Практическое занятие 1 Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода

1.1 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 1-го рода

1.2 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 2-го рода

1.1 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 1-го рода

Определение криволинейного интеграла 1 го рода. Пусть функция $f(x;y)$ определена и ограничена в точках $(x;y)$ гладкой или кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в плоскости Oxy. Разобьем кривую AB точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$ на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_k, $k = 1,2,...,n$ точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$ (рисунок 1. 1).

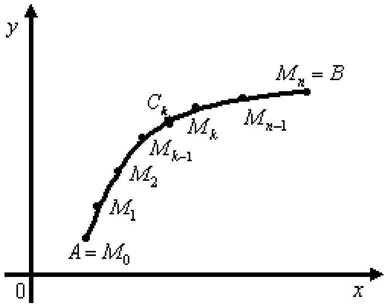

Рисунок 1. 1 – Разбиение кривой AB для определения криволинейного интеграла 1-го рода

Сумма

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\cdot \Delta l_k \qquad (1.1)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$

Криволинейным интегралом первого рода называется предел (если он существует) интегральной суммы (1.1) при $\lambda \to 0$ и обозначается

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\Delta l_k \ .$$

Подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB, сама кривая AB – *контуром интегрирования*, A и B – *начальной* и *конечной* точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода) Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл $\int_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек на них.

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Криволинейный интеграл 1-го рода обладает следующими свойствами:

– $\int_{AB} dl = L$, где L – длина кривой AB;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на кривой AB, то функция $\alpha\cdot f(x;y) + \beta\cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на кривой AB и справедливо равенство:

$$\int_{AB} (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dl = \alpha \int_{AB} f(x;y)dl + \beta \int_{AB} g(x;y)dl \ ;$$

– *(аддитивность)* если кривая AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на кривой AB и справедлива формула:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{AC} f(x;y)dl + \int_{CB} f(x;y)dl \ ;$$

– *(оценка интеграла)* если на кривой AB имеет место неравенство $|f(x;y)| \le M$, то

$$\left|\int_{AB} f(x;y)dl\right| \le M \cdot L,$$

где L – длина кривой AB;

– *(монотонность)* если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y) \ge g(x;y)$, то

$$\int_{AB} f(x;y)dl \ge \int_{AB} g(x;y)dl;$$

– криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода кривой AB:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$.

Тогда дифференциал длины дуги равен:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \qquad (1.2)$$

Полярное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$$

и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на $[\alpha;\beta]$.

Тогда дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$ и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (1.3)$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Дифференциал дуги имеет вид $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$ и справедливо равенство

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{a}^{b} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx. \qquad (1.4)$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной кривой AB:

$$\int_{AB} f(x;y;z)dl.$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, справедлива формула:

$$\int_{AB} f(x;y;z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt. \qquad (1.5)$$

Приложения криволинейного интеграла 1-го рода. Криволинейный интеграл 1-го рода используется для вычисления:

– *длины кривой*

$$L = \int_{AB} dl; \qquad (1.6)$$

– *площади цилиндрической поверхности,* направляющей которой служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, и образующая параллельна оси Oz

$$S=\int\limits_{AB} f(x;y)dl\,; \tag{1.7}$$

– *массы материальной кривой* AB с плотностью $\rho(x;y)$

$$m=\int\limits_{AB} \rho(x;y)dl\,; \tag{1.8}$$

– *статических моментов* и *координат центра тяжести* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy

$$M_x=\int\limits_{AB} y\rho(x;y)dl\,, \qquad M_y=\int\limits_{AB} x\rho(x;y)dl\,;$$
$$x_0=\frac{M_y}{m}\,, \qquad y_0=\frac{M_x}{m}\,; \tag{1.9}$$

– *моментов инерции* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy, а также начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$I_x=\int\limits_{AB} y^2\rho(x;y)dl\,,\ I_y=\int\limits_{AB} x^2\rho(x;y)dl\,,I_0=I_x+I_y\,. \tag{1.10}$$

1.2 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 2-го рода

Определение криволинейного интеграла 2 го рода. Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены в каждой точке кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A=M_0<M_1<\ldots<M_n=B$ в направлении от точки A к точке B на n частичных дуг l_1, l_2, …, l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, …, Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге $l_k=\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$, $k=1,2,\ldots,n$, точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$. Проекциями дуги $l_k=\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ на оси Ox и Oy являются Δx_k и Δy_k (рисунок 1. 2).

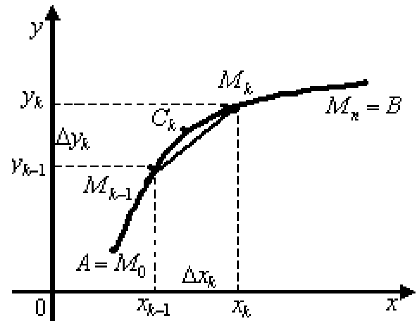

Рисунок 1. 2 – Разбиение кривой AB для определения криволинейного интеграла 2-го рода

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta x_k \tag{1.11}$$

называется *интегральной суммой по переменной* x для функции $P(x;y)$; сумма

$$\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_k;\eta_k;)\cdot\Delta y_k \tag{1.12}$$

называется *интегральной суммой по переменной* y для функции $Q(x;y)$.

Обозначим $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta l_k$.

Криволинейным интегралом по координате x *по кривой* AB от функции $P(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (1.11) при $\lambda\to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k\,. \tag{1.13}$$

Криволинейным интегралом по координате y *по кривой* AB от функции $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (1.2) при $\lambda\to 0$:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k\,. \tag{1.14}$$

Криволинейным интегралом 2-го рода по кривой AB от функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) при $\lambda \to 0$ интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k ,$$

и обозначается

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i . \quad (1.15)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода можно записать в виде

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{AB} P(x;y)dx + \int_{AB} Q(x;y)dy .$$

Теорема 2 (существование криволинейного интеграла 2-го рода) Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл 2-го рода существует.

Пусть AB – *замкнутая кривая*, т. е. точка A совпадает с точкой B. Тогда для нее можно определить два направления обхода от точки A к точке B. Направление обхода замкнутой кривой называется *положительным*, если область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход (рисунок 1. 3, а). Противоположное направление называется *отрицательным* (рисунок 1. 3, б).

Рисунок 1.3 – Положительно (а) и отрицательно (б) ориентированный контур

Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается как

$$\oint_{\Gamma} P(x;y)dx + Q(x;y)dy . \quad (1.16)$$

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода обладает следующими свойствами:

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y)$ и $P_2(x;y)$ интегрируемы на кривой AB по переменной x, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y) + \beta \cdot P_2(x;y)$ также интегрируема на дуге AB по переменной x и справедливо равенство

$$\int_{AB} (\alpha P_1(x;y) + \beta P_2(x;y))dx = \alpha \int_{AB} P_1(x;y)dx + \beta \int_{AB} P_2(x;y)dx .$$

Аналогично по переменной y;

– *(аддитивность)* если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $P(x;y)$ и $Q(x;y)$интегрируемы, то функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ также интегрируемы на дуге AB и справедлива формула:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy =$$
$$= \int_{AC} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int_{CB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy ;$$

– *(ориентированность)* при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода изменяет свой знак на противоположный:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy ;$$

– если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int_{AB} P(x;y)dx = 0$; если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy, то $\int_{AB} Q(x;y)dy = 0$;

– интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) \right] dt. \qquad (1.17)$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, где функции $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{a}^{b} \left[P(x; y(x)) + Q(x; y(x))\, y'(x) \right] dx. \qquad (1.18)$$

Теорема 3 (связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода) Пусть

1) кусочно-гладкая кривая AB, лежит в плоскости Oxy и задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, причем $A(x(\alpha); y(\alpha))$, $B(x(\beta); y(\beta))$;

2) функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ кусочно-непрерывны вдоль кривой AB;

3) вектор $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y)$, где α и β углы, составляемые с осями координат (рисунок 1. 5).

Тогда имеет место равенство:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta \right) dl. \qquad (1.19)$$

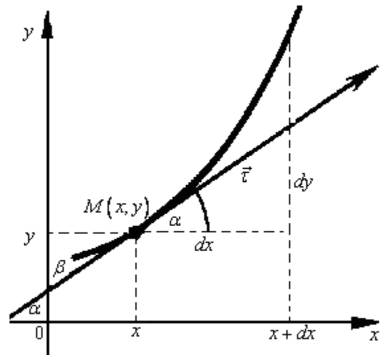

Рисунок 1. 4 – Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода

Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$, $A(x(\alpha); y(\alpha); z(\alpha))$, $B(x(\beta); y(\beta); z(\beta))$, криволинейный интеграл 2-го рода вводится аналогично плоскому случаю:

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz. \qquad (1.20)$$

При этом формула, выражающая связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода имеет вид:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) dl, \qquad (1.21)$$

где $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y;z)$, α, β, γ углы, составляемые $\vec{\tau}$ с положительными направлениями осей координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B.

Приложения криволинейного интеграла 2-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода используется для вычисления:

– *работы силы* $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой AB от точки A до точки B:

$$A=\int_{AB}P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz\,, \qquad (1.22)$$

где $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно;

– *площади плоской фигуры*, ограниченной замкнутым контуром Γ:

$$S=\oint_{\Gamma}xdy\,,\quad S=-\oint_{\Gamma}ydx\,,\; S=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}xdy-ydx\,. \qquad (1.23)$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется интегральной суммой для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB?

2 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода.

3 Перечислите свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

4 Что общего и какие различия между свойствами криволинейного интеграла 1-го рода и определенного интеграла?

5 Как вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода в следующих случаях задания плоской кривой: а) в параметрическом виде; б) в полярных координатах; в) в явном виде?

6 Перечислите геометрические и физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода?

7 Сформулируйте определения:

а) интегральных сумм для криволинейного интеграла 2-го рода;

б) криволинейного интеграла 2-го рода.

8 Перечислите основные свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

9 Как вычисляется криволинейный интеграл 2-го рода в случаях: а) параметрического задания; б) явного задания кривой интегрирования?

10 Сформулируйте теорему, выражающую связь между криволинейными интегралами 1 и 2-го рода.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\int_{AB}y^2dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|x=a\cos t,\, y=a\sin t,\, 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их параметрические представления, имеем:

$$y^2=a^2\sin^2 t\,,$$

$$dl=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=a\,dt\,.$$

Тогда по формуле (1.2) получим:

$$\int_{AB}y^2dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^2 t\,dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{a^3}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3\pi}{4}\,.$$

2 Вычислить интеграл $\int_{AB}(x+y)dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|x=r\cos\varphi,\, y=r\sin\varphi,\, r=\sqrt{\sin 2\varphi},\, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их представления в полярных координатах, имеем:

$$dl=\sqrt{\sin 2\varphi+\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi=\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{d\varphi}{r}\,.$$

Тогда по формуле (1.3) получим

$$\int_{AB}(x+y)dl=\int_0^{\pi/2}(r\sin\varphi+r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{r}=\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi=2\,.$$

3 Вычислить интеграл $\int_{AB}ydl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|y^2=2x \text{ от точки } O(0;0) \text{ до точки } M(2;2)\right\}.$$

Решение. Имеем:

$$y=\sqrt{2x}\,,\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}\,,\qquad dl=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx\,.$$

Тогда по формуле (1.4) получим:

$$\int\limits_{AB} ydl=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

4 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} xdx+xydy$, где

$$AB=\left\{\,(x;y)\,\middle|\,x^2+y^2=1,\,x\ge 0,\,y\ge 0\right\}.$$

Решение. Перейдем к параметрическому заданию окружности:

$$\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=r\sin t,\end{cases}$$

где $r=1$ и $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Точке A соответствует значение параметра $t=0$, а точке B – значение $t=\frac{\pi}{2}$. Тогда $x'(t)=-\sin t$ и $y'(t)=\cos t$. Подставим в формулу (1.2)

$$\int\limits_{AB} xdx+xydy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos t\cdot\sin t+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t\right]dt=$$

$$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin tdt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin tdt=\frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

5 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy$, где (рисунок 1. 6)

а) $AB=\left\{\,(x;y)\,\middle|\,y=x,\,0\le x\le 1\right\}$,

б) $AB=\left\{\,(x;y)\,\middle|\,y=x^2,\,0\le x\le 1\right\}$,

в) $AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,\begin{array}{l}\text{ломаная, проходящая}\\ \text{через точки } A(0;0),\,C(1;0),\,B(1;1)\end{array}\right\}$.

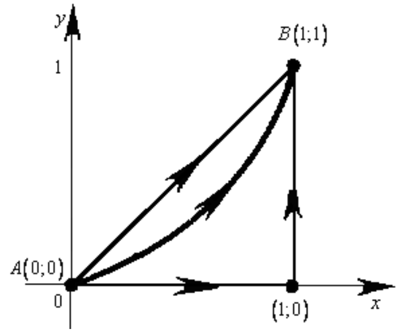

Рисунок 1. 5 – Различные кривые AB

Решение. а) по формуле (1.18) имеем:

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix}y=x,\\ y'=1,\\ 0\le x\le 1.\end{bmatrix}=\int\limits_0^1\left(x^2+x+x\cdot x\cdot 1\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x^2+x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6};$$

б) $$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix}y=x^2,\\ y'=2x,\\ 0\le x\le 1.\end{bmatrix}=\int\limits_0^1\left(x^2+x^2+x^2\cdot x\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x^2+2x^4\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15};$$

в) используя свойство аддитивности криволинейного интеграла, имеем:

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\int\limits_{AC}\left(x^2+y\right)dx+xydy+\int\limits_{CB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=$$

$$=\begin{bmatrix} AC: y=0,\ 0\le x\le 1, \\ CB: x=1,\ 0\le y\le 1. \end{bmatrix}=\int_0^1 \left(x^2+0\right)dx+\int_0^1 (1+y)\cdot 0+1\cdot y dy=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

6 Найти массу материальной дуги линии $y=x^2+1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке $M(x;y)$ пропорциональна абсциссе этой точки

Решение. Выражение для плотности имеет вид $\rho(x;y)=k\,x$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда по формуле (1.8) находим

$$m=\int_{AB}\rho(x;y)dl=k\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{k}{8}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,d\left(1+4x^2\right)=$$

$$=\left.\frac{k}{8}\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{k}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

7 Вычислить длину дуги линии $x=t$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3$ при $0\le t\le 1$.

Решение. Имеем $x_t'=1$, $y_t'=\sqrt{2}t$, $z_t'=t^2$.

Тогда

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{1+2t^2+t^4}dt=\left(1+t^2\right)dt.$$

Значит, по формуле (1.6) длина дуги равна

$$L=\int_{AB}dl=\int_0^1\left(1+t^2\right)dt=\left.\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

8 Найти работу, производимую силой $\vec{F}=4x^6\,\vec{i}+xy\,\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y=x^3$ от точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$.

Решение. По условию $P(x;y)=4x^6$, $Q(x;y)=xy$. Подставляя в формулу (1.22) для вычисления работы, получим

$$A=\int_{AB}4x^6dx+xydy=\int_0^1 4x^6dx+x\cdot x^3\cdot 3x^2dx=7\int_0^1 x^6=\left.x^7\right|_0^1=1.$$

9 Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Отсюда $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$.

Тогда по формуле (1.23) искомая площадь равна

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi ab.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

а) $\int_\Gamma ydl$, где Γ – отрезок прямой $y=x$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$;

б) $\int_\Gamma \frac{x^3}{y^2}dl$, где Γ – дуга линии $xy=1$ между точками $A(1;1)$ и $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

в) $\int_\Gamma y^2dl$, где Γ – дуга линии $x=\ln y$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;e)$;

г) $\int_\Gamma \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, где Γ – дуга линии $y=\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$;

д) $\int_\Gamma \sin^4 x\cos x\,dl$, где Γ – дуга линии $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где Г – верхняя половина кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$;

ж) $\int\limits_{\Gamma} x^2 y\,dl$, где Г – дуга астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

2 Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по данной линии в указанном направлении:

а) $\int\limits_{\Gamma} \sin^3 x\,dx + \dfrac{dy}{y^2}$, где Г – дуга линии $y = \mathrm{ctg}\,x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^3 - y^2\right)dx + xy\,dy$, где Г – дуга линии $y = 2^x$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

в) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+3y}\,dy + (x-y)\,dx$, где Г – дуга линии $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$;

г) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dx + xy\,dy$, где Г – дуга эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} y\,dx - x\,dy$, где Г – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$, где Г – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

ж) вычислить $\int\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$, Г: $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t^6$, $0 \le t \le 1$;

и) вычислить $\int\limits_{\Gamma} zy\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, Г – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \dfrac{3t}{2\pi}$ от точки пересечения с плоскостью $z = 0$ до точки пересечения с плоскостью $z = 3$.

3 Вычислить длину дуги кривых:

а) $x = t$, $y = \sqrt{2}\ln t$, $z = \dfrac{1}{t}$, $1 \le t \le 10$;

б) $x = 6\cos t$, $y = 6\sin t$, $z = 8t$, $0 \le t \le 2\pi$.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром, образованным указанными линиями:

а) первой аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

б) лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2\left(x^2-y^2\right)$.

5 Найти массу материальной кривой с заданной плотностью:

а) $4y = x^4$, $0 \le x \le 1$, $\rho(x;y) = x^5 + 8xy$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 8\left(x^2-y^2\right)$, $\rho(x;y) = x + y$.

6 Найти массу дуги кривой $x = t$, $y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, если линейная плотность $\rho(x,y,z) = x + z$.

7 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$ вдоль указанной линии:

а) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}$, L – отрезок между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

б) $\vec{F} = \left(x^3+y\right)\vec{i} + \left(x+y^3\right)\vec{j}$, L – ломаная ABC, где $A(1;1)$ и $B(3;1)$, $C(3;5)$;

в) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + \dfrac{1}{y^2}\,\vec{j}$, L – дуга линии $xy = 1$ от $A(1;1)$ и $B\left(4;\dfrac{1}{4}\right)$;

г) $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j}$, L – дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$;

д) найти работу A переменной силы

$$F=\left(2+xy^2\right)\vec{i}+\left(x^2y-3\right)\vec{j}$$

вдоль эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ от точки $B(-2,0)$ до точки $C(2,0)$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

а) $\int_\Gamma x\,dl$, где Γ – дуга линии $2y=x^2$ между точками $A\left(\sqrt{2};1\right)$ и $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$;

б) $\int_\Gamma \sqrt{1+x^6}\,dl$, где Γ – дуга линии $4y=x^4$ между точками $A(0;0)$ и $B\left(1;\frac{1}{4}\right)$;

в) $\int_\Gamma \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, где Γ – дуга линии $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$;

г) $\int_\Gamma \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl$, где Γ – дуга линии $y=\operatorname{tg}x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$;

д) $\int_\Gamma \sin^2 x\cos^3 x\,dl$, где Γ – дуга линии $y=\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$;

е) $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+4}\,dl$, где Γ – дуга спирали Архимеда $r=2\varphi$, между точками $A(0;0)$ и $B(4;2)$;

ж) $\int_\Gamma xy^2\,dl$, где Γ – дуга окружности $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

2 Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по кривой в указанном направлении:

а) $\int_\Gamma \sin^2 x+y^2dy$, где Γ – дуга линии $y=\cos x$, $0\le x\le\pi$;

б) $\int_\Gamma \frac{xdx+ydy}{x^3+y^3}$, где Γ – отрезок от точки $A(1;1)$ до $B(2;2)$;

в) $\int_\Gamma \cos^2 x\,dx+\frac{dy}{y^3}$, где Γ – дуга линии $y=\operatorname{tg}x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$;

г) $\int_\Gamma \left(x^2+y^2\right)dx+xydy$, где Γ – дуга линии $y=e^x$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;e)$;

д) $\int_\Gamma xydx+y^2dy$, где Γ – дуга кривой $x=t^2$, $y=t$, $1\le t\le 2\,4$

е) $\int_\Gamma x^2ydx+y^2xdy$, где Γ – дуга кривой $x=t$, $y=t^3$, $1\le t\le 1\,4$

ж) $\int_\Gamma (x+y)dx+(x-y)dy$, где Γ – дуга окружности $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

и) $\int_\Gamma 2xydx+y^2dy+z^2dz$, Γ – дуга одного витка винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$ от точки $A(1{,}0{,}0)$ до точки $B(1{,}0{,}4\pi)$.

3 Вычислить длины дуг пространственных кривых:

а) $x=\frac{2}{3}t^3$, $y=t^2$, $z=t$, $0\le t\le 3$;

б) $x=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$, $z=t$, $0\le t\le 1$.

4 Вычислить площади фигур, ограниченных замкнутыми контурами, образованными указанными линиями:

а) $y=x^4$, $y^4=x$;

б) $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$ (астроида).

5 Найти массы материальных дуг линий при заданной плотности:

а) $y=x^3$, $0\le x\le 1$, $\rho(x;y)=y$;

б) $x=5(t-\sin t)$, $y=5(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, $\rho(x;y)=x$;

в) $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$;

$\rho(x,y,z)=2z-\sqrt{x^2+y^2}$.

6 Найти работу, производимую силой $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ вдоль кривой:

а) $\vec{F}=x^2\vec{i}+x^2\vec{j}$, Γ – дуга линии $y=x^2$ от $A(1;1)$ и $B(3;9)$;

б) $\vec{F}=\cos^3 x\vec{i}+y\vec{j}$, Γ – дуга линии $y=\sin x$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

в) $\vec{F}=\cos^2 x\vec{i}+\frac{1}{y^3}\vec{j}$, Γ – дуга линии $y=\operatorname{tg} x$ $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{3}$;

г) найти работу силы $F=\left(y-z,xz,x^2\right)$ вдоль отрезка прямой AB: $A(0,2,-1)$, $B(2,1,0)$.