,; \quad x=1 \ \Rightarrow \ t=2\,,$$

имеем

$$\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 t^{1/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1^{3/2}\right) = \frac{\sqrt{8}-1}{3}\,. \ ▶$$

2) Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\cos x}$.

◀ Производя замену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\,,\ dt = \dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x} = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int\limits_0^1 dt = t\big|_0^1 = 1\,. \ ▶$$

3) Вычислить интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx\,, \quad (a>0)$.

◀ Производя замену $x = a\sin t\,,\ dx = a\cos t\cdot dt$, получим

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\cdot dt = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\cdot dt =$$
$$= a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}dt + \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t\cdot dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}\,. \ ▶$$

4. Интегрирование по частям

Теорема 35. *Пусть функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *имеют на отрезке* $[a, b]$ *интегрируемые производные. Тогда*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx\,. \qquad (10.50)$$

◀ По условию все функции u, u', v, v' интегрируемы на $[a, b]$. В силу критерия Лебега интегрируемы и их произведения. Из равенства

$$\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

следует, что функция $u(x)v(x)$ является первообразной для $u'(x)v(x)+ v'(x)u(x)$. По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b \left[u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\right]dx =$$

$$= \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx\,.$$

Отсюда непосредственно вытекает равенство (10.50). ▶

Замечание. Отметим, что формула (10.50) называется *формулой интегрирования по частям* (для определенного интеграла). Ради краткости ее обычно переписывают, опуская аргументы, в следующем виде:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\,.$$

Рекомендации по применению этой формулы — такие же, как и для формулы интегрирования по частям в случае неопределенного интеграла.

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$.

◀ Полагая

$$\left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right],$$

применим интегрирование по частям

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1\,. \ ▶$$

2) Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \ln x\, dx$.

◀ Положим

$$\left[\begin{matrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{matrix}\right].$$

Применяя интегрирование по частям, находим

$$\int\limits_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx = e\ln e - 1\cdot\ln 1 - (e-1) = 1\,. \ ▶$$

3) Вычислить интегралы $I_n := \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $J_n := \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

◀ При $n = 0$ и при $n = 1$ имеем соответственно

$$I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1\,.$$

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Применим интегрирование по частям, полагая:

$$\left[\begin{matrix} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x\, dx \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\, dx \\ v = -\cos x \end{matrix}\right].$$

Тогда получим

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n dx = -\sin^{n-1} x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot(1-\sin^2 x)dx = (n-1)I_{n-1} - (n-1)I_n\,.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Полагая в ней $n = 2k$ и $n = 2k+1$ соответственно, получим

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}\,, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\,.$$

Интеграл J_n заменой $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ сводится к интегралу I_n :

$$J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int\limits_{\pi/2}^{0} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]^n (-dt) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = I_n\,. \quad \blacktriangleright$$

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме определенного интеграла

Теорема 36. *Пусть функции* f , f' , ... , $f^{(n)}$ *непрерывны, а* $f^{(n+1)}$ *интегрируема на отрезке* $[a\,,\,x]$. *Тогда остаточный член формулы Тейлора*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \quad (10.51)$$

можно представить в следующей форме:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt\,. \qquad (10.52)$$

◀ Доказательство проведем методом полной индукции по числу n. К интегралу, входящему в формулу Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$$

применим интегрирование по частям, полагая

$$\left[\begin{array}{c|c} u = f'(t) & du = f''(t)dt \\ dv = dt & v = t - x \end{array}\right].$$

Тогда получим[6]

$$f(x) = f(a) + (t-x)f'(t)\Big|_{t=a}^{t=x} - \frac{1}{1!}\int\limits_a^x (t-x)f''(t)dt =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \int\limits_a^x \frac{(x-t)}{1!}f''(t)dt \quad (10.53)$$

и тем самым формула (10.52) доказана для $n = 1$. К последнему интегралу в (10.53) применим метод интегрирования по частям, полагая

$$\left[\begin{array}{c|c} u = f''(t) & du = f'''(t)dt \\ dv = \dfrac{(x-t)}{1!}dt & v = -\dfrac{(x-t)^2}{2!} \end{array}\right].$$

Тогда получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt\,. \quad (10.54)$$

Таким образом, формула (10.52) обоснована для $n = 2$. Предположим теперь, что выполняется следующее равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt\,. \quad (10.55)$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям, полагая

$$\left[\begin{array}{c|c} u = f^{(n)}(t) & du = f^{(n+1)}(t)dt \\ dv = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt & v = -\dfrac{(x-t)^n}{n!} \end{array}\right].$$

[6] В приводимых ниже формулах (и вообще в аналогичных ситуациях) двойная подстановка пишется в такой форме, из которой видно, *вместо какой переменной* надо подставлять.

Таким образом, (10.55) переписывается в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} +$$

$$+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\,,$$

что равносильно равенствам (10.51) и (10.52). ▶

Замечание. Отметим, что остаточный член в форме определенного интеграла (10.52) содержит в себе в качестве частных случаев полученные в главе 7 «глобальные» формы остаточного члена. При $1 \leqslant p \leqslant n+1$, предполагая, что функция $f^{(n+1)}$ непрерывна и применяя к интегралу (10.52) теорему 30 (первую теорему «о среднем»), найдем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-p+1} \cdot (x-t)^{p-1} dt =$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-p+1} \int_a^x (x-t)^{p-1}dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot p}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p\,.$$

Отсюда при $p = n+1$ получается остаточный член в форме Лагранжа, а при $p = 1$ — в форме Коши.

6. Вторая теорема «о среднем»

Теорема 37. *Предположим, что функция f интегрируема, а функция g монотонна на отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$. Тогда существует точка $\xi \in [a\,,\,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx\,. \tag{10.56}$$

◀ Если функция g — постоянная, то равенство (10.56) выражает свойство аддитивности интеграла и потому выполняется при любом

$\xi \in [a\,,\,b]$. Поэтому будем считать, что функция g — не постоянная, и предположим для определенности, что она *не возрастает.* Возьмем разбиение $T = (x_0\,, x_1\,, \ldots\, x_n)$, для которого

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\,.$$

Используя его, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)[g(x) - g(x_{k+1})]dx + \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx =: \rho + \sigma\,.$$

Полагая $\sup|f(x)| = K \in \mathbb{R}_+$ и обозначая $\Delta_k := [x_k\,,\, x_{k+1}]$, оценим сумму ρ

$$0 \leqslant |\rho| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|[g(x) - g(x_{k+1})]dx \leqslant K \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega(g; \Delta_k)\Delta x_k \to 0$$

при $\lambda(T) \to 0$, так как функция g, будучи монотонной, интегрируема. Таким образом, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma\,.$$

Вводя обобщенную первообразную $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$, преобразуем теперь сумму σ

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})[F(x_{k+1} - F(x_k)] =$$

$$= g(x_1)F(x_1) + g(x_2)[F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + g(x_n)[F(x_n) - F(x_{n-1})] =$$

$$= g(b)F(b) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)[g(x_k) - g(x_{k+1})]\,.$$

Обозначая $m := \inf F(x)$, $M := \sup F(x)$ и учитывая, что все разности $g(x_k) - g(x_{k+1})$ — неотрицательные, имеем следующие неравенства:

$$g(b)F(b) + m \cdot [g(x_1) - g(b)] \leqslant \sigma \leqslant g(b)F(b) + M \cdot [g(x_1) - g(b)]\,.$$

Отсюда в пределе при $\lambda(T) \to 0$ получим

$$g(b)F(b)+m\cdot[g(a)-g(b)] \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant g(b)F(b)+M\cdot[g(a)-g(b)]\,,$$

что равносильно следующему:

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx - g(b)F(b)}{g(a)-g(b)} \leqslant M\,.$$

Так как функция F непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, то по теореме о промежуточных значениях существует точка $\xi \in [a\,,\,b]$, такая, что

$$F(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx - g(b)F(b)}{g(a)-g(b)}\,.$$

Отсюда окончательно находим

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) + [g(a)-g(b)]F(\xi) =$$

$$= g(b)\int\limits_a^b f(x)dx + [g(a)-g(b)]\int\limits_a^\xi f(x)dx =$$

$$= g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx\,.$$

Случай, когда g не убывает, сводится к предыдущему изменением знака перед g. ▶

Задачи к главе 10

10.1. Сформулировать и доказать основные факты[7] теории пределов для предела функций от разбиений, понимаемого в смысле определения 9.

10.2. Привести пример неинтегрируемой по Риману функции f такой, что функция $|f|$ интегрируема по Риману.

10.3. Пусть функция $f\,:\,[0\,,\,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ интегрируема и $\int\limits_0^1 f(x)dx>0$. Доказать существование такого отрезка $[a\,,\,b]\subset[0\,,\,1]$, что $f\big|_{[a,b]}\geqslant 0$.

10.4. Доказать, что если непрерывная функция

$$f\,:\,[a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$

отлична от тождественного нуля, то существует такой отрезок $[\alpha\,,\,\beta]\subset[a\,,\,b]$, что $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx\neq 0$.

10.5. Доказать, что для непрерывной функции $f\,:\,[a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ из равенства $\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx=0$ следует равенство $f=0$.

10.6. Пусть функция $f\,:\,[0\,,\,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ монотонна или имеет ограниченную производную. Доказать, что

$$\exists C\in\mathbb{R}_+\quad\forall n\in\mathbb{N}\,:\,\left|\int\limits_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(k/n\right)\right|<\frac{C}{n}\,.$$

10.7. Пусть $f\,,\,g\,:\,[0\,,\,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ — непрерывные и возрастающие функции. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx\geqslant\int\limits_0^1 f(x)dx\cdot\int\limits_0^1 g(x)dx\,.$$

[7] Под «основными фактами» здесь понимаются теоремы о пределах, которые были использованы в этой главе без доказательств.

10.8. Предположим, что функции f, g : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ интегрируемы. Доказать неравенство Коши — Буняковского — Шварца:

$$\left(\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\right)^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2\,dx\,.$$

10.9. Пусть функция f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, и выполняется условие:

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \ \exists T \in \mathbb{R}_+ \ : \ \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx\,.$$

Доказать, что f — периодическая функция с периодом T.

10.10. Пусть функция f : $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая, и $f(1) - f(0) = 1$. Доказать, что $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx \geqslant 1$.

10.11. Пусть функция f : $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ — убывающая. Доказать, что

$$\forall \alpha \in (0, 1) \ : \ \int_0^\alpha f(x)dx \geqslant \int_0^1 f(x)dx\,.$$

10.12. Пусть функция f : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая. Доказать, что:

a) $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)e^{inx}dx = 0$.

10.13. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{n}$.

10.14. Предположим, что функции f, g : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы. Доказать интегрируемость следующих функций:

$$\max\{f, g\}\ ;\ \min\{f, g\}\ ;\ |f|;\ \sin f\,;\ f^2;\ \sqrt{|f|};\ \operatorname{arctg} f\,.$$

10.15. Предположим, что функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать, что:

a) четность функции f равносильна выполнению следующего условия:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int\limits_{-x}^{x} f(u)du = 2\int\limits_{0}^{x} f(u)\,du\,;$$

b) нечетность функции f равносильна выполнению следующего условия:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int\limits_{-x}^{x} f(u)du = 0\,.$$

10.16. Предположим, что функции $f\,,\,g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны. Доказать, что

$$\exists \theta \in [a\,,\,b] : \; g(\theta)\int\limits_{a}^{\theta} f(u)du = f(\theta)\int\limits_{\theta}^{b} f(u)du\,.$$

10.17. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, если:

a) $s_n = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^3+k^3}$; b) $s_n = \dfrac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3+n^3}$;

c) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+k^2}}$; d) $s_n = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(n^2+k^2)^2}$;

e) $s_n = \frac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 5^{k/n}$; f) $s_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}$;

g) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$; h) $s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \sin\frac{n}{n^2+k^2}$.

Глава 11
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Понятие несобственного интеграла, его сходимости и расходимости

Под *интегрированием* функции f в пределах от a до b понимается нахождение числа, зависящего от значений функции f на ориентированном промежутке $[a\,,\,b]$. Это число называется *интегралом*. Интеграл должен зависеть линейно от подынтегральной функции и аддитивно — от промежутка интегрирования. В предыдущей главе рассмотрено интегрирование по Риману. В настоящей главе рассматривается интегрирование некоторых классов функций, для которых интеграл в смысле Римана не существует.

1. Общие замечания

Для успешного построения теории определенного интеграла в смысле Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ существенно выполнение следующих условий:

1) отрезок $[a\,,\,b]$ конечен, т. е. $-\infty < a < b < +\infty$;
2) функция f ограничена на $[a\,,\,b]$;
3) функция f непрерывна почти всюду[1] на $[a\,,\,b]$.

◀ В самом деле, предположим, что условие 1) не выполнено, т. е. выполняется хотя бы одно из равенств $a = -\infty\,,\ b = +\infty$. Тогда по меньшей мере один из отрезков любого разбиения отрезка $[a\,,\,b]$ будет бесконечным, и потому теряет смысл интегральная сумма

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k\,.$$

Значит, не существует и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если же не выполнено хотя

[1] т. е. всюду, кроме множества меры нуль.

бы одно из условий 2), 3), то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует, так как в этих случаях не будут выполняться все условия критерия Лебега. ▶

Однако в приложениях возникает необходимость рассматривать интегралы по бесконечным промежуткам, а также интегралы от функций, неограниченных в окрестностях некоторых точек. Такие интегралы называются *несобственными*. Для обозначения несобственного интеграла от функции f в пределах a от до b обычно используется тот же символ, что и для интеграла Римана, т. е. $\int\limits_a^b f(x)dx$, и притом независимо от того, можно ли его считать равным некоторому числу или нельзя[2]. *Всюду в этой главе мы будем считать условие* 3) *выполненным.* Более того, будем предполагать, что множество всех точек, в окрестности которых функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ неограничена, является конечным. *Особыми точками (или особенностями)* несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ будем называть все точки отрезка $[a\,,\,b]$, в окрестности которых функция f не ограничена. К особым точкам присоединяются также точки $\pm\infty$ (одна или обе) в случае несобственных интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx\,, \quad \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,,$$

где $a\,,\,b \in \mathbb{R}$. Если особых точек нет вовсе, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ переходит в интеграл Римана.

[2] В тех случаях, когда это заранее не известно, символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ часто рассматривается как задача.

2. Сходимость и расходимость

Пусть $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, а функция

$$f\ :\ [a\,,\,\omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

интегрируема по Риману на любом отрезке $[a\,,\,b] \subset [a\,,\,\omega)$. В этом случае говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(t)dt$ *имеет единственную особенность, совпадающую с правым концом промежутка интегрирования (т. е. с верхним пределом интегрирования)*. Чтобы подчеркнуть, что единственной особенностью несобственного интеграла является точка ω, условимся использовать следующее обозначение:

$$\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx\,. \tag{11.1}$$

Определение 18. *Несобственный интеграл* (11.1) *с единственной особенностью в точке* ω *назовем сходящимся, если существует конечный предел*

$$\int\limits_a^{\to\omega} f(t)dt := \lim_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} \int\limits_a^{x} f(t)dt\,, \tag{11.2}$$

и этот предел полагаем равным данному интегралу. Если же предел (11.2) *равен бесконечности или не существует, то данный несобственный интеграл считается расходящимся, и ему никакого числового значения не приписывается.*

Пусть теперь $-\infty \leqslant \omega < b < +\infty$, а функция

$$f\ :\ (\omega\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

интегрируема по Риману на любом отрезке $[x\,,\,b\,] \subset (\omega\,,\,b]$. В этом случае говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_{\to\omega}^b f(t)dt$ *имеет единственную особенность, совпадающую с левым концом промежутка* *интегрирования (т. е. с нижним пределом интегрирования).* Его сходимость определяется аналогично предыдущему с помощью предела

$$\int\limits_{\to\omega}^{b} f(t)dt := \lim_{\substack{x\to\omega,\\ x>\omega}} \int\limits_{x}^{b} f(t)dt\,. \tag{11.3}$$

Если этот предел существует и является числом, то несобственный интеграл (11.3) считается сходящимся к этому числу, в остальных случаях — расходящимся. Расходящемуся интегралу никакого числового значения не приписывается.

Предположим, что $-\infty \leqslant \omega_1 < \omega_2 \leqslant +\infty$, а функция $f : (\omega_1\,, \omega_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a\,, b] \subset \subset (\omega_1\,, \omega_2)$. В этом случае несобственный интеграл $\int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)dx$ имеет в качестве особых точек только точки ω_1 и ω_2. Его сходимость или расходимость определяется с помощью свойства аддитивности

$$\int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)dx := \int\limits_{\to\omega_1}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\to\omega_2} f(x)dx\,, \tag{11.4}$$

где точка $c \in (\omega_1\,, \omega_2)$ фиксируется произвольно. Если оба интеграла правой части (11.4) сходятся, то считается сходящимся и интеграл $\int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)dx$, и ему приписывается числовое значение согласно равенству (11.4). Если хотя бы один из интегралов правой части (11.4) расходится, то считается расходящимся и интеграл[3] $\int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)dx$.

Предположим, наконец, что $\{\omega_0\,, \omega_1\,, \omega_2\,, \ldots, \omega_{n-1}\,, \omega_n\}$ — множество всех особых точек несобственного интеграла $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx$, где

$$-\infty \leqslant \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{n-1} < \omega_n \leqslant +\infty\,.$$

[3]Можно показать, что определение (11.4) — корректное, т. е. не зависит от выбора точки c.

Его сходимость или расходимость можно определить аналогично предыдущему с помощью свойства аддитивности

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} f(x)dx := \int\limits_{\to\omega_0}^{\to\omega_1} f(x)dx + \int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{\to\omega_{n-1}}^{\to\omega_n} f(x)dx\,. \qquad (11.5)$$

Он считается сходящимся (расходящимся), если сходятся все (не все) интегралы правой части равенства (11.5).

Таким образом, исследование на сходимость произвольного несобственного интеграла сводится к исследованию на сходимость конечного числа интегралов типа (11.2) и (11.3), имеющих единственную особую точку, совпадающую с одним из концов промежутка интегрирования. Поэтому в теоретических рассмотрениях мы ограничимся, в основном, несобственными интегралами типа (11.2). При решении практических задач могут, наоборот, встречаться несобственные интегралы общего вида.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость и вычислить интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,.$$

◀ Применяя определение 18, при $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_1^{N} x^{-\alpha}dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^N =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{N\to+\infty} [N^{1-\alpha} - 1] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,, & \alpha > 1\,, \\ +\infty, & \alpha < 1\,. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_1^{N} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to+\infty} \ln N = +\infty\,.$$

Ответ. При $\alpha > 1$ данный интеграл сходится, причем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\,.$$

При $\alpha \leqslant 1$ данный интеграл расходится. ▶

2) Исследовать на сходимость и вычислить интеграл

$$\int\limits_{\to a}^{b} \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\,, \quad \text{где} \quad -\infty < a < b < +\infty\,.$$

◀ Применяя определение (11.3),при $(\alpha \neq 1)$ имеем

$$\int\limits_{\to a}^{b} \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} \int\limits_{x}^{b} \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int\limits_{x}^{b} (t-a)^{-\alpha} d(t-a) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} \frac{(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{t=x}^{t=b} = \lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} \frac{(b-a)^{1-\alpha}-(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} & \text{при} \;\; 1-\alpha > 0\,, \\ +\infty \;\; \text{при} \;\; 1-\alpha < 0\,. \end{cases}$$

В случае $\alpha = 1$ имеем

$$\int\limits_{\to a}^{b} \frac{dt}{t-a} = \lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} \ln(t-a)\Bigg|_{x}^{b} = \lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} \ln\frac{b-a}{x-a} = +\infty\,.$$

Ответ. Данный интеграл сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. В случае сходимости он равен $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. ▶

В качестве самостоятельного упражнения предлагается исследовать на сходимость следующие интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{|x|^\alpha}\,, \quad \int\limits_{a}^{\to b} \frac{dt}{(b-t)^\alpha}\,, \quad \text{где} \;\; -\infty < a < b < +\infty \qquad ▶$$

3) Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{\to 0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$.

◀ Возможные особенности данного интеграла сосредоточены в точках $x = 0$ и $x = +\infty$. Поэтому разобьем интеграл на сумму

$$\int\limits_{\to 0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,.$$

Первый интеграл сходится только при $\alpha < 1$, а второй — только при $\alpha > 1$. Таким образом, данный интеграл *расходится*. ▶

4) Исследовать на сходимость и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+a^2}\,; \quad (a>0)\,.$$

◀ Так как $\int\limits_0^x \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, то по определению имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+a^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2a}\,.$$

Ответ. Интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2a}$. ▶

5) Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{\to 0}^{a} \ln t dt$ в зависимости от параметра $a \in (0\,,+\infty]$.

◀ Пусть сначала $a \in \mathbb{R}_+$. Тогда данный интеграл имеет единственную особенность в точке $t=0$. Используя определение сходимости, имеем

$$\int\limits_{\to 0}^{a} \ln t dt = \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \int\limits_x^a \ln t dt = \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} (t\ln t - t)\Big|_x^a =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} [(a\ln a - a) - (x\ln x - x)] = a\ln a - a\,.$$

Если $a=+\infty$, то имеем

$$\int\limits_{\to 0}^{+\infty} \ln t dt = \int\limits_{\to 0}^{1} \ln t dt + \int\limits_1^{+\infty} \ln t dt == -1 + \lim_{N\to+\infty}(t\ln t - t)\Big|_1^N =$$

$$= -1 + \lim_{N\to+\infty}(N\ln N - N) == -1 + \lim_{N\to+\infty}\left(N\ln\frac{N}{e}\right) = +\infty\,.$$

Ответ. Данный интеграл сходится при $a < +\infty$ и расходится при $a=+\infty$. ▶

6) Исследовать на сходимость и вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

◀ Единственная особенность данного интеграла — точка $x=1$. Поэтому, разбивая интеграл на два, имеем

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} = \int\limits_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{\to 1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \arcsin x\Big|_0^1 + \ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})\,. \quad ▶$$

7) Исследовать на сходимость и вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx\,, \ \alpha > 0\,.$$

◀ Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{\alpha}\,. \ ▶$$

§ 2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что

$$-\infty < a < \omega \leqslant +\infty\,,$$

а все подынтегральные функции, определенные на промежутке $[a\,,\,\omega)$, интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a\,,\,x] \subset [a\,,\,\omega)$.

Теорема 38. *Пусть функция* $f\,:\,[a\,,\,\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *неотрицательна на промежутке* $[a\,,\,\omega)$. *Тогда сходимость интеграла* $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)dt$ *равносильна ограниченности сверху обобщенной первообразной функции* $F(x) := \int\limits_a^{x} f(t)dt$.

◀ Так как $f(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [a\,,\,\omega)$, то функция $F(x)$ не убывает. По теореме о пределе монотонной функции существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} F(x) \leqslant +\infty$. Конечность этого предела равносильна ограниченности сверху функции F. ▶

Теорема 39 (признак сравнения). *Пусть* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *для всех* $x \in [a\,,\,\omega)$. *Тогда:*

(a) *если* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ *сходится;*

(b) *если* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ *расходится, то* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)dx$ *расходится.*

◀ По свойству монотонности интеграла Римана имеем:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)\,, \quad \text{где} \quad F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt\,, \quad G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt\,. \qquad (11.6)$$

Отсюда видно, что если $G(x)$ ограничена сверху, то и $F(x)$ ограничена сверху. Это в силу теоремы 38 означает, что справедливо утверждение (a). Из (11.6) следует, что если $F(x)$ неограничена, то и $G(x)$ неограничена. Это в силу теоремы 38 означает, что справедливо утверждение (b). ▶

Примеры.

1) Интеграл $\int\limits_{\to 0}^{1} \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$ сходится, так как справедливы неравенства

$$0 \leqslant \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

а интеграл $\int\limits_{\to 0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится.

2) Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x}dx$ расходится, так как справедливы неравенства

$$0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{2+\sin x}{x}\,,$$

и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

3) Интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ сходится, так как справедливы неравенства

$$0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x} \quad \text{при } x \geqslant 1\,,$$

а интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится.

Теорема 40 (признак сравнения). *Пусть для функций* $f\,,\,g\;:\;[a\,,\,\omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *выполняется условие* $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to \omega, x < \omega$. *Тогда:*

(a) *если* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ *сходится;*

(b) *если* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ *расходится, то и* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)dx$ *расходится.*

◀ По определению понятия $f = O(g)$ имеем:

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists x_0 \in [a\,,\,\omega) \;\; \forall x \in [x_0\,,\,\omega):\; 0 \leqslant f(x) \leqslant K \cdot g(x)\,.$$

Так как на отрезке $[a\,,\,x_0]$ обе функции f и g интегрируемы по Риману и, следовательно, ограничены, то существует константа $M \in [K\,,\,+\infty)$, такая, что

$$\forall x \in [a\,,+\infty):\quad f(x) \leqslant M \cdot g(x)\,.$$

Из этих неравенств в силу предыдущей теоремы вытекает справедливость утверждений (a) и (b), так как сходимость интеграла от функции $g(x)$ равносильна, очевидно, сходимости интеграла от функции $M \cdot g(x)$. ▶

В качестве **примера** докажем сходимость интеграла $\int\limits_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^\alpha} dx$ при $\alpha > 1$.

◀ Зададим $\varepsilon > 0$ так, чтобы было: $\alpha - \varepsilon > 1$. Применяя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(\ln x)^{p-1}}{\varepsilon x^\varepsilon} = \ldots = 0\,.$$

Отсюда находим

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists x_0 \in [2,+\infty) \;\; \forall x \leqslant x_0:\; \left|\frac{(\ln x)^p}{x^\varepsilon}\right| \leqslant K\,,$$

(так как функция, имеющая конечный предел, финально ограничена). Из последнего равенства следует, что

$$\frac{(\ln x)^p}{x^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty\,.$$

Так как $\alpha - \varepsilon > 1$, то интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}}$ сходится, и в силу теоремы 40 данный интеграл тоже сходится. ▶

Теорема 41 (признак сравнения). *Пусть* $f, g : [a\,,\,\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ — *положительные функции, и*

$$\lim_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [0\,,\,+\infty]\,.$$

Тогда:

(a) *при* $0 \leqslant k < +\infty$ *из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)d$;

(b) *при* $0 < k \leqslant +\infty$ *из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)dx$;

(c) *при* $0 < k < +\infty$ *данные интегралы либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

◀ В случае (a) будет: $f(x) = O(g(x))$ при $x \to \omega, x < \omega$, в случае (b) будет: $g(x) = O(f(x))$ при $x \to \omega, x < \omega$, а в случае (c) выполняются оба эти соотношения. Поэтому доказываемая теорема является следствием предыдущей. ▶

Следствие 1. *Пусть* $f : [a\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ — *неотрицательная функция, и* $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R}_+ : \lim\limits_{x \to +\infty} [x^\alpha \cdot f(x)] = A$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

◀ В самом деле, условие следствия равносильно тому, что $f(x) \asymp \dfrac{1}{x^\alpha}$ при $x \to +\infty$. Но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. На основании предыдущей теоремы такой же характер сходимости должен иметь и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. ▶

В качестве **примера** исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, где

$$P(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\,, \; Q(x) \equiv x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m\,,$$

— многочлены от x, причем $\forall x \in \mathbb{R} : \; Q(x) \neq 0$.

◀ Так как

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(1 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(1 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_m}{x^m}\right)} \approx \frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} \quad \text{при} \quad x \to \infty\,,$$

то при $m - n \geqslant 2$ данный интеграл сходится, а при $m - n \leqslant 1$ — расходится. ▶

Следствие 2. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, *а* $f : [a\,, b) \to \mathbb{R}_+$ — *неотрицательная функция, для которой выполняется условие*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \ \ \exists A \in \mathbb{R}_+ : \ \lim_{\substack{x \to b, \\ x < b}} (b-x)^\alpha \cdot f(x) = A\,.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится при* $\alpha < 1$ *и расходится при* $\alpha \geqslant 1$.

◀ В самом деле, условие следствия равносильно тому, что $f(x) \asymp \dfrac{A}{(b-x)^\alpha}$ при $x \to b, x < b$. Поэтому данный интеграл имеет такой же характер сходимости, что и интеграл $\int\limits_a^{\to b} \dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}$. ▶

Примеры. 1) Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_{\to 0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x + \cos x)}\,.$$

◀ Данный интеграл имеет особенности в двух точках: $x = 0$ и $x = +\infty$. При $x \to +0$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x + \cos x))} \asymp \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

поэтому в окрестности точки $x = 0$ имеет место сходимость $(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1)$. При $x \to +\infty$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x + \cos x)} \asymp \frac{1}{x^{3/2}}\,,$$

поэтому и *в окрестности* точки $x = +\infty$ имеет место сходимость $(\alpha = 3/2 > 1)$.

Ответ. Данный интеграл сходится. ▶

2) Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{\to 0}^{\to 1} \dfrac{2^x + 1}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} dx$.

◀ Данный интеграл имеет особенности в двух точках: $x = 0$ и $x = 1$. При $x \to +0$ имеем $\dfrac{2^x + 1}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} \sim \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. При $x \to 1$ имеем $\dfrac{2^x + 1}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} \sim \dfrac{3}{\sqrt{1-x}}$. Отсюда видно, что данный интеграл сходится. ▶

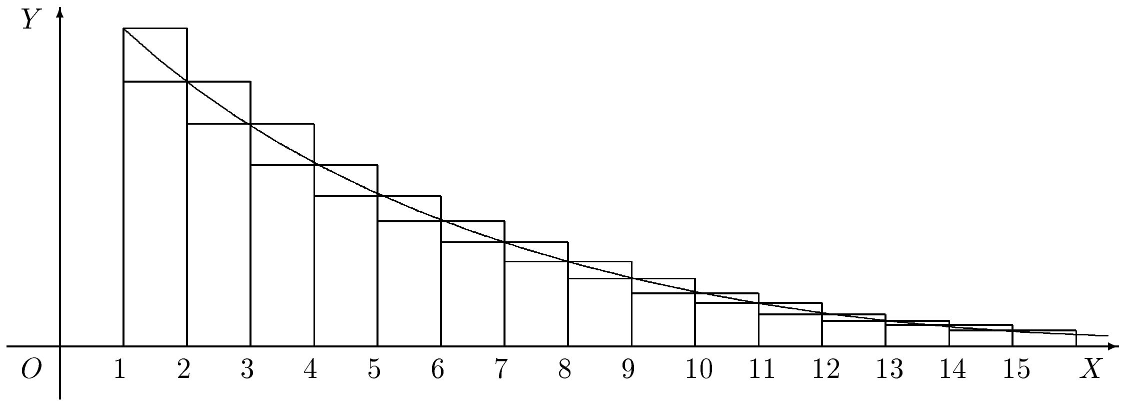

Рис. 6. К интегральному признаку сходимости рядов

Теорема 42 (интегральный признак сходимости рядов). *Пусть неотрицательная функция* $f : [1\,, +\infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ *не возрастает. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

◀ Функция $f : [1, +\infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, будучи монотонной, интегрируема по Риману на любом конечном отрезке. При каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$k \leqslant x \leqslant k+1 \quad \Longrightarrow \quad f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)\,.$$

Интегрируя последние неравенства по переменной x в пределах от k до $(k+1)$, находим (см. рис. 6)

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)\,.$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до $(n-1)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)\,. \tag{11.7}$$

Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ — частичная сумма данного ряда. Перепишем неравенства (11.7) в следующем равносильном виде

$$s_n - f(1) \leqslant \int\limits_1^n f(x)dx \leqslant s_{n-1} \,.$$

Отсюда легко следует заключение теоремы. В самом деле, предполагая, что ряд сходится к сумме s, обозначая $[x] = n$, имеем

$$\int\limits_1^x f(t)dt \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(t)dt \leqslant s \,,$$

откуда в силу теоремы 38 делаем заключение о сходимости интеграла.

Обратно, если интеграл сходится, то

$$s_n \leqslant f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \,,$$

откуда делаем заключение о сходимости ряда. ▶

Рассмотрим в качестве **примера** обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$. По интегральному признаку его сходимость равносильна сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, который, как было показано выше, сходится при $\alpha > 1$ расходится при $\alpha \leqslant 1$. Это же заключение справедливо для ряда в силу интегрального признака.

Рассмотрим, далее, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}$.

Применяя интегральный признак и производя в интеграле замену $\ln x = t$, получим

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^\alpha} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \,.$$

Отсюда в силу интегрального признака заключаем, что данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Аналогично можно показать,что ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

§ 3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле

В этом параграфе ограничимся рассмотрением несобственных интегралов с единственной особенностью на правом (верхнем) конце промежутка интегрирования $[a\,,\,\omega)$.

Теорема 43 (критерий Коши). *Для сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)dt$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists x_\varepsilon\in[a,\omega)\ \ \forall x',x''\in[x_\varepsilon,\omega)\ :\ \left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\right|\leqslant\varepsilon\,. \tag{11.8}$$

◀ По определению сходимость данного интеграла равносильна существованию конечного предела

$$\lim_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} F(x)\,,\quad \text{где}\quad F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

— обобщенная первообразная. Применяя к ней критерий Коши существования конечного предела функции, получим условие

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists x_\varepsilon\in[a,\omega)\ \ \forall x',x''\in[x_\varepsilon,\omega)\ :\ |F(x')-F(x'')|\leqslant\varepsilon\,,$$

которое равносильно условию (11.8). ▶

Замечание. Имеется некоторая аналогия между свойствами, связанными со сходимостью рядов и несобственных интегралов. Например, как для рядов, так и для несобственных интегралов справедлив критерий Коши. Однако необходимый признак сходимости ряда:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}\right)\quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

не имеет аналога для несобственных интегралов. Именно, из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ не следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} f(x)=0$. В самом деле, пусть, например,

$$f(x)=\begin{cases} x\,, & x=n\in\mathbb{N}\,,\\ 0\,, & x\notin\mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}_+ : \int\limits_1^x f(t)\,dt = 0$, так как функция f равна нулю всюду на $[1\,,\,x]$, кроме конечного числа точек. Поэтому интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0$, т. е. сходится. Однако предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует.

Рассмотрим менее тривиальный пример. Ниже будет показано, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^\varepsilon \sin(x^2)\,dx$ сходится при $0 < \varepsilon < 1/2$. Полагая

$$x_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,,$$

имеем

$$\lim_{k\to\infty} x_k^\varepsilon \sin(x_k^2) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{\varepsilon/2} = +\infty\,.$$

Отсюда видно, что равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\varepsilon \sin(x^2) = 0$ не может выполняться.

Определение 19. *Несобственный интеграл от функции f называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл с теми же пределами от функции $|f|$.*

Теорема 44. *Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.*

◀ Так как по условию интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} |f(x)|dx$ сходится, то должно выполняться условие критерия Коши

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in [a, \omega) \;\; \forall x', x'' \in [x_\varepsilon, \omega) \;:\; \left|\int\limits_{x'}^{x''} |f(t)|dt\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

При тех же x', x'' имеем

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x'}^{x''} |f(t)|dt\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Таким образом, условие критерия Коши выполнено для интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)dt$, и поэтому он сходится. ▶

Замечание. Используя теорему 44, для исследования сходимости несобственных интегралов можно использовать свойство абсолютной сходимости, т. е. сводить дело к исследованию на сходимость интегралов от неотрицательных функций. К таким интегралам могут быть применены теоремы, изложенные в предыдущем параграфе.

Рассмотрим, например, интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx\,, \tag{11.9}$$

где $a \in \mathbb{R}\,,\ \lambda \in (1\,, +\infty)$ — параметры. Так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ при $\lambda > 1$ сходится, то из неравенств

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos ax}{x^\lambda}\right| \leqslant \frac{1}{x^\lambda} \ \text{ и } \ 0 \leqslant \left|\frac{\sin ax}{x^\lambda}\right| \leqslant \frac{1}{x^\lambda}$$

на основании признака сравнения следует абсолютная сходимость обоих интегралов. По теореме 44 оба интеграла (11.9) сходятся при $\lambda > 1$.

Определение 20. *Несобственный интеграл от функции f называется сходящимся условно, если он сходится, а интеграл от функции $|f|$ (в тех же пределах) расходится.*

Для исследования сходимости (абсолютной или условной) несобственных интегралов можно использовать критерий Коши. В этих же целях можно использовать следующие два достаточных признака, которые обосновываются с помощью критерия Коши.

Теорема 45 (признак Дирихле). *Если функция $g : [a\,, \omega) \to \mathbb{R}$ не возрастает, и $\lim\limits_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} g(x) = 0$, а функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a\,, \omega)$, то интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)g(t)dt$ сходится.*

◀ Обозначим $M = \sup|F(x)|$ при $x \in [a\,, \omega)$. Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} g(x) = 0$, то $\exists c_\varepsilon \in [a\,, \omega)$, такое, что $0 \leqslant g(c_\varepsilon) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

Тогда $\forall x', x'' \in [c_\varepsilon\,, \omega)$ в силу второй теоремы «о среднем» имеем

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt\right| = \left|g(x')\int\limits_{x'}^{\xi} f(t)dt + g(x'')\int\limits_{\xi}^{x''} f(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\cdot\left|\int\limits_{x'}^{\xi} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot\left|\int\limits_{\xi}^{x''} f(t)dt\right| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4M}\cdot\left(|F(\xi) - F(x'')| + |F(x'') - F(\xi)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 4M = \varepsilon\,,$$

где $x' < \xi < x''$. Из этих выкладок вытекает

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists c_\varepsilon \in [a, \omega)\ \ \forall x', x'' \in [c_\varepsilon, \omega):\ \left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt\right| \leqslant \varepsilon\,,$$

т. е. для интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)g(t)dt$ выполнено условие критерия Коши, и потому он сходится. ▶

Теорема 46 (признак Абеля). *Если функция $g : [a\,, \omega) \to \mathbb{R}$ монотонна и ограничена, а интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)dt$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)g(t)dt$ сходится.*

◀ Обозначим $L = \sup|g(x)|$ при $x \in [a\,, \omega)$. Задавая $\varepsilon > 0$ и применяя к интегралу $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)dt$ критерий Коши, найдем $c_\varepsilon \in [a\,, \omega)$ так, чтобы $\forall x', x'' \in [c_\varepsilon\,, \omega)$ было

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L}\,.$$

При тех же значениях x', x'' в силу второй теоремы «о среднем» имеем

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)g(t)dt\right| = \left|g(x')\int\limits_{x'}^{\xi} f(t)dt + g(x'')\int\limits_{\xi}^{x''} f(t)dt\right| \leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon\,.$$

Таким образом, для интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(t)g(t)dt$ выполнено условие критерия Коши. ▶

В качестве **примеров** снова рассмотрим интегралы (11.9), принимая на этот раз $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$. Полагая $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$, $f(x) = \cos ax$, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, и

$$\left|\int\limits_1^x f(t)dt\right| = \left|\int\limits_1^x \cos at\,dt\right| = \left|\frac{\sin ax - \sin a}{a}\right| \leqslant \frac{2}{|a|}\,.$$

Аналогично,

$$\left|\int\limits_1^x \sin at\,dt\right| \leqslant \frac{2}{|a|}\,.$$

Таким образом, для интегралов (11.9) выполнены условия признака Дирихле. Применяя его, заключаем, что интегралы (11.9) сходятся при $\lambda > 0$.

Ранее было доказано, что интегралы (11.9) сходятся абсолютно при $\lambda > 1$. Покажем, что *они сходятся условно при* $0 < \lambda \leqslant 1$, $a \neq 0$.

◀ Предположим противное: при $0 < \lambda \leqslant 1$ интегралы (11.9) сходятся абсолютно. Тогда из неравенств

$$0 \leqslant |\cos^2 ax| \leqslant |\cos ax|\,, \quad 0 \leqslant |\sin^2 ax| \leqslant |\sin ax|$$

в силу признака сравнения вытекает сходимость интегралов

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 ax}{x^\lambda}dx \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^\lambda}dx\,.$$

Однако эти интегралы расходятся. В самом деле, имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 ax}{x^\lambda}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2ax}{x^\lambda}dx\,;$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^\lambda}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x^\lambda}dx\,.$$

Оба эти равенства противоречивы, так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ расходится при $0 < \lambda \leqslant 1$. ▶

Задачи к главе 11

11.1. Доказать следующий **принцип локализации**: ответ на вопрос о сходимости несобственного интеграла вида $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ зависит только от ростка функции f в проколотой окрестности точки ω (или, что равносильно, только от асимптотики функции f при $x \to \omega$, $x < \omega$).

11.2. Сформулировать и доказать обобщение формулы Ньютона — Лейбница на случай сходящихся несобственных интегралов.

11.3. Предположим, что функции $f, g \,:\, [a\,, \omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируемы, сходится интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)g'(x)dx$, и существует конечный предел

$$f(\to \omega)g(\to \omega) := \lim_{\substack{x\to\omega,\\ x<\omega}} f(x)g(x)\,.$$

Доказать сходимость интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f'(x)g(x)dx$ и следующую формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^{\to\omega} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{\to\omega} - \int\limits_a^{\to\omega} f(x)g'(x)dx\,.$$

11.4. Пусть функция $f \,:\, [a\,, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. Может ли сходиться интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$?

11.5. Пусть сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, где f — монотонная функция. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

11.6. Пусть при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_0^1 x^\alpha f(x)dx$, где f — монотонная функция. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha+1} f(x)dx = 0$.

11.7. Найти множества значений параметра α, для которых сходятся следующие интегралы:

a) $\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha \ln x} dx\,;$ b) $\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^\alpha} dx\,;$

c) $\int\limits_{a}^{b} \dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}\,;$ d) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^\alpha dx\,;$

e) $\int\limits_{1}^{+\infty} x^\alpha \cdot \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x} dx\,;$ f) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{1-\cos x}{x^\alpha} dx\,;$

g) $\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{dx}{(\sin x)^\alpha}\,;$ h) $\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{dx}{(\cos x)^\alpha}\,.$

11.8. Доказать, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0\,; \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

11.9. Пусть сходятся интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} |g(x)|^2\, dx$. Доказать абсолютную сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) g(x) dx$.

11.10. Предположим, что функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ — непрерывно дифференцируемая, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty$. Доказать существование конечных пределов $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

11.11. Предположим, что функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая, и сходятся интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx,.$$

Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$

11.12. Исследовать на сходимость и вычислить следующие несобственные интегралы:

a) $\int\limits_0^1 \ln x dx\,;$ b) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x} dx\,;$

c) $\int\limits_0^1 x \ln x dx\,;$ d) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx\,;$

e) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx\,;$ f) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x} \sin x dx\,;$

g) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx\,;$ h) $\int\limits_0^1 (\ln x)^n dx\,;$

i) $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx\,;$ j) $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx\,;$

k) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}\,;$ l) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{-2}}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx\,;$

m) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x dx\,;$ n) $\int\limits_0^{\pi} x \ln \sin x dx\,;$

o) $\int\limits_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx\,;$ p) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx\,.$

Глава 12
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Вычисление площадей плоских фигур и объемов некоторых тел

1. Элементы топологии на плоскости

Через $\mathbb{R}^2$ обозначим координатную плоскость XOY. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ через $\mathbf{C}A$ будем обозначать его дополнение, т. е. положим $\mathbf{C}A := \mathbb{R}^2 \diagdown A$. Например, $\mathbf{C}\varnothing = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{C}\mathbb{R}^2 = \varnothing$. Точка $(x_1\,,\, y_1) \in A$ называется *внутренней* точкой множества A, если существует открытый круг

$$U_{r_1}(x_1, y_1) := \left\{(x\,, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < r_1\right\},$$

такой что $U_{r_1}(x_1, y_1) \subset A$. Совокупность всех внутренних точек множества A называется его *внутренностью* и обозначается через A°. Точка $(x_2\,,\, y_2)$ называется *внешней* по отношению к множеству A, если она является внутренней точкой множества $\mathbf{C}A$ (дополнения). Множество $(\mathbf{C}A)^\circ$ называется *внешностью* множества A. Точка $(x_3\,,\, y_3)$ называется *граничной* точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней его точкой (т. е. если в любой окрестности точки $(x_3\,,\, y_3)$ существуют точки, принадлежащие множеству A, и существуют точки, не принадлежащие множеству A). Совокупность всех граничных точек множества A называется его *границей.* Условимся в этой главе границу множества A обозначать символом $\mathbf{Fr}\, A$. Так как любая точка $(x\,,\, y) \in \mathbb{R}^2$ является либо внутренней, либо граничной, либо внешней точкой множества A, то справедливо равенство

$$\mathbb{R}^2 = A^\circ \sqcup \mathbf{Fr}\, A \sqcup (\mathbf{C}A)^\circ\,, \tag{12.1}$$

где символом $\sqcup$ обозначено объединение *дизъюнктных* (т. е. попарно не пересекающихся) множеств.

Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ называется *открытым в* $\mathbb{R}^2$, если все его точки — внутренние, т. е. если $X = X^\circ$. Напомним основные свойства (аксиомы) открытых множеств применительно к $\mathbb{R}^2$.

O_1 *Множества* $\varnothing$ *и* $\mathbb{R}^2$ *открыты.*

O_2 *Объединение любого семейства открытых множеств открыто.*

O_3 *Пересечение любого конечного семейства открытых множеств открыто.*

Поскольку понятие открытого в $\mathbb{R}$ множества определялось, то сформулированные здесь утверждения O_1 — O_3 являются *теоремами.* Доказательства их простые, и их предлагается провести читателю самостоятельно.

Множество $Y \subset \mathbb{R}^2$ называется *замкнутым* в $\mathbb{R}^2$, если его дополнение $\mathbf{C}Y = \mathbb{R}^2 \diagdown Y$ открыто в $\mathbb{R}^2$.

Перечислим основные свойства замкнутых множеств.

З_1 *Множества* $\mathbb{R}^2$ *и* $\varnothing$ *замкнуты.*

З_2 *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

З_3 *Объединение любого конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Эти свойства равносильны соответственно свойствам O_1 — O_3. Предлагается доказать это с помощью перехода к дополнениям.

Граница $\mathbf{Fr}\, A$ любого множества замкнута. Это следует из равенства (12.1), т. е. $\mathbf{Fr}\, A = \mathbb{R}^2 \diagdown (A^\circ \sqcup (CA)^\circ)$ является замкнутым множеством как дополнение к открытому множеству. Замыканием множества A называется наименьшее замкнутое множество $\overline{A}$, содержащее A. Можно показать, что

$$\overline{A} = A \cup \mathbf{Fr}\, A = A^\circ \sqcup \mathbf{Fr}\, A\,.$$

Итак, для любого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ имеет место следующая цепочка включений

$$\varnothing \subset A^\circ \subset A \subset \overline{A} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Из утверждений O_1, З_1 вытекает, что каждое из множеств $\varnothing$ и $\mathbb{R}^2$ является открыто-замкнутым (т. е. и открытым и замкнутым). Введем новое понятие *свя́зного множества.*

Определение 21. *Топологическое пространство X называется связным, если не существует его представления в виде объединения двух непустых непересекающихся открыто-замкнутых множеств. Подмножество топологического пространства называется связным, если оно является связным как топологическое пространство, с индуцированной топологией.*

Лемма 1. *Любой прямолинейный отрезок $l \subset \mathbb{R}^2$ связен.*

◀ Прямолинейным отрезком с концами в точках $(a_1\,,\,b_1)$ и $(a_2\,,\,b_2)$ называется множество

$$l := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = (1-t)a_1 + ta_2\,,\ y = (1-t)b_1 + tb_2\,,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}.$$

Очевидно, что отрезок l — замкнутое в $\mathbb{R}^2$ множество. Предполагая, что он *не является связным*, заключаем, что существуют замкнутые в $\mathbb{R}^2$ множества E_1 и E_2 такие, что

$$E_1 \neq \varnothing,\ E_2 \neq \varnothing,\ E_1 \cap E_2 = \varnothing,\ E_1 \sqcup E_2 = l\,.$$

Построим функцию $f : l \longrightarrow \mathbb{R}$, задавая ее равенством

$$f(x,y) = \begin{cases} -1, & (x,y) \in E_1\,, \\ +1\,, & (x,y) \in E_2\,. \end{cases} \tag{12.2}$$

Найдем полные прообразы подмножеств множества $\{-1\,;+1\}$:

$$\begin{aligned} &f^{-1}(\varnothing) = \varnothing\,, \\ &f^{-1}(\{-1\}) = E_1\,, \\ &f^{-1}(\{+1\}) = E_2\,, \\ &f^{-1}(\{-1,+1\}) = E_1 \sqcup E_2 = l\,. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12.2) видно, что полный прообраз $f^{-1}(A)$ любого замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}$ есть одно из множеств $\varnothing$, E_1, E_2, l, т. е. замкнутое множество. В частности, *полный прообраз любого замкнутого множества замкнут.* Отсюда на основании критерия непрерывности заключаем, что функция f *непрерывна* на l. Но тогда по теореме о промежуточных значениях функция f должна принимать на l все значения, заключенные между -1 и $+1$. Но так как f принимает только значения -1 и $+1$, то мы получили противоречие. ▶

2. Многоугольные фигуры на плоскости и их площади

Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется *ограниченным*, если существует квадрат $K \subset \mathbb{R}^2$, такой, что $A \subset K$.

Определение 22. *Плоской фигурой будем называть любое ограниченное множество точек плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Определение 23. *Плоская фигура A называется многоугольной, если ее границу $\mathbf{Fr}\,A$ можно представить в виде объединения конечной совокупности прямолинейных отрезков. Пустое множество также считается многоугольной фигурой.*

Так как для многоугольных фигур $\mathbf{Fr}(\mathbf{Fr}\,A) = \mathbf{Fr}\,A$, *то граница любой многоугольной фигуры в свою очередь является многоугольной фигурой.*

Кроме того, можно показать, что *любые конечные объединения, пересечения, разности многоугольных фигур снова являются многоугольными фигурами.*

Пользуясь формулами школьной геометрии, можно найти площадь $\mu(A)$ любой многоугольной фигуры A. В случае, когда многоугольная фигура A не имеет внутренних точек, т. е. когда $A \subset \mathbf{Fr}\,A$, полагаем $\mu(A) := 0$. На этом основании для любой многоугольной фигуры A полагаем $\mu(\mathbf{Fr}\,A) = 0$ и потому

$$\mu(A) := \mu(A^\circ) = \mu(\overline{A}).$$

Далее, любую замкнутую многоугольную фигуру можно представить в виде объединения замкнутых треугольников без общих внутренних точек. Вычисляя площади треугольников по известным из школьного курса формулам, *находим площадь замкнутой многоугольной фигуры как сумму площадей всех составляющих ее треугольников.* Можно показать, что так определенная площадь не зависит от способа разбиения многоугольной фигуры на треугольники. Кроме того, площади многоугольных фигур обладают следующими основными свойствами, которыми в дальнейшем будем пользоваться:

1° (неотрицательность) *для любой многоугольной фигуры $A \subset \mathbb{R}^2$ имеем $\mu(A) \geqslant 0$;*

2° (аддитивность) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$;

3° (монотонность) $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leqslant \mu(A_2)$;

4° (инвариантность) *если фигуры* A_1 *и* A_2 *конгруэнтны, то* $\mu(A_1) = \mu(A_2)$;

5° $\mu(\mathbf{Fr}\, A) = 0$ *для любой многоугольной фигуры* A.

Свойство 5° означает, что площадь многоугольной фигуры A не зависит от того, принадлежат ли фигуре A все или некоторые ее граничные точки. В частности, справедливы следующие равенства:

$$\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\overline{A})\,.$$

3. Квадрируемые фигуры

Желая обобщить понятие площади на более общие фигуры, чем многоугольные, зададим произвольную фигуру $A \subset \mathbb{R}^2$ и найдем такие многоугольные фигуры P и Q, что

$$P^\circ \subset A \subset \overline{Q}$$

Такие фигуры существуют, так как в качестве P всегда можно взять множество $\varnothing$, поскольку оно включено в число многоугольных фигур, а в качестве Q — квадрат $K \supset A$. Так как $P^\circ \subset \overline{Q}$, то $\mu(P) \leqslant \mu(Q)$ в силу свойства монотонности 3°. Из этого неравенства следует, что множество площадей всех «вписанных в A» многоугольных фигур P ограничено сверху, а множество площадей всех «описанных около A» многоугольных фигур ограничено снизу. Поэтому естественно дать следующее определение.

Определение 24. *Нижней и верхней площадями плоской фигуры* A *называются числа* $\mu_*(A)$ *и* $\mu^*(A)$, *которые находятся соответственно по следующим формулам:*

$$\mu_*(A) := \sup_P \mu(P)\,; \;\; \mu^*(A) := \inf_Q \mu(Q)\,,$$

где точные границы берутся по всевозможным многоугольным фигурам P *и* Q, *таким, что* $P^\circ \subset A \subset \overline{Q}$.

Из теоремы существования точных границ и из неравенств

$$0 \leqslant \mu(P) \leqslant \mu(Q) \leqslant \mu(K)$$

следует, что для любой плоской фигуры оба числа $\mu_*(A)$ и $\mu^*(A)$ существуют и связаны неравенствами

$$0 \leqslant \mu_*(A) \leqslant \mu^*(A) < +\infty\,.$$

Определение 25. *Плоская фигура A называется квадрируемой, если ее нижняя и верхняя площади равны между собой, а их общее значение называется площадью фигуры A и обозначается символом $\mu(A)$, т. е.*

$$\mu(A) := \mu_*(A) = \mu^*(A).$$

Квадрируемые фигуры называют иногда *множествами, измеримыми по Жордану*[1], а площадь квадрируемой фигуры — *мерой Жордана* этой фигуры.

Замечания. 1. Важным подклассом класса квадрируемых фигур являются *фигуры площади нуль.* Любое подмножество фигуры площади нуль само является фигурой площади нуль. Объединение и пересечение конечного числа фигур площади нуль снова являются фигурами площади нуль.

2. Очевидно, что любая многоугольная фигура квадрируема, а ее площадь в смысле определения 25 совпадает с площадью в том смысле, как она определялась для многоугольных фигур. Таким образом, определение 25 распространяет понятие площади на более общие классы плоских фигур, чем многоугольные.

3. Не следует, однако, думать, что определение 25 позволяет приписать площадь любой плоской фигуре, т. е. что все плоские фигуры квадрируемы. Примером неквадрируемой фигуры является множество A, состоящие из всех точек единичного квадрата, имеющих рациональные координаты, т. е.

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}. \tag{12.3}$$

Верхняя площадь этой фигуры, очевидно, равна 1, т. е. $\mu^*(A) = 1$. В силу свойства плотности множества $\mathbb{Q}$ не существует непустых многоугольных фигур P°, таких, что $P^\circ \subset A$. Поэтому $\mu_*(A) = 0$. Таким образом, $\mu_*(A) \neq \mu^*(A)$, и значит, фигура (12.3) не квадрируема (или, как говорят, *не измерима по Жордану*).

Приведем теперь критерий квадрируемости плоских фигур.

[1] *Жордан* Камиль Мари Энмон (1838—1922) — французский математик.

Теорема 47. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — плоская фигура. Равносильны следующие утверждения:*

(a) *фигура A квадрируема;*

(b) *для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольные фигуры P и Q такие, что $P^\circ \subset A \subset \overline{Q}$ и $0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \varepsilon$;*

(c) *для любого $\varepsilon > 0$ существуют квадрируемые фигуры P и Q такие, что $P^\circ \subset A \subset \overline{Q}$ и $0 \leqslant \mu(\overline{Q}) - \mu(P) \leqslant \varepsilon$;*

(d) *граница $\mathbf{Fr}\, A$ является фигурой площади нуль.*

◀ (a)$\Rightarrow$ (b). Так как фигура A квадрируема, то $\mu(A) = \mu_*(A) = \mu^*(A)$. Задавая $\varepsilon > 0$, заключаем, что существуют многоугольные фигуры P и Q, такие, что

$$P^\circ \subset \overline{Q}\,;\ 0 \leqslant \mu(A) - \mu(P) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,;\ 0 \leqslant \mu(Q) - \mu(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Складывая эти неравенства, получим $0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \varepsilon$.

(b)$\Rightarrow$(c) Это утверждение следует из того, что все многоугольные фигуры квадрируемы.

(c)$\Rightarrow$(a) Задавая $\varepsilon > 0$ и используя условие (c), найдем квадрируемые фигуры P и Q, такие, что

$$P^\circ \subset A \subset \overline{Q},\ 0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \varepsilon\,.$$

Так как P и Q квадрирууемы, то существуют многоугольные фигуры P и Q такие, что

$$P^\circ \subset A \subset Q,\ 0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \varepsilon\,.$$

Так как P и Q квадрируемы, то существуют многоугольные фигуры P и Q, такие, что

$$P^\circ \subset P^\circ,\ \ 0 \leqslant \mu(P) - \mu(P) \leqslant \varepsilon\,,\ \ Q \supset Q\,,\ 0 \leqslant \mu(Q) - \mu(Q) \leqslant \varepsilon\,.$$

Складывая все полученные неравенства, находим:

$$0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant 3\varepsilon\,.$$

Кроме того, $P^\circ \subset \overline{Q}$, а так как $\mu(P) \leqslant \mu_*(A) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu(Q)$, то $0 \leqslant \mu^*(A) - \mu_*(A) \leqslant 3\varepsilon$. Отсюда в силу произвольноссти ε заключаем, что $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, т. е. A квадрируема.

Предположим, что фигура $A \subset \mathbb{R}^2$ квадрируема. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 47(b) существуют многоугольные фигуры P и Q, такие, что

$$P^\circ \subset A \subset A \subset A^\circ \cup \mathbf{Fr}\, A \subset \overline{A} \subset \overline{Q}, \text{ и } 0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \varepsilon\,.$$

Отсюда следует, что для многоугольной фигуры $\overline{F} = \overline{Q \diagdown P^\circ}$ справедливо следующее:

$$\overline{F} \supset \mathbf{Fr}\, A \text{ и } 0 \leqslant \mu(F) = \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \varepsilon\,.$$

Поэтому $\mu(\mathbf{Fr}\, A) = 0$.

Обратно, пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — фигура, и пусть $\mu(\mathbf{Fr}\, A) = 0$. В случае, когда $A^\circ = \varnothing$, имеем $A \subset \mathbf{Fr}\, A$, и значит, $\mu(A) = 0$. Рассмотрим случай $A^\circ \neq \varnothing$. Тогда существует квадрат $K^\circ \subset A^\circ$, и пусть $\mu(K^\circ) = \varepsilon_0 > 0$. Зададим $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пользуясь тем, что $\mu(\mathbf{Fr}\, A) = 0$, найдем многоугольную фигуру F так, чтобы было $F^\circ \supset \mathbf{Fr}\, A$ и $\mu(F) \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим фигуры $P^\circ := A^\circ \diagdown \overline{F} = A^\circ \cap C\overline{F}$ — открытая, $\overline{Q} := \overline{A} \cup \overline{F}$ — замкнутая. Очевидно, что

$$P^\circ \subset A \subset \overline{Q}\,,\ 0 \leqslant \mu(Q) - \mu(P) \leqslant \mu(F) \leqslant \varepsilon\,.$$

Таким образом, в силу теоремы 47 фигура A квадрируема при условии, что фигуры P и Q — многоугольные. Проверим это последнее условие. Рассмотрим непустые замкнутые множества $\mathbf{Fr}\, P$, $\mathbf{Fr}\, Q$, $\mathbf{Fr}\, F$. Так как $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то $P^\circ \neq \varnothing$, и значит, $\mathrm{Fr}\, P \neq \varnothing$. Очевидно также, что $\mathbf{Fr}\, P \subset A^\circ, \mathbf{Fr}\, Q \subset (CA)^\circ$, и потому $\mathbf{Fr}\, P \cap \mathbf{Fr}\, Q = \varnothing$. Далее, по построению имеем $\mathbf{Fr}\, F = \mathbf{Fr}\, P \sqcup \mathbf{Fr}\, Q$, т. е. граница $\mathbf{Fr}\, F$ *не связна.* Так как фигура F — многоугольная, то $\mathbf{Fr}\, F$ — *ломаная.* А из того, что $\mathbf{Fr}\, F = \mathbf{Fr}\, P \sqcup \mathbf{Fr}\, Q$ и из леммы 1 (связность прямолинейного отрезка) вытекает, что обе границы $\mathbf{Fr}\, P$ и $\mathbf{Fr}\, Q$ — ломаные. Значит, обе фигуры P, Q — многоугольные. ▶

Теорема 48 (аддитивность площади). *Если фигуры A, $B \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемы, то $A \cup B$ и $A \cap B$ квадрируемы, причем*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\,. \tag{12.4}$$

◀ Так как фигуры A и B квадрируемы, то по теореме 47(d) имеем $\mu(\mathbf{Fr}\, A) = \mu(\mathbf{Fr}\, B) = 0$, и значит, $\mu(\mathbf{Fr}\, A \cup \mathbf{Fr}\, B) = 0$. С другой стороны

$$\mathbf{Fr}(A \cup B) \subset \mathbf{Fr}\, A \cup \mathbf{Fr}\, B \quad \text{и} \quad \mathbf{Fr}(A \cap B) \subset \mathbf{Fr}\, A \cup \mathbf{Fr}\, B \tag{12.5}$$

(эти включения предлагается доказать самостоятельно). Из включений (12.5) следует, что $\mu[\mathbf{Fr}\,(A \cup B)] = \mu[\mathbf{Fr}\,(A \cap B)] = 0$, и значит, в силу теоремы 47(d) множества $A \cup B$ и $A \cap B$ квадрируемы.

Чтобы установить равенство (12.4), предположим сначала, что $A \cap B = \varnothing$. Задавая $\varepsilon > 0$, найдем многоугольные фигуры P_1, Q_1, P_2, Q_2 такие, что $P_1^\circ \subset A \subset \overline{Q_1}$, $P_2 \subset B \subset \overline{Q_2}$, и

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mu(Q_1) - \mu(A) \leqslant \varepsilon\,,\\
0 &\leqslant \mu(A) - \mu(P_1) \leqslant \varepsilon\,,\\
0 &\leqslant \mu(Q_2) - \mu(B) \leqslant \varepsilon\,,\\
0 &\leqslant \mu(B) - \mu(P_2) \leqslant \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Так как

$$\mu(P_1) + \mu(P_2) = \mu(P_1 \cup P_2) \leqslant \mu(A \sqcup B) \leqslant \mu(Q_1 \cup Q_2) \leqslant \mu(Q_1) + \mu(Q_2)\,,$$

то

$$\mu(A) + \mu(B) - 2\varepsilon \leqslant \mu(A \sqcup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) + 2\varepsilon\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Применяя индукцию, можно обобщить последнее равенство на случай объединения любого конечного числа дизъюнктных множеств.

Пусть теперь $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$ (см. рис. 7). По доказанному имеем

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)\,,$$

$$\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) = \mu(A)\,;$$

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(B)\,.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B),$$

что равносильно равенству (12.4). ▶

4. Вычисление площадей некоторых фигур

Вспомним сначала понятие криволинейной трапеции (рис. 2).

Определение 26. *Пусть* $f\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — *неотрицательная функция. Криволинейной трапецией называется следующее множество:*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}. \tag{12.6}$$

Теорема 49. *Если* $f\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — *неотрицательная интегрируемая функция, то криволинейная трапеция* (12.6) *квадрируема, а ее площадь равна*

$$\mu(A) = \int\limits_a^b f(x)dx\,. \tag{12.7}$$

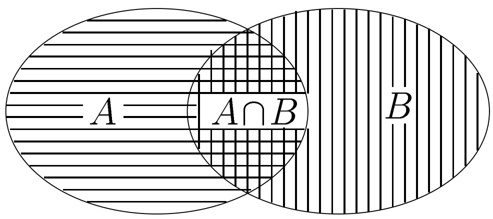

Рис. 7. К теореме 48

◀ По каждому разбиению

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

построим многогугольные (ступенчатые) фигуры, вписанную в криволинейную трапецию и описанную около нее (рис. 5). Площади этих фигур равны соответственно нижней и верхней суммам Дарбу, т. е. $s(f;T)$ и $S(f;T)$. В силу критерия интегрируемости должно выполняться условие

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}[S(f;T) - s(f;T)] = 0\,.$$

В частности, $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение T, для которого

$$0 \leqslant S(f;T) - s(f;T) \leqslant \varepsilon\,.$$

Это значит, что для криволинейной трапеции выполнено условие теоремы 47(d). Значит, она квадрируема.

Чтобы вычислить ее площадь $\mu(A)$, запишем неравенства

$$s(f;T) \leqslant \mu(A) \leqslant S(f;T)\,. \tag{12.8}$$

Так как $\lim s(f;T) = \lim S(f;T) = \int\limits_a^b f(x)dx$ при $\lambda(T) \to 0$, то в пределе из (12.8) получим равенство (12.7). ▶

Пример. Вычислить площадь фигуры A, ограниченной параболой $y = x \cdot (2-x)$ и осью OX (рис. 8).

◀ Имеем

$$\mu(A) = \int\limits_0^2 x \cdot (2-x)dx = \int\limits_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}. \ ▶$$

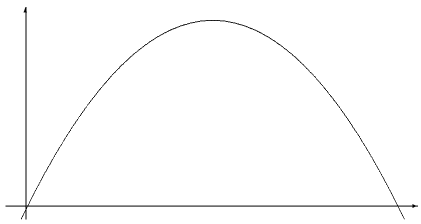

Рис. 8. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху параболой

С помощью теоремы 49 можно вычислять площади широкого класса плоских фигур, а именно, тех, которые допускают представление в виде объединения конечной совокупности криволинейных трапеций без общих внутренних точек.

Если функция $f : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ неположительна, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен взятой со знаком минус площади криволинейной трапеции следующего вида:

$$B = \left\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b\,,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\right\}.$$

В случае, когда функция меняет знак на $[a\,, b]$, мы на основании равенства

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2}dx - \int\limits_a^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2}dx$$

заключаем, что *интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, ограниченных графиком функции* f, *лежащих соответственно выше и ниже оси* OX. *При этом площади трапеций, лежащих выше оси* OX, *считаются положительными,*

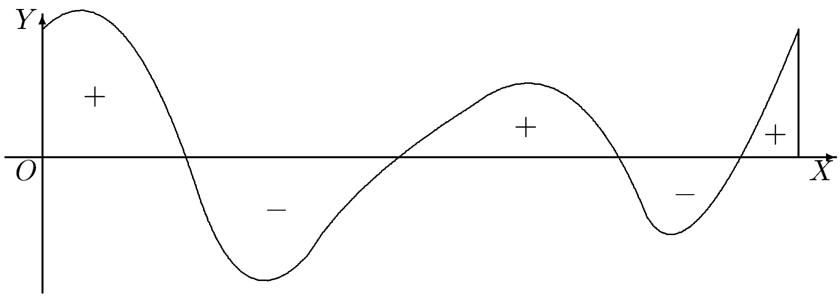

Рис. 9. К геометрическому смыслу интеграла

а площади трапеций, лежащих ниже оси OX — отрицательными (рис. 9). Это утверждение выражает геометрический смысл определенного интеграла Римана от вещественнозначной функции, заданной на отрезке оси OX.

Вычислим теперь площадь криволинейного сектора (рис. 10).

Определение 27. *Пусть $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$, – неотрицательная функция. Криволинейным сектором называется плоская фигура C, которая в полярной системе координат может быть задана следующим образом:*

$$C := \left\{(r, \varphi) \;\middle|\; 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\right\}.$$

Теорема 50. *Если функция $r = r(\varphi)$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то криволинейный сектор C квадрируем, а для его площади справедлива формула*

$$\mu(C) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[r(\varphi)]^2 d\varphi. \tag{12.9}$$

◀ Зададим разбиение $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$, для которого

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

Обозначим

$$\Delta_k = [\varphi_k, \varphi_{k+1}],\ \Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

$$M_k = \sup_{\Delta_k} r(\varphi),\ m_k = \inf_{\Delta_k} r(\varphi) \ \text{ где }\ k = 0,\ 1, \ldots,\ n-1.$$

Построим круговые секторы

$$\left\{(r\,,\,\varphi)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\leqslant r\leqslant m_k\,;\;\varphi\in\Delta_k\right\}$$

и

$$\left\{(r\,,\,\varphi)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\leqslant r\leqslant M_k,\;\varphi\in\Delta_k\right\}\,,$$

соответственно вписанный в криволинейный сектор

$$\left\{(r\,,\,\varphi)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\leqslant r\leqslant r(\varphi)\,,\,\varphi\in\Delta_k\right\}$$

и описанный около него. Из школьного курса известно, что круговые секторы квадрируемы, и площади их соответственно равны

$$\frac{1}{2}m_k^2\cdot\Delta\varphi_k\quad\text{ и }\quad\frac{1}{2}M_k^2\cdot\Delta\varphi_k.$$

Таким образом, для исходного криволинейного сектора C построены вписанная и описанная квадрируемые фигуры, площади которых соответственно равны

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}m_k^2\cdot\Delta\varphi_k\quad\text{ и }\quad\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}M_k^2\cdot\Delta\varphi_k\,.$$

Очевидно, что эти выражения являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции $\frac{1}{2}[r(\varphi)]^2$, построенными для разбиения $T=\{\varphi_0\,,\,\varphi_1\,,\,\ldots\,,\,\varphi_n\}$. Так как функция $r=r(\varphi)$ интегрируема на $[\alpha\,,\beta]$, то по лемме из § 33 функция $\frac{1}{2}[r(\varphi)]^2$ тоже интегрируема на этом отрезке. Следовательно, по критерию интегрируемости должно быть

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}M_k^2\cdot\Delta\varphi_k-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}m_k^2\cdot\Delta\varphi_k\right]=0\,,$$

т. е. для криволинейного сектора C выполнено условие (c) теоремы 47. Таким образом, он квадрируем, а для его площади $\mu(C)$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}m_k^2\Delta\varphi_k\leqslant\mu(C)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}M_k^2\Delta\varphi_k\,.\tag{12.10}$$

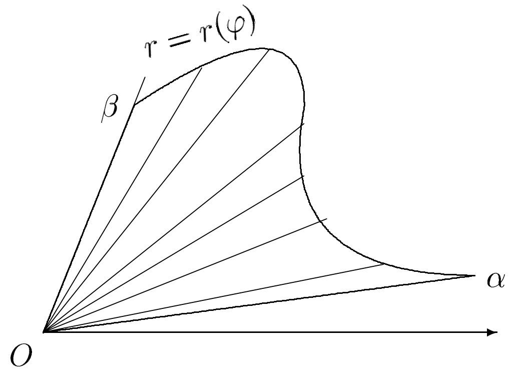

Рис. 10. Криволинейный сектор

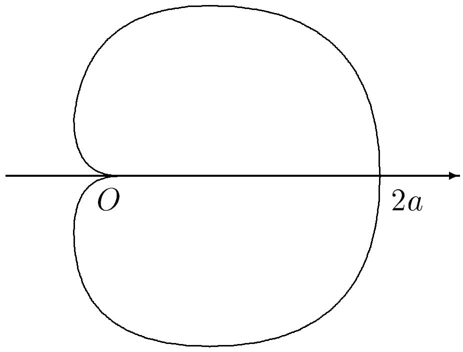

Рис. 11. Кардиоида

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$ и учитывая, что суммы Дарбу сходятся к интегралу $\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[r(\varphi)]^2 d\varphi$, из (12.10) получаем (12.9). ▶

Примеры. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и одним витком спирали Архимеда $r = a\varphi$, $a > 0$.

◀ По формуле (12.9) имеем

$$\mu(C) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 8\pi^3 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 . \ ▶$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$, (рис. 11).

◀ По формуле (12.9) имеем

$$\mu(C) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\pi + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\pi = \frac{3}{2}a^2\pi . \ ▶$$

5. Вычисление объемов некоторых тел

Подобно тому, как была введена квадрируемость (измеримость по Жордану) плоских фигур, можно ввести понятие кубируемости (измеримости по Жордану) пространственных тел, т. е. ограниченных подмножеств трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ (рис. 12) . Опуская соответствующие построения, отметим здесь только один используемый ниже факт: прямой цилиндр в $\mathbb{R}^3$ (рис. 13), высота которого равна h, а основанием является плоская квадрируемая фигура A, кубируем, а его объем равен $V = \mu(A) \cdot h$.

Теорема 51. *Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченное множество (тело), пересечение которого с любой плоскостью $x = x_0$, перпендикулярной оси OX, квадрируемо и имеет площадь $S(x_0)$. Если функция $S(x)$ интегрируема на $[a\,,\,b]$, то тело B кубируемо, а его объем равен*

$$V(B) = \int\limits_a^b S(x)dx\,, \tag{12.11}$$

где $x = a\,,\ x = b$ — плоскости, между которыми находится тело B.

◀ Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a\,,\,b]$ (обозначим его через T). В соответствии с ним разобьем тело B на части, каждая из которых заключена между плоскостями $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$. Выберем произвольно точку $\xi \in [x_k\,,\,x_{k+1}]$ и рассмотрим прямой цилиндр с высотой $[x_k\,,\,x_{k+1}]$, основанием которого служит сечение тела B плоскостью $x = \xi_k$. Объем этого цилиндра, согласно сделанному выше замечанию, равен $S(\xi_k) \cdot \Delta x_k$. Суммируя все эти объемы, получим приближенное значение искомого объема тела B

$$\sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta x_k\,. \tag{12.12}$$

За точное значение объема тела B условимся принимать предел сумм (12.12) при $\lambda(T) \to 0$, т. е.

$$V(B) := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta x_k\,. \tag{12.13}$$

Сумма (12.12) является интегральной суммой интеграла $\int\limits_a^b S(x)dx$. Так как функция $S(x)$ предполагалась интегрируемой на $[a\,,\,b]$, то предел

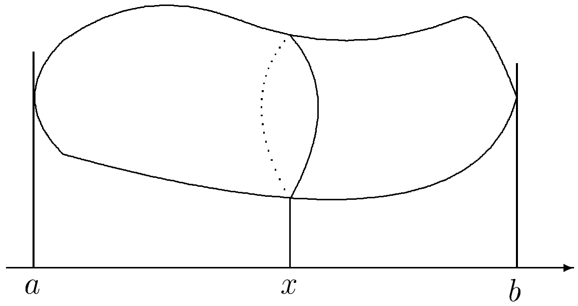

Рис. 12. К теореме 51

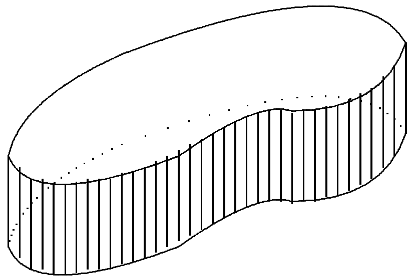

Рис. 13. Прямой цилиндр

(12.13) существует и равен этому интегралу. Таким образом, из (12.13) получается равенство (12.11). ▶

Следствие. *Если функция* $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *интегрируема на* $[a\,,\,b]$, *то тело вращения криволинейной трапеции*

$$B = \{(x\,,\,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant |f(x)|\}$$

вокруг оси OX *кубируемо, а его объем равен*

$$V(B) = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx\,. \tag{12.14}$$

◀ Формула (12.14) является частным случаем формулы (12.11) при $S(x) = \pi[f(x)]^2$ (см. рис. 14). ▶

Примеры. 1) Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, верхнее ребро равно c, а высота равна h. (рис. 15)

◀ Пусть $S(x)$ — площадь сечения чердака горизонтальной плоскостью, находящейся на расстоянии x от верхнего края чердака $(0 \leqslant x \leqslant h)$. Ясно, что $S(x) = U(x) \cdot V(x)$, где

$$U(x) = \lambda x\,,\ V(x) = \mu x + c\,,$$

а λ и μ — неопределенные коэффициенты. Для их нахождения составим следующие уравнения:

$$U(0) = 0\,,\ U(h) = \lambda h = a\,,\ V(0) = c\,,\ V(h) = \mu h + c = b\,.$$

Решая их, находим $\lambda = \dfrac{a}{h}$, $\mu = \dfrac{b-c}{h}$. Значит, $S(x) = \dfrac{a}{h} \cdot x \cdot \left(\dfrac{b-c}{h}x + c\right)$. По

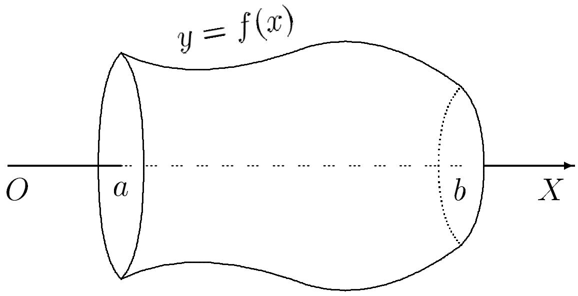

Рис. 14. Тело вращения вокруг оси OX

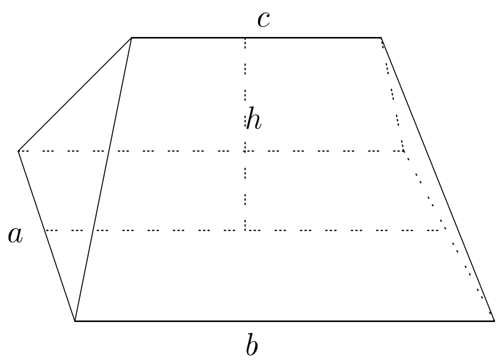

Рис. 15. Чердак

формуле (12.11) имеем

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{a}{h}\int_0^h x \cdot \left(\frac{b-c}{h}x + c\right)dx =$$

$$= \frac{a}{h} \cdot \frac{b-c}{h} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{ac}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{a(b-c)h}{3} + \frac{ach}{2}\,. \ \blacktriangleright$$

2) Вычислить объем шара радиуса R.

$\blacktriangleleft$ Рассматривая шар как тело вращения вокруг оси OX полукруга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$, т. е. криволинейной трапеции

$$\left\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -R \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}\right\},$$

имеем

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)dx =$$

$$= 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\,. \ \blacktriangleright$$

§ 2. Длина дуги кривой и площадь поверхности вращения

1. Длина гладкого пути

Для простоты ограничимся здесь понятиями пути и кривой, лежащих в в $\mathbb{R}^2$.

Определение 28. *Плоский путь (или параметризованная кривая в $\mathbb{R}^2$) — это непрерывное отображение отрезка $[a\,,\,b]$ в $\mathbb{R}^2$, т. е. непрерывная вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in [a\,,\,b]$. Переменная t называется параметром.*

Задание вектор-функции в виде $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$ равносильно заданию ее в виде системы двух скалярных функций

$$\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [a\,,\,b]\,. \tag{12.15}$$

Непрерывность, дифференцируемость и т. п. вектор-функции понимаются соответственно как непрерывность, дифференцируемость и т. п. обеих функций системы (12.15). Иначе говоря, классификация путей по свойствам дается в зависимости от свойств определяющей его вектор-функции $\boldsymbol{r}\,:\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Так, путь, о котором идет речь в определении 28, естественно назвать *непрерывным*, поскольку в этом определении вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ предполагается *непрерывной* на $[a\,,\,b]$. Предполагая, что вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема на $[a\,,\,b]$, получим дифференцируемый путь, и т. д. В этом параграфе нам потребуется только понятия *гладкого пути* и *спрямляемого пути.*

Определение 29. *Плоский путь $\boldsymbol{r}\,:\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ называется гладким, если вектор-функция $\boldsymbol{r}$ имеет на отрезке $[a\,,\,b]$ непрерывную производную вектор-функцию $\boldsymbol{r}'$, нигде не обращающаяся в нуль-вектор.*

Желая определить и вычислить длину плоского пути, сначала впишем в него ломаную линию (рис. 16). С этой целью введем в рассмотрение образ отрезка $[a\,,\,b]$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ при отображении (12.15), упорядочив точки этого образа так, как упорядочены точки отрезка $[a\,,\,b]$. Затем возьмем разбиение $T = \{t_0\,,\,t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n\}$ отрезка $[a\,,\,b]$, для которого

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\,,$$

и, как обычно, обозначим

$$\Delta_k = [t_k\,,\,t_{k+1}]\,,\; \Delta t_k = t_{k+1} - t_k\,.$$

Ломаную линию, вписанную в данный путь, получим, соединяя отрезками прямых все пары соседних точек следующей последовательности:

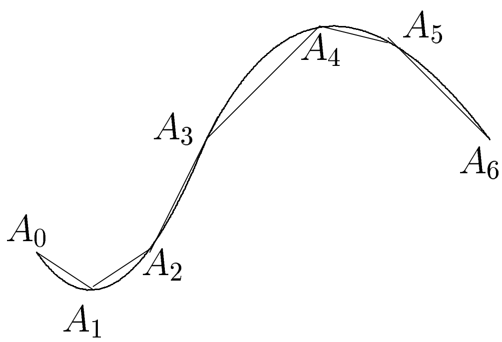

Рис. 16. К определению 30

$$A_0(x(t_0)\,,\,y(t_0))\,,\; A_1(x(t_1)\,,\,y(t_1))\,,\ldots\,,\; A_n(x(t_n)\,,\,y(t_n))\,.$$

За длину $l(T)$ ломаной линии естественно принять сумму длин всех ее звеньев, т. е. отрезков $[A_k\,,\,A_{k+1}]$

$$l(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}\,, \tag{12.16}$$

где обозначено

$$\Delta x_k := x(t_{k+1}) - x(t_k)\,,\quad \Delta y_k := y(t_{k+1}) - y(t_k)\,. \tag{12.17}$$

Определение 30. *Плоский путь* (12.15) *называется спрямляемым, если множество* $\{l(T) \mid T - \text{разбиение}\}$ *длин вписанных ломаных линий ограничено сверху, а точная верхняя граница этого множества называется длиной пути.*

Обозначая через l длину пути (12.15), имеем $l = \sup\limits_T l(T)$, где $l(T)$ из (12.16).

Теорема 52. *Если путь*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a\,,\,b]\,,$$

— гладкий, то он — спрямляемый, а для его длины справедливо равенство

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt\,. \tag{12.18}$$

◀ Задавая разбиение T и используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x(t_{k+1}) - x(t_k) = x'(\theta_k) \cdot \Delta t_k\,, \\ \Delta y_k &= y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(\tau_k) \cdot \Delta t_k\,. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Здесь θ_k, τ_k, вообще говоря, различные точки, лежащие на интервале $(t_k\,,\,t_{k+1})$. Подставляя выражения для Δx_k, Δy_k из (12.19) в (12.16), получим

$$l(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\theta_k)]^2 + [y'(\tau_k)]^2} \cdot \Delta t_k\,. \tag{12.20}$$

Построим для того же разбиения T интегральную сумму интеграла (12.18), беря θ_k в качестве отмеченных точек

$$\sigma(|\boldsymbol{r}'|, T, \theta) := \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\theta_k)]^2 + [y'(\theta_k)]^2} \cdot \Delta t_k\,. \tag{12.21}$$

Так как, вообще говоря, $\theta_k \neq \tau_k$, то суммы (12.20) и (12.21), вообще говоря, не равны между собой. Используя справедливое для любых положительных A, B, C неравенство

$$\left| \sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{A^2 + C^2} \right| \leqslant |B - C|$$

и полагая $A = |x'(\theta_k)|$, $B = |y'(\tau_k)|$, $C = |y'(\theta_k)|$, оценим сверху модуль разности сумм (12.20) и (12.21)

$$0 \leqslant |l(T) - \sigma(|\boldsymbol{r}'|, T, \theta)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{[x'(\theta_k)]^2 + [y'(\theta_k)]^2} - \sqrt{[x'(\theta_k)]^2 + [y'(\tau_k)]^2} \right| \cdot \Delta t_k \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \Big| |y^{'}(\theta_k)| - |y^{'}(\tau_k)| \Big| \cdot \Delta t_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(|y'|; \Delta_k) \cdot \Delta t_k \,.$$

Итак, имеем

$$0 \leqslant |l(T) - \sigma(|\boldsymbol{r}'|, T, \theta)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(|y'|; \Delta_k) \Delta t_k \,. \tag{12.22}$$

Так как функция $|y'|$ непрерывна на $[a\,,\,b]$, то она интегрируема на $[a\,,\,b]$, и по критерию интегрируемости (т. е. по теореме 19(d)) имеем

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(|y'|; \Delta_k) \Delta t_k = 0 \,.$$

Отсюда и из (12.22) заключаем, что существует конечный предел

$$\widetilde{l} := \lim_{\lambda(T)\to 0} l(T) = \int\limits_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \,.$$

Для обоснования формулы (12.18) осталось только показать, что $\widetilde{l} = l$, т. е. что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} l(T) = \sup_T l(T) \,.$$

Переходя к пределу при $\lambda(T) \to 0$ в неравенстве $l(T) \leqslant l$, получим $\widetilde{l} \leqslant l$. Чтобы установить противоположное неравенство, зададим $\varepsilon \in (0\,,\,l)$. Так как $0 < l - \varepsilon < l = \sup\limits_T l(T)$, то существует разбиение T_ε, для которого $l - \varepsilon < l(T_\varepsilon)$. Кроме того, очевидно, что если $T_\varepsilon \subset T$, то $l(T_\varepsilon) \leqslant l(T)$. Переходя к пределу в неравенстве $l - \varepsilon \leqslant l(T)$ при $\lambda(T) \to 0\,,\, T \supset T_\varepsilon$, получим $l - \varepsilon \leqslant \widetilde{l}$. Отсюда в силу произвольности ε находим $l \leqslant \widetilde{l}$. ▶

Сделаем несколько **замечаний.**

1. В случае, когда гладкий путь можно задать уравнением $y = y(x)$, $x \in [a\,,\,b]$, (т. е. когда за параметр можно принять переменную x), формула (12.18) принимает вид

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx\,. \tag{12.23}$$

Если же гладкий путь можно задать уравнением $x = x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ (т. е. если за параметр можно принять переменную y) формула (12.18) принимает вид

$$l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy\,. \tag{12.24}$$

2. Понятие пространственного пути можно определить аналогично понятию плоского пути как непрерывного отображения $\boldsymbol{r} : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, т. е. с помощью системы трех скалярных непрерывных функций

$$\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \qquad a \leqslant t \leqslant b\,. \\ z - z(t)\,, \end{cases} \tag{12.25}$$

Для гладкого пространственного пути справедлива теорема, аналогичная теореме 52, причем для его длины справедлива формула

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt\,, \tag{12.26}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — функции из (12.25). При $z(t) \equiv 0$ формула (12.26) переходит в (12.18).

Примеры. 1) Вычислить длину одной арки циклоиды (рис. 17):

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos t), \\ y = a(t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\,.$$

◀ По формуле (12.18) имеем

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt =$$

$$= 2a = \int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 4a \left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8a\,. \ ▶$$

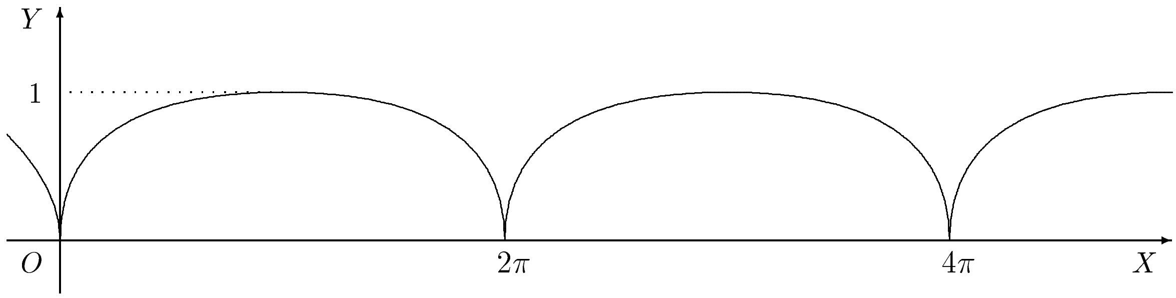

Рис. 17. Циклоида

2) Вычислить длину дуги параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$ между точками $(0,0)$ и $(1\,,\,1/2)$.

◀ Из рис. 18 видно, что интересующая нас дуга параболы биективно проектируется как на ось OX, так и на ось OY. Поэтому за параметр можно принять как переменную x, так и переменную y.

Принимая за параметр переменную x, по формуле (12.23) имеем

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2+1}|\Big|_0^1 + x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - l\,.$$

Отсюда находим $l = \ln\sqrt{1+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$

Используя формулу (12.24), принимая за параметр переменную y, производя затем замену $1 + \dfrac{1}{2y} = t^2$, будем иметь

$$l = \int_0^{1/2} \sqrt{1+(x'(y))^2}dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dy}\sqrt{2y}\right)^2}dy =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^2} dy = \int\limits_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2y}} dy =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{\sqrt{2}} \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2t^2 dt}{(t^2-1)^2} = -\frac{t}{2(t^2-1)}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \ln\sqrt{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangleright$$

2. Понятие кривой. Длина дуги кривой

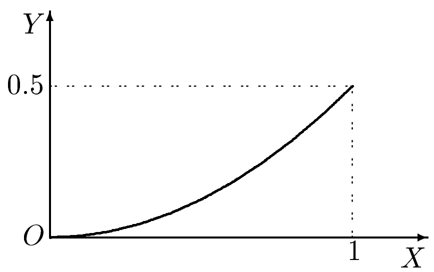

Рис. 18. Дуга параболы

Вычисляя длину дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$ между точками $(0\,,\,0)$ и $(1\,,\,0.5)$, мы убедились в том, что результат не зависит от того, какая из переменных, x или y, принимается за параметр. С формальной точки зрения мы рассматривали одну и ту же дугу параболы как два различных пути. Таким образом, одна и та же кривая (парабола) может быть задана в виде различных путей (в зависимости от выбора параметризации на ней). Обобщая эту ситуацию, мы введем понятие кривой, отождествляя между собой пути из некоторого множества путей. С этой целью напомним сначала понятие гомеоморфности и гомеоморфизма топологических пространств.

Определение 31. *Топологические пространства X и Y называются гомеоморфными, если существует непрерывное биективное отображение $\tau : X \longrightarrow Y$, такое, что обратное отображение $\tau^{-1} : Y \longrightarrow X$ тоже непрерывно. Отображение τ с указанными свойствами называется гомеоморфизмом пространств X и Y.*

Примерами гомеоморфных топологических пространств являются отрезки $[a\,,\,b]$ и $[c\,,\,d]$ числовой оси. Гомеоморфизмом является, например, любая строго монотонная и непрерывная функция $\tau\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow [c\,,\,d]$, отображающая отрезок $[a\,,\,b]$ на весь отрезок $[c\,,\,d]$. Роль гомеоморфизмов в топологии связана, например, с тем фактом, что открытые, замкнутые, компактные, связные множества переходят при гомеоморфизмах на открытые, замкнутые, компактные, связные множества соответственно. Кроме того, гомеоморфизмы обладают следующим свойством: композиция гомеоморфизмов и отображение, обратное к гомеоморфизму, снова являются гомеоморфизмами.

Определение 32. *Два пути $\boldsymbol{r}_1\,,\ \boldsymbol{r}_2\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ называются эквивалентными между собой ($\boldsymbol{r}_1 \sim \boldsymbol{r}_2$), если существует такой гомеоморфизм $\tau\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow [c\,,\,d]$, что $\boldsymbol{r}_2[\tau(t)] \equiv \boldsymbol{r}_1(t)$ для всех $t \in [a\,,\,b]$.*

Введенное отношение эквивалентности путей обладает следующими стандартными свойствами отношений эквивалентности:

1°. (рефлексивность) $\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{r}$;

2°. (симметричность) $\boldsymbol{r}_1 \sim \boldsymbol{r}_2 \iff \boldsymbol{r}_2 \sim \boldsymbol{r}_1$;

3°. (транзитивность) $\boldsymbol{r}_1 \sim \boldsymbol{r}_2\,,\ \boldsymbol{r}_2 \sim \boldsymbol{r}_3 \implies \boldsymbol{r}_1 \sim \boldsymbol{r}_3$.

Свойство 1° вытекает из того, что тождественное отображение $\mathrm{Id}\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow [a\,,\,b]$ — гомеоморфизм. Свойство 2° следует из того, что отображение, обратное к гомеоморфизму, является гомеоморфизмом. Свойство 3° является следствием того факта, что композиция гомеоморфизмов является гомеоморфизмом.

Из свойств 1° — 3° следует, что множество всех путей распадается на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Здесь каждый класс эквивалентности — это множество всех путей, эквивалентных данному.

Определение 33. *Непрерывной кривой называется класс эквивалентных путей (т. е. множество всех путей, эквивалентных данному).*

Станем теперь рассматривать *диффеоморфизмы* отрезков, т. е. такие гомеоморфизмы $\tau\ :\ [a\,,\,b]\longrightarrow[c\,,\,d]$, что обе производные τ' и $(\tau^{-1})'$ непрерывны. Ограничиваясь лишь диффеоморфизмами, мы замечаем, что если путь $\boldsymbol{r}\ :\ [a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ — гладкий, то и все пути вида $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}[\tau(t)]$ также оказываются гладкими. В этом случае мы будем говорить о *гладкой эквивалентности* путей. Используя ее, приходим к понятию гладкой кривой.

Определение 34. *Гладкой кривой называется множество всех путей, гладко эквивалентных данному гладкому пути*

$$\boldsymbol{r}\ :\ [a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2.$$

Определение 35. *Длиной гладкой кривой называется длина любого представляющего ее гладкого пути.*

Корректность этого определения обосновывается в следующей теореме.

Теорема 53. *Если два гладких пути гладко эквивалентны между собой, то их длины равны.*

◀ Пусть

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant b\,, \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = \xi(\tau), \\ y = \eta(\tau), \end{cases} \quad \alpha\leqslant \tau\leqslant \beta\,,$$

— два пути, гладко эквивалентных между собой. Для их длин l и λ в силу теоремы 52 справедливы равенства

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt\,; \quad \lambda = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\xi'(\tau))^2 + (\eta'(\tau))^2}d\tau\,. \quad (12.27)$$

Пусть $\tau = \tau(t)$ — диффеоморфизм отрезка $[a\,,b]$ на отрезок $[c\,,d]$, реализующий гладкую эквивалентность данных путей. Производя во втором интеграле (12.27) замену $\tau = \tau(t)$ и учитывая гладкую эквивалентность, получим

$$\lambda = \int\limits_a^b \sqrt{(\psi'(\tau(t)))^2 + (\eta'(\tau(t)))^2}|\tau'(t)|dt =$$
$$= \int\limits_a^b \sqrt{(\psi'(\tau(t))\tau'(t))^2 + (\eta'(\tau(t))\tau'(t))^2}dt =$$
$$= \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = l\,.$$

Таким образом, интегралы (12.27) равны между собой. ▶

3. Площадь поверхности вращения

Пусть $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, — неотрицательная дифференцируемая функция. Предположим, что график этой функции вращается вокруг оси OX (рис. 14). Требуется определить и вычислить площадь поверхности вращения. С этой целью берем разбиение T отрезка $[a\,,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Обозначим $y_k = y(x_k)$. Соединяя отрезками прямых все пары соседних точек $A_0(x_0\,,y_0)\,,\ A_1(x_1\,,y_1)\,,\ \ldots\,,\ A_n(x_n\,,y_n)$, построим ломаную линию, вписанную в график функции $y = y(x)$. Вычислим сначала площадь поверхности, полученной вращением вписанной ломаной линии вокруг оси OX. Площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученного вращением отрезка $[A_k\,,A_{k+1}]$, равна (см. рис. 19):

$$\left|\frac{\pi y_{k+1}^2 - \pi y_k^2}{\cos\alpha_k}\right| = 2\pi\cdot\frac{y_{k+1}+y_k}{2}\cdot\left|\frac{y_{k+1}-y_k}{\cos\alpha_k}\right| =$$
$$= 2\pi\frac{y(x_{k+1})+y(x_k)}{2}|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}| = 2\pi\frac{y(x_{k+1})+y(x_k)}{2}\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}\,. \tag{12.28}$$

Применяя к разности $\Delta y_k = y(x_{k+1}) - y(x_k)$ теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\Delta y_k = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y'(\xi_k)\Delta x_k\,. \tag{12.29}$$

Далее, учитывая, что число $\dfrac{y(x_k)+y(x_{k+1})}{2}$ заключено между $y(x_k)$ и $y(x_{k+1})$, по теореме о промежуточных значениях находим

$$\frac{y(x_k)+y(x_{k+1})}{2} = y(\eta_k)\,. \tag{12.30}$$

В (12.29) и (12.30) ξ_k и η_k — некоторые точки, лежащие на $[x_k\,,\ x_{k+1}]$.

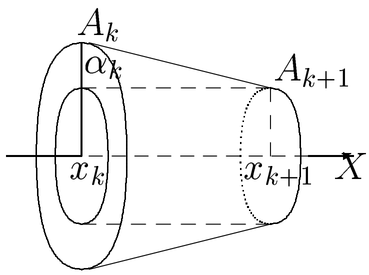

Рис. 19. К вычислению площади боковой поверхности усеченного конуса

Суммируя боковые поверхности (12.28) усеченных конусов и учитывая равенства (12.29) и (12.30), получим величину $S(T)$ площади поверхности вращения вписанной ломаной линии

$$S(T) = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y(x_k)+y(x_{k+1})}{2}\times$$
$$\times\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2} =$$
$$= 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} y(\eta_k)\sqrt{1+[y'(\xi_k)]^2}\Delta x_k\,. \tag{12.31}$$

Определение 36. *Поверхность вращения графика функции* $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, *будем называть квадрируемой, если ограничено сверху множество* $\{S(T) \mid T$ — разбиение$\}$ *площадей всех поверхностей вращения ломаных линий, вписанных в график функции* $y = y(x)$. *За величину поверхности вращения принимается число*

$$S := \sup_T S(T)\,.$$

Теорема 54. *Если неотрицательная функция $y = y(x)$ имеет на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ интегрируемую производную, то поверхность вращения графика этой функции вокруг оси OX квадрируема, а для ее площади справедлива формула*

$$S = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx\,. \tag{12.32}$$

◀ Задавая разбиение T отрезка $[a\,,\,b]$, преобразуем площадь поверхности вращения вписанной ломаной линии к виду

$$S(T) = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} y(\eta_k)\sqrt{1+[y'(\xi_k)]^2}\Delta x_k\,. \tag{12.33}$$

Беря в качестве отмеченных точек входящие сюда точки ξ_k, составим интегральную сумму интеграла (12.32)

$$\sigma(2\pi y\sqrt{1+(y')^2}, T, \xi) = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} y(\xi_k)\sqrt{1+[y'(\xi_k)]^2}\Delta x_k\,. \tag{12.34}$$

Функция $\sqrt{1+(y'(x))^2}$ интегрируема на $[a\,,\,b]$, и значит, ограничена там. Обозначая

$$\sup\sqrt{1+(y'(x))^2} = M < +\infty\,,$$

оценим разность между суммами (12.33) и (12.34)

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |S(T) - \sigma(2\pi y\sqrt{1+(y')^2}; T; \xi)| \leqslant \\ \leqslant 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}|y(\eta_k) - y(\xi_k)|\sqrt{1+[y'(\xi_k)]^2}\Delta x_k \leqslant \\ \leqslant 2\pi M\sum_{k=0}^{n-1}\omega(y,\Delta_k)\Delta x_k \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda(T)\to 0 \end{aligned}$$

в силу критерия интегрируемости функции $y = y(x)$. Из этой оценки следует, что предел $\widetilde{S}$ суммы (12.33) существует и равен интегралу (12.32). Таким образом, $\widetilde{S} \leqslant S$. Чтобы установить противоположное неравенство, зададим $\varepsilon \in (0\,,\, S)$. Существует разбиение T_ε, для которого $S(T_\varepsilon) > S - \varepsilon$. Для всех разбиений $T \supset T_\varepsilon$ имеем $S(T) \geqslant S(T_\varepsilon) > > S - \varepsilon$. Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0\,,\, T \supset T_\varepsilon$, получаем $\widetilde{S} \geqslant S - \varepsilon$. Отсюда ввиду произвольности ε находим $\widetilde{S} \geqslant S$. ▶

Задачи к главе 12

12.1. Найти площади фигур, на которые парабола $y^2 = 6x$ делит круг $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

12.2. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и ее хордой, проведенной из фокуса перпендикулярно оси OX.

12.3. Найти площадь фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной кривыми

$$y^m = x^n\,,\ y^n = x^m\,,\quad \text{где}\ \ m\,,\, n \in \mathbb{N}\,,\ m \neq n\,.$$

12.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^2 y^2 = 4(x-1)$ и прямой, проходящей через точки перегиба этой линии.

12.5. Найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

a) $y = 0\,;\ y = x - x^2\sqrt{x}$;

b) $(y - x - 2)^2 = 9x\,,\ x = 0\,,\ y = 0$;

c) $y^2 = (1 - x^2)^3$;

d) $y = \arcsin x\,,\ \arccos x\,,\ y = 0$;

12.6. Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми, заданными следующими параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 3t^2\,, \\ y = 3t - t^3\,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t^2 - 1\,, \\ y = t^3 - t\,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a\sin t\,, \\ y = a\sin 2t\,; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = a\cos 3t\,, \\ y = a\sin t\,; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}\,, \\ y = \dfrac{t\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}\,; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = \dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}\,. \end{cases}$

12.7. Произвести униформизацию уравнений следующих кривых (т. е. перейти от неявного задания к параметрическому) и вычислить площади ограничиваемых ими фигур ($a > 0$):

a) $x^3 + y^3 = axy\,;$ b) $(x+y)^3 = axy\,;$

c) $x^4 = axy^2 + ay^3\,;$ d) $x^5 + y^5 = ax^2y^2\,.$

12.8. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми, заданными своими уравнениями в полярных координатах:

a) $r = 2\varphi\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$

b) $r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\,,\ a > 0\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4};$

c) $r = 3 + 4\cos 4\varphi\,,\ r = 2 - \cos 4\varphi;$

d) $r = a\sqrt{\cos n\varphi}\,,\ a > 0\,,\ n \in \mathbb{N};$

e) $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}\,,\ a > 0;$

f) $\begin{cases} r = \sqrt{1-t^2}\,, \\ \varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}\,. \end{cases}$

12.9. В следующих уравнениях перейти к полярным координатам и вычислить площади фигур, ограниченных кривыми, заданными этими уравнениями ($a > 0\,,\ b > 0$):

a) $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$;

b) $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$;

c) $x^4+y^4 = x^2+y^2$;

d) $x^4+y^4 = a^2x^2$;

e) $x^6+y^6 = a^2x^4$;

f) $x^2+y^2 = 2ax\,,\ x^2+y^2 = 2ay$;

g) $(x^2+y^2)^3 = ax^4y$;

h) $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2$.

12.10. Вычислить длины дуг кривых, заданных следующими уравнениями $(a>0\,,\ b>0)$:

a) $y = \arccos e^{-x}\,,\ x\in[0\,,\,1]$;

b) $y = \sqrt{x-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$;

c) $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$;

d) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2/3}+(y)^{2/3} = a^{2/3}$;

e) $y = \int\limits_1^x \sqrt{t^4-1}dt\,,\ 1\leqslant x\leqslant 2$;

f) $y = \int\limits_0^x \sqrt{\cos 2t}dt\,,\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}$;

g) $y = \int\limits_0^x \sqrt{\sin 2t}dt\,,\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}$;

h) $(y-\arcsin x)^2 = 1-x^2$.

12.11. Вычислить длины дуг кривых, заданных следующими параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = t^2\,, \\ y = t - \dfrac{t^3}{3}\,, \end{cases} \qquad -\sqrt{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}\ ;$

b) $\begin{cases} x = a\cos^5 t\,, \\ y = a\sin^5 t\,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \int\limits_1^t \dfrac{\cos u}{u}du\,, \\ y = \int\limits_1^t \dfrac{\sin u}{u}du\,, \end{cases} \qquad 1 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,;$

d) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2)\,, \\ y = 2\,\mathrm{arctg}\, t - 2t + 8\,, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,;$

e) $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}\right)\,, \\ y = a\sin t\,, \end{cases} \qquad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant t_0\ ;$

f) $\begin{cases} x = 2a\,\mathrm{sh}^3\, t\,, \\ y = 3a\,\mathrm{ch}\, t\,, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0\,.$

12.12. Вычислить длины дуг кривых, заданных следующими уравнениями (r и φ — полярные координаты):

a) $\varphi = \ln r + r\,,\ 1 \leqslant r \leqslant 5;$

b) $\varphi = \dfrac{r}{2}\sqrt{r^2+2} + \ln(r + \sqrt{r^2+2})\,,\ 0 \leqslant r \leqslant 2;$

c) $r = \dfrac{\pi a}{\varphi}\,,\ \varphi > 0\,,\ \dfrac{a}{4} \leqslant r \leqslant 2a;$

d) $\begin{cases} r = a\cos^2 u\,, \\ \varphi = 2(u - \mathrm{tg}\, u)\,, \end{cases} \qquad 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{4}\,;$

e) $\begin{cases} r = a(1 + \mathrm{tg}\, u)\,, \\ \varphi = \mathrm{tg}\, u - \ln(1 + \mathrm{tg}\, u)\,, \end{cases} \qquad 0 \leqslant u \leqslant u_0 < \dfrac{\pi}{2}\,.$

12.13. Доказать, что длина дуги кривой

$$\begin{cases} x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t\,, \\ y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t\,, \end{cases} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2\,;$$

равна $(f(t) + f''(t))\Big|_{t_1}^{t_2}$.

12.14. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (\cos t + \sin t)e^t\,, \\ y = (\cos t - \sin t)e^t\,, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0\,,$$

воспользовавшись результатом предыдущей задачи.

12.15. Доказать, что длины дуг кривых

$$\begin{cases} x = f(t) - \varphi'(t)\,, \\ y = \varphi(t) + f'(t) \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t\,, \\ y = f'(t)\cos t + \varphi\text{"}(t)\sin t\,, \end{cases}$$

где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, равны.

12.16. Доказать, что длина L эллипса с полуосями a и b удовлетворяет неравенствам $\pi \cdot (a + b) < L < \pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ (задача И. Бернулли).

Глава 13
ИНТЕГРАЛ РИМАНА — СТИЛТЬЕСА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Функции ограниченной вариации и их свойства

1. Определения и примеры

Будем рассматривать функции $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, определенные на конечном отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[a\,,\,b]$, т. е.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\,.$$

Образуем сумму

$$V(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{13.1}$$

и введем в рассмотрение множество $\{V(f;T) \mid T - \text{разбиение}\}$ всех таких сумм.

Определение 37. *Функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ называется функцией ограниченной вариации*[1]*, если множество $\{V(f;T) \mid T - \text{разбиение}\}$ всех сумм* (13.1) *ограничено сверху. Точная верхняя граница этого множества, т. е. число $\sup\limits_T V(f;T)$, где T пробегает всевозможные разбиения, называется вариацией функции f на отрезке $[a\,,\,b]$.*

Для вариации принято следующее обозначение:

$$\bigvee_a^b f := \sup_T V(f;T)\,. \tag{13.2}$$

Отметим, что в этом определении никакой роли не играет вопрос о *непрерывности* функции f. Примером функции ограниченной вариации является любая функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *монотонная* на отрезке

[1]или имеющей на отрезке $[a\,,\,b]$ *ограниченное изменение.*

$[a\,,\,b] \in \mathbb{R}$. Действительно, если функция f монотонна, то сумма (13.1) преобразуется следующим образом:

$$V(f;T)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1})-f(x_k)]\right|=|f(b)-f(a)|\,,$$

т. е. $V(f;T)=|f(b)-f(a)|$ для любого разбиения T. Поэтому и $\bigvee\limits_a^b f = |f(b)-f(a)|$. Так как среди монотонных функций есть разрывные, то тем самым показано, что существуют разрывные функции ограниченной вариации. С другой стороны, *существуют непрерывные функции, не являющиеся функциями ограниченной вариации.*

◀ В качестве примера рассмотрим следующую непрерывную функцию:

$$f:[0\,,\,1]\longrightarrow\mathbb{R},\ \text{где } f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x} & \text{при}\quad x\neq 0\,,\\ 0 \quad \text{при}\quad x=0\,. \end{cases}$$

Задавая произвольно $n\in\mathbb{N}$, построим разбиение T_n отрезка $[0\,,\,1]$ точками

$$x_0=0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1=x_{2n+1}\,.$$

Для этого разбиения имеем

$$\begin{aligned} V(f;T_n)&=\sum_{k=0}^{2n}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\\ &=\left|\frac{1}{2n}\cos\pi n\right|+\left|\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}-\frac{1}{2n}\cos\pi n\right|+\\ &\quad+\left|\frac{1}{2n-2}\cos\frac{(2n-2)\pi}{2}-\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\right|+\\ &\quad+\ldots+\left|\frac{1}{2}\cos\pi-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right|=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V(f;T_n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\to+\infty \quad\text{при}\quad n\to\infty$$

как частичная сумма гармонического ряда, который, как мы знаем, расходится. Значит, $\bigvee\limits_a^b f = +\infty$. ▶

2. Классы функций ограниченной вариации

Как уже отмечалось, любая монотонная функция имеет ограниченную вариацию. Этот класс функций можно расширить следующим образом.

Определение 38. *Функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-монотонной, если существует разбиение*

$$U: \ a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$$

отрезка $[a\,,\,b]$, такое, что все сужения $f|_{[a_k, a_{k+1}]}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, являются монотонными функциями.

Теорема 55. *Если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-монотонная на отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$, то она является функцией ограниченной вариации на этом отрезке.*

◀ По разбиению $T = \{x_0\,,\, x_1\,, \ldots,\, x_n\}$ отрезка $[a\,,\,b]$ составим сумму (13.1)

$$V(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\,.$$

Добавляя к разбиению T новую точку $x' \in (x_k\,,\, x_{k+1})$, будем иметь

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |(f(x_{k+1}) - f(x')) + (f(x') - f(x_k))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_{k+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_k)|\,.$$

Отсюда видно, что при измельчении разбиения T сумма $V(f;T)$ может только возрасти. Добавляя к разбиению T все точки разбиения U из определения 38, получим разбиение $T \cup U$. Далее, так как $T \subset T \cup U$, то

$$V(f;T) \leqslant V(f;T \cup U) = \sum_{k=0}^{m-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)|\,,$$

поскольку для монотонных функций полная вариация была вычислена в предыдущем пункте. Значит, f имеет ограниченную вариацию, причем

$$\bigvee_a^b f = \sup_T V(f;T) = V(f;U) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)|\,. \quad \blacktriangleright$$

Определение 39. *Говорят, что функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица*[2]*, если выполняется следующее условие:*

$$\exists L \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x', x'' \in [a\,,\,b] \ : \ |f(x') - f(x'')| \leqslant L \cdot |x' - x''|\,. \tag{13.3}$$

Теорема 56. *Если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, то она является функцией ограниченной вариации.*

◀ Для любого разбиения $T : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ в силу (13.3) имеем

$$V(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = L \cdot (b-a)\,. \quad \blacktriangleright$$

Следствие. *Если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет на отрезке $[a\,,\,b]$ ограниченную производную, то она имеет и ограниченную вариацию.*

◀ Пусть $|f'(x)| \leqslant L < +\infty$. Тогда $\forall x', x'' \in [a\,,\,b]$ в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''| \leqslant L \cdot |x' - x''|\,,$$

т. е. выполнено условие Липшица (13.3). ▶

В качестве **примера** рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{x} \ \text{ при } \ x \neq 0\,, \\ 0 \ \text{ при } \ x = 0\,. \end{cases}$$

Для нее имеем

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\dfrac{\pi}{x} - \pi \cdot \cos\dfrac{\pi}{x} \text{ при } x \neq 0\,, \\ 0 \ \text{ при } \ x = 0\,. \end{cases}$$

[2] *Липшиц* Рудольф Отто Сигизмунд (1832—1903) — немецкий математик.

Отсюда видно, что на любом отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ производная функция f' ограничена, так как

$$|f'(x)| \leqslant 2|x| + \pi \leqslant 2 \cdot \max\{|a|, |b|\} + \pi\,.$$

Значит, f есть функция ограниченной вариации. Однако на любом интервале, содержащем точку $x = 0$, она «бесконечно колеблется», т. е. не является кусочно-монотонной.

Теорема 57. *Если функцию $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде интеграла с переменным верхним пределом*

$$f(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)dt\,, \tag{13.4}$$

где $\varphi : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая функция[3]*, то f является функцией ограниченной вариации, причем*

$$\bigvee_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |\varphi(t)|dt\,. \tag{13.5}$$

◀ Беря любое разбиение $T = \{x_0\,,\, x_1\,,\,\ldots\,,\, x_n\}$ отрезка $[a\,,\,b]$ и учитывая равенство (13.4), имеем

$$V(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(t)|dt = \int\limits_a^b |\varphi(t)dt| < +\infty\,.$$

Отсюда видно, что f имеет ограниченную вариацию, и что выполняется неравенство (13.5) . ▶

Замечания. 1. Известно, что в неравенстве (13.5) на самом деле имеет место равенство.

2. Можно показать, что если интеграл в (13.4) сходится условно, то f *не является* функцией ограниченной вариации.

---

[3] Функция φ называется *суммируемой* на отрезке $[a\,,\,b]$, если $\int\limits_a^b |\varphi(t)|dt < +\infty$.

3. Свойства функций ограниченной вариации

Теорема 58. *Если функция f является функцией ограниченной вариации, то она ограничена.*

◀ Пусть $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда $\forall x \in [a\,,\,b]$ имеем

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant \bigvee_a^b f < +\infty\,.$$

Отсюда

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leqslant |f(a)| + \bigvee_a^b f < +\infty\,. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 59. *Сумма, разность и произведение функций ограниченной вариации являются функциями ограниченной вариации.*

◀ Пусть $s(x) := f(x) \pm g(x)$, где $f\,,\,g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — функции ограниченной вариации. Для любого разбиения $T = \{x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n\}$ отрезка $[a\,,\,b]$ имеем

$$|s(x_{k+1}) - s(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|\,.$$

Складывая эти неравенства, находим

$$V(s;T) \leqslant V(f;T) + V(g;T) \leqslant \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g < +\infty\,.$$

Отсюда очевидно, что

$$\bigvee_a^b s \leqslant \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g\,, \quad \text{и значит,} \quad \bigvee_a^b s < +\infty\,.$$

Пусть теперь $p := f \cdot g$, $|f(x)| \leqslant M < +\infty$, $|g(x)| \leqslant L < +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
|p(x_{k+1}) - p(x_k)| &= |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| = \\
&= |f(x_{k+1})[g(x_{k+1}) - g(x_k)] + g(x_k)[f(x_{k+1}) - f(x_k)]| \leqslant \\
&\leqslant M \cdot |g(x_{k+1}) - g(x_k)| + L \cdot |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\,.
\end{aligned}$$

Отсюда, суммируя, получаем

$$V(p;T) \leqslant M \cdot V(g;T) + L \cdot V(f;T) \leqslant M \cdot \bigvee_a^b f + L \cdot \bigvee_a^b g < +\infty\,,$$

и значит, $\bigvee\limits_a^b p < +\infty\,.$ ▶

Теорема 60. *Если f и g — функции ограниченной вариации, причем $g(x) \geqslant \sigma > 0$, то частное f/g есть функция ограниченной вариации.*

◀ Учитывая теорему 59, достаточно доказать, что $1/g$ есть функция ограниченной вариации. Для нее имеем

$$\left|\frac{1}{g(x_{k+1})} - \frac{1}{g(x_k)}\right| = \frac{|g(x_{k+1}) - g(x_k)|}{|g(x_{k+1}) \cdot g(x_k)|} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}|g(x_{k+1}) - g(x_k)|\,.$$

Складывая эти равенства, найдем

$$V\left(\frac{1}{g}\,,\,T\right) \leqslant \frac{V(g;T)}{\sigma^2} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\bigvee_a^b g < +\infty\,.$$

Поэтому $1/g$ есть функция ограниченной вариации. ▶

Теорема 61. *Пусть $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Для любой точки $c \in (a\,,\,b)$ функция f имеет ограниченную вариацию на отрезках $[a\,,\,c]$ и $[c\,,\,b]$, причем*

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f\,. \tag{13.6}$$

◀ Возьмем разбиения

$$T_1 = \{y_0\,,\,y_1\,,\,\ldots\,,\,y_p\} \quad \text{и} \quad T_2 = \{z_0\,,\,z_1,\ldots\,,\,z_q\}$$

отрезков $[a\,,\,c]$ и $[c\,,\,b]$ соответственно, где

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_p = c\,; \qquad c = z_0 < z_1 < \ldots z_q = b\,.$$

Составим суммы (13.1) для каждого из этих отрезков

$$V(f;T_1) = \sum_{k=0}^{p-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad V(f;T_2) = \sum_{k=0}^{q-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|\,.$$

Объединение $T := T_1 \cup T_2$ есть разбиение отрезка $[a\,,\,b]$. Для него имеем

$$V(f;T) = V(f;T_1) + V(f;T_2)\,.$$

Отсюда видно, что

$$V(f;T_1) + V(f;T_2) = V(f;T) < +\infty\,, \tag{13.7}$$

и значит, обе суммы ограничены сверху. Беря в (13.7) sup по всем T_1 и T_2, получим

$$\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \leqslant \bigvee_a^b f\,. \tag{13.8}$$

Желая получить противоположное неравенство, возьмем разбиение T отрезка $[a\,,\,b]$. Добавляя точку c к разбиению T, получим разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a\,,\,c]$ и $[c\,,\,b]$ соответственно, т. е. $T \cup \{c\} = T_1 \cup T_2$. Тогда будем иметь

$$V(f;T) \leqslant V(f;T\cup\{c\}) = V(f;T_1) + V(f;T_2) \leqslant \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f\,,$$

и значит, $V(f;T) \leqslant \bigvee\limits_a^c f + \bigvee\limits_c^b f$. Взяв здесь sup по всем T, найдем

$$\bigvee_a^b \leqslant \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f\,. \tag{13.9}$$

Из неравенств (13.8) и (13.9) вытекает равенство (13.6). ►

Следствие. *Если $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ есть функция ограниченной вариации, то функция $g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством*

$$g(x) := \bigvee_a^x f\,, \tag{13.10}$$

является неубывающей и ограниченной.

◄ Пусть $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$. Тогда

$$g(x'') = \bigvee_a^{x''} f = \bigvee_a^{x'} f + \bigvee_{x'}^{x''} f \geqslant g(x')\,,$$

так как $\bigvee\limits_{x'}^{x''} f \geqslant 0$. Таким образом,

$$x' < x'' \implies g(x') \leqslant g(x''),$$

т. е. g не убывает. Из неубывания следует ограниченность, так как

$$g(x) = \bigvee_a^x f \leqslant \bigvee_a^b f < +\infty . \blacktriangleright$$

4. Критерий того, что заданная функция имеет ограниченную вариацию

Определение 40. *Неубывающая функция $F : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ называется мажорантой для функции $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, если выполняется условие*

$$\forall x', x'' \in [a\,,\, b] \;:\; x' < x'' \Longrightarrow |f(x'') - f(x')| \leqslant F(x'') - F(x') .$$

Теорема 62. *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *функция $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию;*

(b) *на отрезке $[a\,,\, b]$ существует мажоранта для функции f;*

(c) *функцию f можно представить в виде разности неубывающих и ограниченных функций.*

◀ (a)⇒(b) В качестве мажоранты можно взять неубывающую и ограниченную функцию g, определяемую равенством (13.10). Тогда $\forall x', x'' \in\in [a\,,\, b]$ при $x' < x''$ будем иметь

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant \bigvee_{x'}^{x''} = g(x'') - g(x') .$$

(b)⇒(c) Пусть g — мажоранта для f на $[a\,,\, b]$. Положим $h(x) := := g(x) - f(x)$, т. е. $f(x) = g(x) - h(x)$. Если $x' < x''$, то

$$h(x'') - h(x') = [g(x'') - f(x'')] - [g(x') - f(x')] =$$
$$= [g(x'') - g(x')] - [f(x'') - f(x')] \geqslant [g(x'') - g(x')] - |f(x'') - f(x')| \geqslant 0 .$$

(c)$\Rightarrow$(a) Пусть $f(x) = g(x) - h(x)$, где g и h — неубывающие ограниченные функции. Так как g и h — функции ограниченной вариации, то в силу теоремы 59 функция f есть функция ограниченной вариации. ▶

Замечания. 1. Так как в представлении $f(x) = g(x) - h(x)$ обе функции g и h ограничены, то, прибавляя к ним одну и ту же постоянную, можно добиться того, что обе эти функции будут положительными. Прибавляя к ним одну и ту же строго возрастающую функцию (например, arctg), можно добиться того, что обе функции станут строго возрастающими.

2. Напомним, что для любой монотонной ограниченной функции $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ существуют конечные пределы

$$\varphi(c+0) := \lim_{\substack{x\to c,\\ x>c}} \varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(c-0) := \lim_{\substack{x\to c,\\ x<c}} \varphi(x)\,,$$

если $c \in (a\,,\,b)$, и один из этих пределов, если $c = a$ или $c = b$. Учитывая это и теорему 62(c), заключаем, что такое же утверждение имеет место и в случае, когда φ — функция ограниченной вариации.

5. Непрерывные функции ограниченной вариации

Теорема 63. *Пусть $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, непрерывная в точке $x_0 \in [a\,,\,b]$. Тогда функция $g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством $g(x) := \bigvee\limits_a^x f$, тоже непрерывна в точке x_0.*

◀ Предположим, что $x_0 < b$, и покажем, что функция f непрерывна в точке x_0 *справа.* С этой целью, задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, возьмем разбиение $T := \{x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n\}$ отрезка $[x_0\,,\,b]$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$V(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_a^b f - \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Выполнения первого неравенства можно достичь в силу того, что f — функция ограниченной вариации, а второго — в силу того, что f

непрерывна в точке x_0. Таким образом, имеем

$$\bigvee_{x_0}^{b} f < \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b} f\,,$$

и значит, $\bigvee\limits_{x_0}^{x_1} f < 2\varepsilon$, т. е. $g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$.

Отсюда в пределе при $x_1 \to x_0\,, x_1 > x_0$ получим

$$0 \leqslant g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon\,,$$

а ввиду произвольности числа ε будем иметь $g(x_0 + 0) = g(x_0)$.

Аналогично можно показать, что при $x_0 > a$ будет $g(x_0 - 0) = g(x_0)$, т. е. что функция g непрерывна в точке x_0 *слева.* ▶

Следствие. *Непрерывную функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности непрерывных неубывающих функций.*

◀ В этом случае в качестве мажоранты для f можно взять неубывающую непрерывную функцию $g(x) := \bigvee\limits_{a}^{x} f$. ▶

Теорема 64. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a\,, b] \subset \mathbb{R}$, то*

$$\bigvee_{a}^{b} f = \lim_{\lambda(T) \to 0} V(f; T)\,.$$

◀ Так как по определению

$$\bigvee_{a}^{b} f := \sup_{T} V(f; T) \leqslant +\infty\,,$$

то достаточно доказать, что

$$\forall A < \bigvee_{b}^{a} f \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall T \;:\; \lambda(T) \leqslant \delta \implies V(f; T) > A\,.$$

С этой целью найдем сначала такое разбиение T^* с точками деления $a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_m^* = b$, что $V(f; T^*) > A$. Пользуясь, далее, теоремой Кантора о равномерной непрерывности, имеем

$$\exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in [a, b] \;:\; |x' - x''| \leqslant \delta \implies |f(x'') - f(x')| \leqslant \frac{V(f; T^*) - A}{4m}\,.$$

Пусть теперь T — разбиение отрезка $[a\,,\,b]$, для которого $\lambda(T)\leqslant\delta$. Тогда в силу монотонности функции $T\longmapsto V(f;T)$ будем иметь

$$V(f;T\cup T^*)\geqslant V(f;T^*)>A\,.$$

С другой стороны, разбиение $T\cup T^*$ можно получить из разбиения T добавлением не более чем m новых точек x_k^*. Каждое такое добавление вызывает увеличение суммы $V(f;T)$ меньшее, чем $\dfrac{V(f;T^*)-A}{2m}$. Поэтому будет

$$V(f;T\cup T^*)-V(f;T)\leqslant\frac{V(f;T^*)-A}{2}\,.$$

Таким образом, имеем

$$V(f;T)\geqslant\frac{V(f;T^*)+A}{2}>\frac{A+A}{2}>A\,.\ \blacktriangleright$$

6. Спрямляемые плоские пути

Предположим, что задан плоский путь

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=x(t)\,,\\ y=y(t)\,,\end{cases}\quad a\leqslant b\,.$$

Допустим, что на нем нет кратных точек, т. е.

$$\forall t',t''\in[a\,,\,b]\ :\ t'\neq t''\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{r}(t')\neq\boldsymbol{r}(t'')\,,$$

кроме случая $t'=a$, $t''=b$, когда возможно равенство $\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b)$. Такие пути называются *простыми* или *жордановыми*. Жорданов путь называется *замкнутым*, если $\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b)$, и *разомкнутым*, если $\boldsymbol{r}(a)\neq\boldsymbol{r}(b)$. Очевидно, что замкнутая жорданова кривая (т. е. образ отрезка $[a\,,\,b]$ в плоскости $\mathbb{R}^2$) гомеоморфна окружности, а разомкнутая — отрезку $[0\,,\,1]$. Известна следующая теорема.

Теорема 65 (Жордан[4]). *Если $L\subset\mathbb{R}$ — замкнутая жорданова кривая, то ее дополнение $\mathbb{R}^2\diagdown L$ не является связным, а состоит из*

[4] *Жордан* Мари Энмон Камиль (1838—1922) — французский математик.

двух областей D^+ *и* D^-, *т. е.* $\mathbb{R}^2 \setminus L = D^+ \sqcup D^-$, *причем* L *есть граница каждой из этих областей.*

Этот геометрически очевидный факт на самом деле доказывается довольно сложно, и мы на доказательстве здесь не останавливаемся.

Взяв разбиение T отрезка $[a\,,\,b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\,,$$

составим выражение для длины $l(T)$ ломаной линии $A_0\,,\,A_1\,,\,\ldots\,,\,A_n$, вписанной в кривую L

$$l(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{k+1}) - x(t_k)]^2 + [y(t_{k+1}) - y(t_k)]^2}\,.$$

Напомним, что кривая L называлась *спрямляемой*, если множество

$$\{l(T) \bigm| T\text{— разбиение}\}$$

ограничено сверху. Длину спрямляемой кривой можно определить следующим образом:

$$l := \sup_T l(T)\,.$$

Ранее было доказано, что гладкий путь является спрямляемым, и была выведена формула для его длины. Ниже излагается критерий спрямляемости плоского пути (жордановой кривой).

Теорема 66 (Жордан). *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *путь*

$$\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad a \leqslant t \leqslant b\,,$$

— спрямляемый;

(b) *обе функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ являются функциями ограниченной вариации.*

◀ (a)⇒(b) Если путь спрямляемый, а его длина равна l, то при любом разбиении T будет $l(T) \leqslant l$. Из очевидных неравенств

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{|x(t_{k+1}) - x(t_k)|^2 + |y(t_{k+1}) - y(t_k)|^2} \leqslant l\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |y(t_{k+1}) - y(t_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{|x(t_{k+1}) - x(t_k)|^2 + |y(t_{k+1}) - y(t_k)|^2} \leqslant l$$

следует, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| \leqslant l\,, \quad \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_{k+1}) - y(t_k)| \leqslant l\,,$$

т. е. что $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — функции ограниченной вариации.

(b)⇒ (a). Используя неравенство треугольника и ограниченность вариаций данных функций, имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{|x(t_{k+1}) - x(t_k)|^2 + |y(t_{k+1}) - y(t_k)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_{k+1}) - y(t_k)| \leqslant \bigvee_a^b x + \bigvee_a^b y < +\infty\,.$$

Отсюда очевидно, что данная кривая — спрямляемая, причем для ее длины l имеем такую оценку

$$l \leqslant \bigvee_a^b x + \bigvee_a^b y < +\infty\,. \ ▶$$

Замечания. 1. Рассматривая переменную длину дуги $s = s(t)$ как функцию параметра $t \in [a\,,\, b]$, применим последнее неравенство к отрезку $[t\,;\, t+\Delta t]$, где $\Delta t > 0$. Тогда получим

$$0 < \Delta s \leqslant \bigvee_{t}^{t+\Delta t} x + \bigvee_{t}^{t+\Delta t} y\,.$$

Так как обе вариации справа бесконечно малы, то $\Delta s \to 0$ при $\Delta t \to 0$, т. е. функция $s = s(t)$ непрерывна на отрезке $[a\,,\, b]$. Итак, *переменная длина дуги спрямляемой кривой является непрерывной функцией параметра.*

2. Так как функция $s = s(t)$ строго возрастает от 0 до l, когда t возрастает от а до b, то при любом $n \in \mathbb{N}$ существует разбиение данной кривой на n дуг, каждая из которых имеет длину l/n. Если плоскость покрыта сетью квадратов со стороной l/n, то каждая частичная дуга пересекается не более чем с шестью квадратами. Значит, сумма площадей квадратов, покрывающих всю данную кривую, не превосходит такого числа:

$$n \cdot 6 \cdot \frac{l^2}{n^2} = \frac{6l^2}{n} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty\,.$$

Поэтому множество точек спрямляемой кривой $L \subset \mathbb{R}^2$ имеет площадь нуль. Отсюда следует, что *всякая плоская фигура $D \subset \mathbb{R}^2$, границу которой можно представить в виде объединения конечного числа спрямляемых кривых, квадрируема.*

§ 2. Теория интеграла Стилтьеса

1. Понятие интеграла Стилтьеса

Интеграл Стилтьеса[5] является непосредственным обобщением определенного интеграла Римана. В связи с этим его иногда называют также интегралом Римана — Стилтьеса. Определяется он следующим образом.

Пусть на отрезке $[a\,,\, b] \subset \mathbb{R}$ заданы две функции f и g. Берем разбиение $T = \{x_0\,,\, x_1\,, \ldots,\, x_n\}$ отрезка $[a\,,\, b]$ точками x_ν, связанными неравенствами

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\,.$$

[5] *Сти́лтьес* Томас Иоганнес (1856—1894) — нидерландский математик.

Обозначим, как обычно,

$$\Delta_k := [x_k\,,\, x_{k+1}]\,,\ \ \Delta x_k := x_{k+1} - x_k\,,$$

где $\lambda(T) := \max\limits_k \Delta x_k$ — мелкость разбиения T. Введем также *множество отмеченных точек* $\{\xi_0\,,\, \xi_1\,, \ldots,\, \xi_{n-1}\}$, где $\xi_k \in \Delta_k$. Составим сумму

$$\sigma(f;\Delta g;T;\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta g(x_k)\,, \tag{13.11}$$

где обозначено $\Delta g(x_k) = g(x_{k+1}) - g(x_k)$. Сумма (13.11) называется *интегральной суммой Стилтьеса.*

Определение 41. *Функция f называется интегрируемой по функции g на отрезке $[a\,,\, b] \subset \mathbb{R}$, если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f;\Delta g;T;\xi)$. Этот предел называется интегралом Стилтьеса в пределах от a до b функции f по функции g.*

Обозначение для интеграла Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f;\Delta g;T;\xi)\,.$$

Применяются и другие обозначения, но на них здесь не останавливаемся. Выше предполагалось, что $a < b$. Если $a > b$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) := -\int\limits_b^a f(x)dg(x)\,.$$

Если же $a = b$, то естественно считать, что

$$\int\limits_a^a f(x)dg(x) := 0\,.$$

Очевидно, что единственное отличие интегральной суммы Стилтьеса (13.11) от интегральной суммы Римана

$$\sigma(f;T;\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

заключается в том, что в сумму Римана входят приращения Δx_k аргумента x, а в сумму Стилтьеса — приращения $\Delta g(x_k)$ функции g. В частном случае $g(x)\equiv x$ сумма Стилтьеса переходит в сумму Римана.

2. Критерий существования интеграла Стилтьеса

Здесь ограничимся только тем случаем, когда функция

$$g\ :\ [a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$

не убывает, и $a<b$. Но тогда $\Delta g(x_k)\geqslant 0$ для всех $k=0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n{-}1$. Предполагая функцию f ограниченной, вводим в рассмотрение числа

$$M_k:=\sup_{\Delta_k} f(x)\,,\quad m_k:=\inf_{\Delta_k} f(x)\,,$$

а также суммы

$$s(f;\Delta g;T):=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta g(x_k)\,,\quad S(f;\Delta g;T):=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta g(x_k)\,,$$

называемые соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу — Стилтьеса.* Прежде всего очевидно, что

$$s(f;\Delta g;T)\leqslant\sigma(f;\Delta g;T;\xi)\leqslant S(f;\Delta g;T)\,,$$

причем

$$s(f;\Delta g;T)=\inf_T\sigma(f;\Delta g;T;\xi)\,,\quad S(f;\Delta g;T)=\sup_T\sigma(f;\Delta g;T;\xi)\,.$$

Суммы Дарбу — Стилтьеса обладают, как и суммы Дарбу в случае $g(x)\equiv x$, следующими свойствами.

1°. *Если к разбиению T добавить новые точки, то от этого нижняя сумма Дарбу — Стилтьеса может только увеличиться, а верхняя — только уменьшится.*

2°. *Для любых двух разбиений T' и T'' имеет место неравенство*

$$s(f;\Delta g;T') \leqslant S(f;\Delta g;T'')\,. \tag{13.12}$$

На доказательствах не останавливаемся, так как они не отличаются от доказательств этих свойств в случае сумм Дарбу для интеграла Римана. Из неравенства (13.12) следует, что существуют числа I_* (нижний интеграл Дарбу — Стилтьеса) и I^* (верхний интеграл Дарбу — Стилтьеса), определяемые соответственно следующим образом:

$$I_* := \sup_T s(f;\Delta g;T)\,, \quad I^* := \inf_T S(f;\Delta g;T)\,.$$

Из (13.12) очевидны следующие неравенства

$$s(f;\Delta g;T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(f;\Delta g;T)\,. \tag{13.13}$$

Наконец, с помощью сумм Дарбу — Стилтьеса легко устанавливается основной критерий существования интеграла Стилтьеса.

Теорема 67. *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *интеграл Стилтьеса* $I = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *существует;*

(b) $\lim\limits_{\lambda(t)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f;\Delta_k)\cdot\Delta g(x_k) = 0$, *где* $\omega(f;\Delta_k)$ *— колебание функции* f *на отрезке* Δ_k.

◀ (a)⇒(b) По определению предела имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T\ \forall\xi\ :\ \lambda(T)\leqslant\delta \implies I-\varepsilon \leqslant \sigma(f;\Delta g;T;\xi) \leqslant I+\varepsilon\,.$$

Взяв здесь sup и inf по всем отмеченным точкам ξ, получим

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T\ :\ \lambda(T)\leqslant\delta \implies \left\{\begin{array}{c} I-\varepsilon \leqslant S(f;\Delta g;T) \leqslant I+\varepsilon\,, \\ I+\varepsilon \geqslant s(f;\Delta g;T) \geqslant I-\varepsilon\,. \end{array}\right.$$

Вычитая из верхних неравенств нижние, найдем

$$-2\varepsilon \leqslant S(f;\Delta g;T) - s(f;\Delta g;T) \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Так как

$$S(f;T) - s(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta g(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k)\,,$$

то имеем

$$-2\varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{k-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k) \leqslant 2\varepsilon\,,$$

т. е.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k) = 0\,.$$

(b)$\Rightarrow$(a) Из неравенств (13.13) вытекает, что

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(f;\Delta g;T) - s(f;\Delta g;T) = \sum_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k)\,.$$

Так как правая часть по условию стремится к нулю, то нижний и верхний интегралы Дарбу равны между собой. Вводя обозначение $I := I_* = I^*$, покажем, что $I = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$. Имеем такие неравенства

$$s(f;\Delta g;T) \leqslant \sigma(f;\Delta g;T;\xi) \leqslant s(f;\Delta g;T)\,,$$
$$-S(f;\Delta g;T) \geqslant I \geqslant s(f;\Delta g;T)\,.$$

Вычитая из верхних неравенств нижние, получим

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k) \leqslant \sigma(f;\Delta g;T;\xi) - I \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k)\,.$$

Отсюда в пределе при $\lambda(T)\to 0$ получаем требуемое. ▶

3. Достаточные условия существования интеграла Стилтьеса

Теорема 68. *Если функция* $f\ :\ [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна, а* $g\ :\ [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации, то интеграл Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *существует.*

◀ Предположим сначала, что функция g не убывает. Пользуясь теоремой Кантора о равномерной непрерывности, имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall t',\ t'' \in [a\,,\,b] \ : \\ |t'' - t'| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}\,. \quad (13.14)$$

Возьмем теперь разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ отрезка $[a\,,\,b]$, для которого $\lambda(T) \leqslant \delta$. Тогда в силу условия (13.14) будем иметь

$$0 \leqslant \omega(f;\Delta_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}\,,$$

и значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}\sum_{k=0}^{n-1}[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \varepsilon\,.$$

Поэтому $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k) = 0$, и в силу теоремы 67 интеграл существует. Если функция g не монотонна, то как мы знаем, ее можно представить в виде разности $g = g_1 - g_2$, где функции g_1 и g_2 не убывают. Так как правая часть равенства

$$\sigma(f;\Delta g;T;\xi) = \sigma(f;\Delta g_1;T;\xi) - \sigma(f;\Delta g_2;T;\xi)$$

имеет конечный предел при $\lambda(T) \to 0$, то тот же предел имеет и левая часть, т. е. интеграл Стилтьеса существует и в этом случае. ▶

В следующих теоремах ослабляются ограничения, налагаемые на функцию f, но одновременно усиливаются ограничения на функцию g.

Теорема 69. *Если на отрезке $[a\,,\,b]$ функция f интегрируема по Риману, а функция g удовлетворят условию Липшица, то интеграл Стилтьеса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ существует.*

◀ Как и в доказательстве теоремы 13.14, достаточно предположить, что функция g не убывает. Тогда условие Липшица будет выглядеть так:

$$\exists L \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall x', x'' \in [a\,,\,b] \ : \\ x' < x'' \ \Longrightarrow\ g(x'') - g(x') \leqslant L\cdot(x'' - x')\,. \quad (13.15)$$

Поэтому для любого разбиения $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a, b]$ будем иметь

$$\Delta g(x_k) = g(x_{k+1}) - g(x_k) \leqslant L \cdot \Delta x_k .$$

Используя эти неравенства, находим

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k) \Delta g(x_k) \leqslant L \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k) \Delta x_k \to 0$$

при $\lambda(T) \to 0$, так как f интегрируема по Риману. Переходя к пределу в последних неравенствах, имеем

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k) \Delta g(x_k) = 0,$$

и в силу теоремы 67 интеграл Стилтьеса существует. Если же функция g не монотонна, то представляем ее в виде

$$g(x) = L \cdot x - (L \cdot x - g(x)), \tag{13.16}$$

где L — константа Липшица из (13.15). Функция $x \longmapsto L \cdot x$ возрастает и удовлетворяет условию Липшица (поскольку имеет непрерывную производную). Вторая функция не убывает, поскольку при $x' < x''$ имеем:

$$[L \cdot x'' - g(x'')] - [L \cdot x' - g(x')] = L \cdot (x'' - x') - (g(x'') - g(x')) \leqslant 0$$

в силу неравенства (13.15). Так как в правой части (13.16) обе функции не убывают, то интегралы по ним существуют. Значит, существует интеграл и по функции g. ▶

Теорема 70. *Если на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема по Риману, а функция g представима в виде*

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \tag{13.17}$$

где φ суммируема, то интеграл $\int_a^b f(x) dg(x)$ существует.

◀ Предположим сначала, что функция φ — неотрицательная. Тогда функция g, задаваемая равенством (13.17), не убывает. Если функция φ интегрируема по Риману, то она ограничена, т. е. $|\varphi(t)| \leqslant$ $\leqslant L < +\infty$. Тогда при $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$ имеем

$$|g(x'') - g(x')| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} \varphi(t)dt\right| \leqslant L \cdot |x'' - x'|,$$

т. е. g удовлетворяет условию Липшица. Поэтому интеграл $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ существует в силу теоремы 69.

Предположим теперь, что функция φ абсолютно интегрируема на $[a, b]$ в несобственном смысле. Для простоты предположим, что единственной особой точкой этого несобственного интеграла является b, т. е. φ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b]$. Обозначим $\Omega = \omega(f; [a, b])$ — колебание функции f на отрезке $[a, b]$. Так как f интегрируема по Риману, то $0 < \Omega < +\infty$. Задавая $\varepsilon > 0$, найдем $\eta_\varepsilon \in [a, b)$ так, чтобы $\forall \eta \in [\eta_\varepsilon, b)$ было

$$\left|\int\limits_{\eta}^{\to b} \varphi(t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\Omega}.$$

Возьмем любое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a, b]$ и составим сумму

$$\sum = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k) =: \sum{}' + \sum{}''$$

В сумму $\sum'$ пусть входят все слагаемые, для которых $\Delta_k \cap [a, \eta_\varepsilon] \neq \varnothing$, а в сумму $\sum''$ — все остальные слагаемые. Тогда, если $\lambda(T) < \dfrac{b - \eta_\varepsilon}{2}$, то

$$\sum{}'' \leqslant \Omega \sum{}'' \Delta g(x_k) \leqslant \Omega \int\limits_{\eta_\varepsilon}^{b} \varphi(t)dt \leqslant \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как на отрезке $[a\,,\,b-\eta_\varepsilon/2]$ функция φ интегрируема по Риману, то $\sum' \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$.

Если функция φ абсолютно интегрируема, но может принимать значения обоих знаков, то представляем ее в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)\,,$$

где

$$\varphi_1(t) = \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2}$$

— неотрицательные функции. Тем самым вопрос сводится к уже рассмотренному случаю. ▶

4. Свойства интеграла Стилтьеса

Из определения интеграла Стилтьеса непосредственно вытекают следующие его свойства:

1°. $\displaystyle\int\limits_a^b dg(x) = g(b) - g(a)\,;$

2°. $\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) = \int\limits_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int\limits_a^b f_2(x)dg(x)\,;$

3°. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int\limits_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int\limits_a^b f(x)dg_2(x)\,;$

4°. $\displaystyle\forall k, l \in \mathbb{R}\ :\ \int\limits_a^b k \cdot f(x)d[l \cdot g(x)] = kl\int\limits_a^b f(x)dg(x)\,.$

При этом в случаях 2° — 4° из существования интегралов в правых частях следует существование интегралов в левых частях соответствующих равенств.

5°. *Если $a < c < b$, то*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) \tag{13.18}$$

в предположении, что существует интеграл в левой части.

◀ Достаточно ограничиться тем случаем, когда функция g не убывает. Возьмем разбиение $T = \{x_0\,,\, x_1\,,\, \ldots\,,\, x_n\}$ отрезка $[a\,,\, b]$ так, чтобы было $T = T_1 \cup T_2$, где $T_1 = \{x_0\,,\, x_1\,,\, \ldots\,,\, x_m\}$ и $T_2 = \{x_m\,,\, x_{m+1}\,,\, \ldots\,,\, x_n\}$ — разбиения отрезков $[a\,,\, c]$ и $[c\,,\, b]$ соответственно. При таком выборе разбиений должны выполняться следующие соотношения:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b\,,$$

а для интегральных сумм Стилтьеса — равенство

$$\sigma(f; \Delta g; T; \xi) = \sigma(f; \Delta g; T_1; \xi_1) + \sigma(f; \Delta g; T_2; \xi_2)\,. \tag{13.19}$$

Аналогично имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k) = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k) + \sum_{k=m}^{n-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k)\,. \tag{13.20}$$

Отсюда в силу неотрицательности всех этих сумм вытекают неравенства

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k)\,; \tag{13.21}$$

$$0 \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f; \Delta_k)\Delta g(x_k)\,. \tag{13.22}$$

Так как интеграл в левой части равенства (13.18) существует, то в силу критерия Дарбу — Стилтьеса правые части равенств (13.21) и

(13.22) стремятся к нулю при $\lambda(T) \to 0$. Поэтому из (13.21) и (13.22) следует существование обоих интегралов в правой части (13.18). Равенство (13.18) получается предельным переходом при $\lambda(T) \to 0$ из равенства (13.19). ▶

Замечание. Отметим следующий факт, не имеющий аналога в теории интеграла Римана: *из существования обоих интегралов в правой части равенства* (13.18) *не следует существования интеграла в левой части.*

◀ Для обоснования такого рода фактов достаточно построить соответствующий пример. Функции f, $g : [-1\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ зададим следующим образом:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0\,, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1\,; \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0\,, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Тогда имеют место равенства

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dg(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{1} f(x)dg(x) = 0\,.$$

Первое равенство следует из того, что на промежутке интегрирования $f(x) \equiv 0$, а второе из того, что на промежутке интегрирования $g(x) \equiv 1$.

Однако *интеграл* $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ *не существует.*

Действительно, возьмем такое разбиение $T = \{x_0\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\}$ отрезка $[-1\,,\,1]$, чтобы было $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m < 0 < x_{m+1} < \ldots < x_m = 1$, т. е. чтобы было $0 \in (x_m\,, x_{m+1})$. Тогда интегральная сумма преобразуется к виду

$$\omega(f;\Delta g;T;\xi) = \sum_{k=m}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k) = f(\xi_k)[g(x_{m+1}) - g(x_m)] = f(\xi_m)\,,$$

где $\xi_m \in [x_m\,, x_{m+1}]$ — отмеченная точка. Считая, что $\xi_m < 0$, получим $\sigma(f;\Delta;T;\xi) = 0$, а при $\xi_m > 0$ будет $\sigma(f;\Delta g;T;\xi) = 1$. Таким образом, колебание интегральных сумм $\sigma(f;\Delta g;T;\xi)$ интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ *не меньше* 1 для любых сколь угодно мелких разбиений. Иначе говоря, не выполнен критерий Коши существования конечного предела

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f;\Delta g;T;\xi)\,.$$

Поэтому рассматриваемый интеграл *не существует.* ▶

Указанное обстоятельство связано с тем, что обе функции f и g разрывны в одной и той же точке.

5. Интегрирование по частям

Теорема 71. *Для интегралов Стилтьеса справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x) \tag{13.23}$$

в предположении, что один из этих интегралов существует.

◀ Предположим для определенности, что существует правый интеграл из (13.23). Беря разбиение $T = \{x_0\,,\, x_1\,, \ldots,\, x_n\}$ отрезка $[a\,,\, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in \Delta_k$, преобразуем интегральную сумму левого интеграла из (13.23)

$$\sigma(f; \Delta g; T; \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k) =$$

$$= f(\xi_{n-1})g(b) + \sum_{k=0}^{n-2} f(\xi_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k) - f(\xi_0)g(a) =$$

$$= f(\xi_{n-1})g(b) - f(\xi_0)g(a) - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})]\,.$$

Если в правой части прибавить и вычесть выражение

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)\,,$$

то получим

$$\sigma(f; \Delta g; T; \xi) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\} =$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \sigma(g; \Delta f; x; T)\,. \tag{13.24}$$

Последняя сумма справа — интегральная сумма интеграла $\int\limits_a^b g(x)df(x)$, существование которого предположено. Роль точек деления играют точки a, ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{n-1}, b, а роль отмеченных точек — точки a, x_1, x_2 ..., x_{n-1}, b. Переходя к пределу в равенстве (13.24) при $\lambda(T) \to 0$, получим равенство (13.23). ▶

Следствие. *Если функция f интегрируема по функции g, то и функция g интегрируема по функции f.*

Отсюда можно получить новые случаи существования интеграла Стилтьеса, например, меняя в свойствах 2° — 4° местами функции f и g.

6. Вычисление интегралов Стилтьеса

Теорема 72. *Если на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция f интегрируема по Риману, а функция g представима в виде*

$$g(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)dt,$$

где φ — интегрируема по Риману, то справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx. \tag{13.25}$$

◀ Существование этих интегралов было установлено выше. Осталось только установить равенство (13.25). Достаточно ограничиться случаем $\varphi \geqslant 0$. Беря разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a, b]$, составим интегральную сумму Стилтьеса

$$\sigma(f, \Delta g; T; \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_n)] = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)\varphi(x)dx. \tag{13.26}$$

С другой стороны

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi(x)dx\,. \tag{13.27}$$

Оценим сверху модуль разности между левыми частями (13.26) и (13.27)

$$|\sigma(f;\Delta;T\xi) - \int_a^b f(x)\varphi(x)dx| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)|\varphi(x)dx \leqslant$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f,\Delta_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f;\Delta_k)\Delta g(x_k) \to 0$$

при $\lambda(T) \to 0$ в силу критерия существования интеграла Стилтьеса. Из (13.26) в пределе получим равенство (13.25). ▶

Замечание. Если, в частности, функция g имеет интегрируемую по Риману производную $\varphi = g'$, то в (13.25) под $dg(x)$ понимается обычный дифференциал.

Обратимся теперь к случаям, когда в интеграле Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

функция g оказывается *разрывной*, что для практики представляет особый интерес. Рассмотрим сначала функцию Хевисайда[6]

$$\rho(x) := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0\,, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

В некотором смысле эта функция является *стандартной* разрывной функцией. Функция Хевисайда всюду непрерывна, кроме нуля, где она является *непрерывной слева*, т. е. $\rho(-0) = \rho(0)$, но разрывной справа, со скачком $\rho(+0) - \rho(0) = 1$. Функция $\rho_c(x) := \rho(x-c)$ обладает такими

[6] Хевисайд (Heaveside) Оливер (1850—1925) — английский физик и инженер.

же свойствами в точке c. Функция $\rho(c-x)$ — *непрерывна справа*, и разрывна слева, со скачком, равным (-1).

Вычислим интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)d\rho(x-c)\,,$$

предполагая, что $a \leqslant c < b$ (при $c = b$ этот интеграл равен нулю). Составим интегральную сумму

$$\sigma(f;\Delta\rho_c,T,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta\rho_c(x_k) = f(\xi_m)\,,$$

где $x_m \leqslant c < x_{m+1}$. Здесь при $\lambda(T) \to 0$ будет $\xi_m \to c$, и в силу непрерывности функции f в пределе получим

$$\int_a^b f(x)d\rho(x-c) = f(c)\,.$$

Аналогично при $a < c \leqslant b$ имеем

$$\int_a^b f(x)d\rho(c-x) = -f(c)\,,$$

а при $c = a$ этот интеграл равен нулю.

Теорема 73. *Пусть на отрезке $[a\,,\,b]$ функция f непрерывна, а функция g имеет всюду, кроме конечного множества точек, производную g', которая абсолютно интегрируема на $[a\,,\,b]$. При этом пусть функция g в точках c_j, связанных неравенствами*

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_m = b\,,$$

допускает разрывы первого рода. Тогда

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{k=0}^{m} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]\,. \quad (13.28)$$

◀ Правая часть равенства (13.28) имеет написанный вид, если условиться считать, что на концах a и b отрезка $[a\,,\,b]$ функция g непрерывна слева и справа соответственно. Для упрощения записи введем обозначения

$$\alpha_k^+ := g(c_k+0) - g(c_k) \quad \text{и} \quad \alpha_k^- := g(c_k) - g(c_k - 0)$$

соответственно для правого и левого скачков функции g в точке c_k. Очевидно, что $\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k+0) - g(c_k-0)$ при $k = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,m$. Составим вспомогательную функцию

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m} [\alpha_k^+ \rho(x - c_k) - \alpha_k^- \rho(c_k - x)]\,.$$

Эта функция кусочно-постоянная, допускает разрывы только в точках $c_0\,,\,c_1\,,\,\ldots\,,\,c_m$ с теми же скачками, что и функция g. В самом деле,

$$g_1(c+0) - g_1(c_j - 0) = \alpha_j^+ + \alpha_j^- = g(c_j+0) - g(c_j - 0).$$

По этой причине разность $g_2(x) := g(x) - g_1(x)$ оказывается уже непрерывной. Действительно, в окрестности точки c_j имеем

$$g_2(x) = g(x) - \alpha_j^+ \rho(x - c_j) + \alpha_j^- \rho(c_j - x) + \psi_j(x)\,,$$

где $\psi_j(x)$ непрерывна в точке c_j. Далее,

$$g_2(c_j) = g(c_j) + \psi_j(c_j)\,;$$

$$\lim_{\substack{x\to c_j,\\ x<c_j}} g_2(x) = g(c_j - 0) + \alpha_j^- \psi(c_j) = g(c_j) + \psi_j(c_j)\,;$$

$$\lim_{\substack{x\to c_j,\\ x>c_j}} g_2(x) = g(c_j + 0) - \alpha_j^+ \psi(c_j) = g(c_j) + \psi_j(c_j)\,.$$

И, наконец, если $x \in (c_k\,,\,c_{k+1})$, где $k = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,m-1$, то

$$g'(x) = g_1'(x) + g_2'(x) = g_2'(x)\,,$$

так как функция g_1 постоянна на $(c_k\,,\,c_{k+1})$. Но тогда по формуле (13.25) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dg_2(x) = \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx\,,$$

откуда

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x)dg_2(x) + \int\limits_a^b f(x)dg_1(x) =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{k=0}^{m} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)]\,. \ \blacktriangleright$$

7. Теоремы «о среднем» и оценка интеграла Стилтьеса

Теорема 74 (первая теорема «о среднем»). *Предположим, что функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена, т. е.*

$$\exists m\,,\ M \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall x \in [a\,,\,b] \ : \ m \leqslant f(x) \leqslant M\,,$$

а функция $g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ не убывает. Если f интегрируема по функции g на отрезке $[a\,,\,b]$, то существует число $\mu \in [m\,,\,M]$, такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x)dx = \mu \cdot [g(b) - g(a)]\,. \tag{13.29}$$

◀ Так как g не убывает, то в случае $g(a) = g(b)$ эта функция — постоянная, и равенство (13.29) приобретает вид $0 = 0$. В случае $g(a) < g(b)$ оценим сверху и снизу интегральную сумму Стилтьеса $\sigma(f;\Delta g;T;\xi)$:

$$m \cdot [g(b) - g(a)] \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] \leqslant M \cdot [g(b) - g(a)]\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$ и деля на $g(b) - g(a)$, получим

$$m \leqslant \frac{1}{g(b) - g(a)} \int\limits_a^b f(x)dg(x) \leqslant M. \tag{13.30}$$

Вводя обозначение

$$\mu := \frac{1}{g(b)-g(a)} \int\limits_a^b f(x)dg(x)\,, \tag{13.31}$$

из (13.30) заключаем, что $\mu \in [m\,,\, M]$, а равенство (13.31) равносильно равенству (13.29). ▶

Теорема 75 (первая теорема «о среднем»). *Если функция f непрерывна, а g не убывает на отрезке $[a\,,\, b]$, то существует точка $\xi \in [a\,,\, b]$, такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = f(\xi)\cdot[g(b)-g(a)]\,. \tag{13.32}$$

◀ При условиях теоремы существование интеграла (13.32) было установлено в теореме 68. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a\,,\, b]$, то она ограничена, т. е. $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 74, и потому выполняется равенство (13.29), где $m \leqslant \mu \leqslant M$. Далее, так как f непрерывна на $[a\,,\, b]$, то по теореме о промежуточных значениях существует точка $\xi \in [a\,,\ ,b]$, такая, что $\mu = f(\xi)$, и таким образом, равенство (13.29) приобретает вид равенства (13.32). ▶

Теорема 76. *Если на отрезке $[a\,,\, b] \subset \mathbb{R}$ функция f непрерывна, а является g функцией ограниченной вариации, то имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dg(x)\right| \leqslant M\cdot V\,, \tag{13.33}$$

где $M = \max\limits_{[a,b]}|f(x)|$, $V = \bigvee\limits_a^b g$.

◀ Оценим сверху модуль интегральной суммы интеграла (13.33)

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)||g(x_{k+1})-g(x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leqslant M \cdot \bigvee_a^b g = M \cdot V\,.$$

Итак, имеем

$$|\sigma(f;\Delta;T;\xi)| \leqslant M \cdot V\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим неравенство (13.33). ▶

Используя теорию интеграла Стилтьеса, дадим другое доказательство теоремы 37.

Теорема 77 (вторая теорема «о среднем»). *Если на отрезке* $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ *функция* f *интегрируема по Риману, а функция* g *монотонна, то существует точка* $\xi \in [a\,,\,b]$, *такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx\,. \tag{13.34}$$

◀ Функция F, определяемая равенством

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt\,,$$

непрерывна, причем $F(a) = 0$. В самом деле,

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \leqslant h \cdot \sup|f(t)| \to 0$$

при $h \to 0$, так как f ограничена. Применяя формулу интегрирования по частям и теорему «о среднем» для интеграла Стилтьеса, имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x) =$$

$$= g(b)F(b) - g(a)F(a) - F(\xi)[g(b) - g(a)] =$$

$$= g(a)F(\xi) + g(b)[F(b) - F(\xi)] = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx\,. \ ▶$$

§ 3. Криволинейные интегралы (по плоским кривым)

1. Криволинейные интегралы 1 рода (по длине дуги)

Пусть γ — спрямляемая плоская кривая. Ее можно задать параметрически в виде отображения

$$\gamma \,:\, [a\,,\, b] \longrightarrow D\,, \tag{13.35}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, а D — область, лежащая в плоскости $\mathbb{R}^2$. Полагая $\boldsymbol{\gamma}(t) := x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, запишем параметрические уравнения кривой (13.35) в виде

$$\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases} \quad \text{где} \quad a \leqslant t \leqslant b\,. \tag{13.36}$$

Спрямляемость кривой γ означает, что обе функции (13.36) являются функциями ограниченной вариации. Задавая функцию $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{R}$, дадим следующее определение.

Определение 42. *Криволинейный интеграл 1 рода по кривой γ от функции определим равенством*

$$\int\limits_{\gamma} f(x\,,\, y)ds := \int\limits_{a}^{b} f[x(t)\,,\, y(t)] \cdot ds(t)\,, \tag{13.37}$$

где $s = s(t)$ — переменная длина дуги кривой γ.

Здесь под переменной длиной дуги кривой γ понимается длина той ее части, которая соответствует изменению параметра на отрезке $[a\,,\, t] \subset [a\,,\, b]$. Если, в частности, кривая γ — гладкая, то

$$ds(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt\,,$$

и определение (13.37) приобретает такой вид:

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y)ds = \int\limits_{a}^{b} f[x(t)\,,\, y(t)]\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt\,. \tag{13.38}$$

Перечислим основные свойства криволинейных интегралов первого рода.

1°. *Если кривая γ — спрямляемая, а функция — непрерывная, то криволинейный интеграл 1 рода существует.*

Как мы знаем, переменная длина дуги спрямляемой кривой — возрастающая и непрерывная функция от t. Поэтому интеграл в правой части равенства (13.37) существует в смысле Стилтьеса. Если, в частности, кривая γ – гладкая, то интеграл в правой части равенства (13.38) существует в смысле Римана.

2°. *Криволинейный интеграл 1 рода не зависит от выбора параметризации на γ. В частности, он не зависит от ориентации кривой γ.*

◀ Пусть, кроме уравнений (13.36), кривая γ задана другими уравнениями

$$\begin{cases} x = \xi(\tau)\,, \\ y = \eta(\tau)\,, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\,. \tag{13.39}$$

Так как в (13.36) и (13.39) кривая γ — одна и та же, то существует гомеоморфизм $t = t(\tau)\ :\ [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow [a\,,\,b]$ такой, что выполняются тождества

$$x(t(\tau)) \equiv \psi(\tau), \quad y(t(\tau)) \equiv \eta(\tau)\,.$$

Учитывая их и предполагая, что функция $t = t(\tau)$ возрастает, имеем

$$\int\limits_a^b f[x(t)\,,\,y(t))]\cdot ds(t) = \int\limits_\alpha^\beta f[x(t(\tau))\,,\,y(t(\tau))]\cdot ds(t(\tau)) =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f[\xi(\tau)\,,\,\eta(\tau)]d\sigma(\tau)\,, \tag{13.40}$$

где $\sigma(\tau)$ — переменная длина дуги в параметризации (13.39). Если функция $t = t(\tau)$ убывает, что соответствует изменению ориентации на γ, то имеем

$$t(\alpha) = b\,,\ t(\beta) = a\,.$$

Поэтому будет

$$\sigma(\tau) = s(b) - s(t(\tau))\,,$$

и значит,

$$\int\limits_a^b f[x(t)\,,\,y(t)]ds(t) = \int\limits_\beta^\alpha f[x(t(\tau))\,,\,y(t(\tau))]ds(t(\tau)) =$$

$$= -\int\limits_\alpha^\beta f[\xi(\tau)\,,\,\eta(\tau)]d[s(b) - \sigma(\tau)] = \int\limits_\alpha^\beta f[\xi(\tau)\,,\,\eta(\tau)]d\sigma(\tau)\,.$$

Получен такой же результат, как и в (13.40). ▶

3°. *Криволинейный интеграл 1 рода обладает свойством линейности, т. е.*

$$\int\limits_\gamma [\alpha f(x\,,\,y) + \beta g(x\,,\,y)]ds = \alpha\int\limits_\gamma f(x\,,\,y)ds + \beta\int\limits_\gamma g(x\,,\,y)ds\,,$$

где $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}$.

Для формулировки свойства аддитивности введем понятие композиции кривых.

Определение 43. *Предположим, что кривые* $\gamma_1\,:\,[a\,,\,c] \longrightarrow D$ *и* $\gamma_2\,:\,[c\,,\,b] \longrightarrow D$*, такие, что* $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$. *Их композицией будем называть кривую*

$$\gamma_1 * \gamma_2\;:\;[a\,,\,b] \longrightarrow D\,,$$

определенную равенством

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{при} \quad t \in [a\,,\,c]\,,\\ \gamma_2(t) & \text{при} \quad t \in [c\,,\,b]\,. \end{cases}$$

4°. *Криволинейный интеграл 1 рода обладает свойством аддитивности, т. е.*

$$\int\limits_{\gamma_1*\gamma_2} f(x\,,\,y)ds = \int\limits_{\gamma_1} f(x\,,\,y)ds + \int\limits_{\gamma_2} f(x\,,\,y)ds\,.$$

5°. *Если* $|f(x\,,\,y)| \leqslant M < +\infty$, *то*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(x\,,\,y)ds\right| \leqslant M \cdot |\gamma|$$

где через $|\gamma|$ *обозначена длина кривой* γ.

Последние два свойства очевидны, поэтому мы опускаем их доказательства.

Простейшей задачей, приводящей к понятию криволинейного интеграла 1 рода, является задача вычисления длины дуги. Полагая в (13.37) $f(x\,,\,y) \equiv 1$, получим

$$\int\limits_{\gamma} 1 \cdot ds = |\gamma|\,,$$

где $|\gamma|$ означает длину кривой γ.

Более сложной является задача вычисления массы M неоднородного тонкого криволинейного стержня γ по заданной на нем линейной плотности $\rho(x\,,\,y)$, где $(x\,,\,y)$ — точка стержня. Производя разбиение стержня на малые участки точками

$$A_0\,,\,A_1\,,\,\ldots\,,\,A_n\,,$$

считаем приближенно каждый участок $[A_k\,,\,A_{k+1}]$ однородным, а его плотность — постоянной и равной $f(\xi_k\,,\,\eta_k)$, где $(\xi_k\,,\,\eta_k) \in [A_k\,,\,A_{k+1}]$. Тогда для искомой массы получаем приближенное равенство

$$M \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot |[A_k\,,\,A_{k+1}]|\,. \tag{13.41}$$

В правой части этого равенства мы имеем интегральную сумму криволинейного интеграла (13.37). Принимая за точное значение массы предел сумм (13.41) при условии, что мелкость разбиения стремится к нулю, получим в пределе точное равенство

$$M = \int\limits_{\gamma} f(x\,,\,y)ds\,.$$

2. Криволинейные интегралы 2 рода (по координатам)

Пусть опять $\gamma : [a\,,\,b] \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ — спрямляемая плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями (13.36). Задавая две функции $P\,,\,Q\,:\,D \longrightarrow \mathbb{R}$ в области D, дадим следующее определение.

Определение 44. *Криволинейный интеграл 2 рода по кривой γ, ориентированной направлением от a до b, от выражения*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,,$$

определим равенством

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy :=$$

$$:= \int\limits_{a}^{b} \{P[x(t)\,,\,y(t)]dx(t) + Q[x(t)\,,\,y(t)]dy(t)\}\;. \quad (13.42)$$

Перечислим основные свойства криволинейных интегралов 2 рода.

1°. *Если кривая γ — спрямляемая, а функции $P\,,\,Q$ — непрерывные, то криволинейный интеграл 2 рода существует.*

При указанных условиях интеграл в правой части (13.42) существует в смысле Стилтьеса. Если дополнительно предположить, что кривая γ — гладкая, то получим такое равенство

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \{P[x(t)\,,\,y(t)]x'(t) + Q[x(t)\,,\,y(t)]y'(t)\}\,dt\,,$$

где в правой части интеграл существует в смысле Римана

2°. *При изменении ориентации кривой γ на противоположную криволинейный интеграл 2 рода меняет знак. Он не изменяется от выбора новой параметризации на γ, если эта новая параметризация не приводит к изменению ориентации на γ.*

◀ Символом $\overline{\gamma}$ обозначим кривую γ, ориентированную направлением изменения параметра от b к a. Тогда в соответствии с определением (13.42) получим

$$\int\limits_{\overline{\gamma}} P(x\,,\,y)dx + Q(x\,,\,y)dy =$$

$$= \int\limits_b^a \{P[x(t)\,,\,y(t)]dx(t) + Q[x(t)\,,\,y(t)]dy(t)\}\ . \quad (13.43)$$

Очевидно, что правые части равенств (13.42) и (13.43) отличаются только знаком.

Выберем теперь новую параметризацию (13.39) на γ, где параметры t и τ связаны равенством $t = t(\tau)$, причем эта функция возрастает. Тогда получим

$$\int\limits_a^b \{P[x(t)\,,\,y(t)]dx(t) + Q[x(t)\,,\,y(t)]dy(t)\} =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \{P[x(t(\tau))\,,\,y(t(\tau))]dx(t(\tau)) + Q[x(t(\tau))\,,\,y(t(tau))]dy(t(\tau))\} =$$

$$\int\limits_\alpha^\beta \{P[\xi(\tau)\,,\,\eta(\tau)]d\xi(\tau) + Q[\xi(\tau)\,,\,\eta(\tau)]d\eta(\tau)\}\ . \ \blacktriangleright$$

3°. *Криволинейный интеграл 2 рода обладает свойствами линейности и аддитивности.*

4°. *Если кривая γ — гладкая, то криволинейные интегралы 1 и 2 рода связаны равенством*

$$\int\limits_\gamma P(x\,,\,y)dx + Q(x\,,\,)dy = \int\limits_\gamma [P(x\,,\,y)\cos\alpha + Q(x\,,\,y)\sin\alpha]ds\,,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — угол между положительным лучом оси OX и положительным направлением касательной к кривой γ в точке $(x(t)\,,\,y(t))$.

◀ По геометрическому смыслу производной вектор

$$\gamma'(t) = x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j}$$

является касательным к кривой γ в точке $\gamma(t) = (x(t)\,,\, y(t))$. Но тогда единичный вектор касательного направления преобразуется так

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}\boldsymbol{i} + \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha\,.$$

Поэтому

$$\int\limits_\gamma P(x\,,\, y)dx + Q(x\,,\, y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \{P[x(t)\,,\, y(t)]\cos\alpha + Q[x(t)\,,\, y(t)]\sin\alpha\}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt =$$

$$= \int\limits_\gamma [P(x\,,\, y)\cos\alpha + Q(x\,,\, y)\sin\alpha]\,ds\,. \ \blacktriangleright$$

В заключение приведем одну задачу из физики, приводящую к понятию криволинейного интеграла 2 рода. Пусть вектор

$$P(x\,,\, y)\boldsymbol{i} + Q(x\,,\, y)\boldsymbol{j}$$

означает напряженность силового поля в области D. Требуется определить и вычислить работу R этого поля на пути γ. Когда сила — постоянная, а путь — прямолинейный, то работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор пути. Если эти условия не выполняются, то разбиваем путь на малые участки точками $A_0\,,\, A_1\,,\ldots,\, A_n$. Считая приближенно каждый участок прямолинейным, а силу на нем — постоянной, можно получить приближенное значение искомой работы

$$R \approx \sum_{k=0}^{n-1}\{P(\xi_k\,,\, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k\,,\, \eta_k)\Delta y_k\}\ ,$$

где

$$(\xi_k\,,\, \eta_k) \in [A_k\,,\, A_{k+1}]\,,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k\,,\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k\,,$$

причем $(x_k\,,\,y_k)$ — координаты точки A_k. Устремляя к нулю мелкость взятых разбиений и принимая за точное значение искомой работы предел правой части последнего равенства, получим

$$R = \int\limits_{\gamma} P(x\,,\,y)dx + Q(x\,,\,y)dy\,.$$

Задачи к главе 13

13.1. Доказать, что если функцию $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$f(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)dt\,,$$

где $\varphi : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая функция, то

$$\bigvee_a^b f = \int\limits_a^b |\varphi(t)|dt\,.$$

13.2. Доказать, что если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, то для любой точки $x_0 \in (a\,,\,b)$ существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_0+0) := \lim_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_0-0) := \lim_{\substack{x\to x_0,\\ x<x_0}} f(x)\,.$$

13.3. Доказать, что если функция f непрерывна, а функция g монотонна на отрезке $[a\,,\,b]$, то заменой $t = g(x)$ интеграл Стилтьеса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ сводится к интегралу Римана.

13.4. Предполагая, что функция f непрерывна и положительна, а функция g строго возрастает на отрезке $[a\,,\,b]$, выяснить геометрический смысл интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b f(t)dg(t)$.

13.5. Доказать, что если из двух функций f, g : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ одна непрерывна в точке $c \in (a, b)$, а вторая ограничена в окрестности этой точки, то из существования интегралов

$$\int\limits_a^c f(x)dg(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f(x)dg(x)$$

следует существование интеграла $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

13.6. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int\limits_{-1}^{3} xdg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = -1\,, \\ 1 & \text{при} \quad -1 < x < 2\,, \\ -1 & \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3\,. \end{cases}$$

13.7. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int\limits_{0}^{2} x^2dg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{3}{2}\,, \\ 2 & \text{при} \quad x = \dfrac{3}{2}\,, \\ -2 & \text{при} \quad \dfrac{3}{2} < x \leqslant 2\,. \end{cases}$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 1997—1998. Ч. I—II.
2. *Толстов Г. П.* Элементы математического анализа. М., 1974. Т. I—II.
3. *Рудин У.* Основы математического анализа. М., 1966.
4. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. Волгоград, 1996.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб., 1997. Т. I—III.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. М., 1968. Т. I—II.
7. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М., 1985.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М., 1990—1991. Т. I—II.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1988—1989. Т. 1—3.
10. *Демидович Б. П.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ