Практическое занятие 2 **Двойной интеграл**

2.1 Определение и свойства двойного интеграла
2.2 Вычисление двойного интеграла путем сведения к повторному интегралу

2.1 Определение и свойства двойного интеграла

Пусть G замкнутая область (замкнутое связное множество) пространства $\mathbb{R}^2$, $f(x;y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная на этом множестве (рисунок 2. 1).

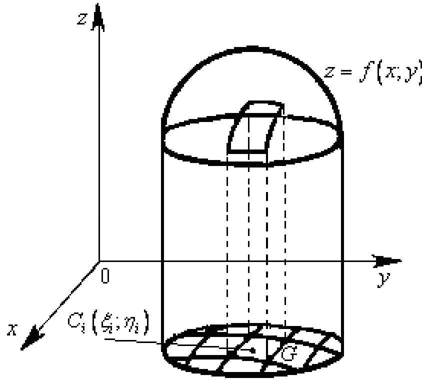

Рисунок 2. 1 – Разбиение множества G

Будем предполагать, что граница области G состоит из конечного числа непрерывных кривых, $y(x)$ или $x(y)$. И пусть $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}$, $G_i \bigcap_{i\neq j} G_j = \varnothing$, разбиение области G. Обозначим ΔS_i – площадь G_i, $d(G_i) = \sup\limits_{x,y \in G_i} \rho(x;y)$ – диаметр областей G_i, $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(G_i)$ – мелкость разбиения. В каждой части G_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Тогда $f(\xi_i;\eta_i)$ – значение функции в этой точке.

Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \qquad (2.1)$$

называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x;y)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Если функция $f(x;y)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau = \{G_i\}$, $i = 1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y)\in G_i} f(x;y),\ M_i = \sup_{(x;y)\in G_i} f(x;y).$$

Суммы $s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta S_i$, $S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta S_i$ называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению τ.

Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по замкнутой области G называется предел (если он существует) интегральной суммы (2.1) при $\lambda \to 0$:

$$\iint_G f(x;y)\,dS = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i, \qquad (2.2)$$

подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* на множестве G, множество G – *областью интегрирования*, x, y – *переменными интегрирования*, dS – *элементом площади*.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $z = f(x;y)$ интегрируема на области G, то она ограничена на этом множестве.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в области G, то она интегрируема в этой области.

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{G_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнялось неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой на множестве G функции $f(x;y)$ предел интегральных сумм существует и не зависит от разбиения области на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования G на части прямыми, параллельными координатным осям (рисунок 2. 2). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Учитывая, что $dS = dxdy$, можно записать:

$$\iint_G f(x;y)dS = \iint_G f(x;y)dxdy .$$

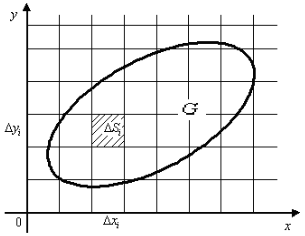

Рисунок 2. 2 – Разбиение области G на части прямыми, параллельными координатным осям

Основные с в о й с т в а двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла:

– $\iint_G dS = \iint_G dxdy = S$, где S – площадь области G;

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые в области G, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство:

$$\iint_G (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dxdy = \alpha \iint_G f(x;y)dxdy + \beta \iint_G g(x;y)dxdy ;$$

– *(аддитивность)* если область G является объединением областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема в области G и справедлива формула:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_{G_1} f(x;y)dxdy + \iint_{G_2} f(x;y)dxdy ;$$

– если в области G имеет место неравенство $f(x;y) \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\iint_G f(x;y)dxdy \geq 0 ;$$

– *(монотонность)* если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы в области G и $f(x;y) \leq g(x;y)$ в любой точке $(x;y) \in G$, то

$$\iint_G f(x;y)dxdy \leq \iint_G g(x;y)dxdy ;$$

– если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области G, площадь которой S, то

$$m \cdot S \leq \iint_G f(x;y)dxdy \leq M \cdot S ,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве G;

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y)$ непрерывна в области G, площадь которой S, то существует такая точка $P_0(x_0;y_0) \in G$, что выполняется неравенство:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S ;$$

– произведение интегрируемых в области G функций есть интегрируемая функция;

– если функция $f(x;y)$ интегрируема в области G, то функция $|f(x;y)|$ интегрируема в G и справедливо неравенство:

$$\left| \iint_G f(x;y)dxdy \right| \leq \iint_G |f(x;y)|dxdy .$$

2.2 Вычисление двойного интеграла путем сведения к повторному интегралу

Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику

$$D = \{ (x;y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1 Пусть

1) для функции $f(x;y)$ в прямоугольнике D существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$;

2) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ и справедливо равенство:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx. \qquad (2.3)$$

Повторный интеграл $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ можно записывать в виде $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Если в теореме 1 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx. \qquad (2.4)$$

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции и $\varphi(x)\le\psi(x)$ $\forall x\in[a;b]$.

Область $G=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,\varphi(x)\le y\le\psi(x)\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Oy.

Область $G=\left\{(x;y)\middle|\alpha(y)\le x\le\beta(y),c\le y\le d\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Ox. Здесь функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $\alpha(y)\le\beta(y)$.

Теорема 2 Пусть

1) функция $z=f(x;y)$ определена в области $G=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции, $y_1(x)\le y_2(x)$ для любого x из отрезка $[a;b]$;

2) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$;

3) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy. \qquad (2.5)$$

Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx. \qquad (2.6)$$

Если область интегрирования не удовлетворяет условиям теоремы 2 (прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2, и сводить к повторному каждый из соответствующих интегралов.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется интегральной суммой функции $f(x;y)$?

2 Какие суммы называются верхней и нижней суммой Дарбу?

3 Дайте определение двойного интеграла.

4 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции двух переменных.

5 В чем суть критерия интегрируемости?

6 Перечислите свойства двойного интеграла.

7 Сформулируйте теорему о вычислении двойного интеграла в случае прямоугольной области.

8 Сформулируйте теорему о вычислении двойного интеграла в случае произвольной области.

9 Как вычислить двойной интеграл по области, не являющейся элементарной?

Решение типовых примеров

1 Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область G (рисунок 2. 3) ограничена линиями $y=x^2$, $x=a$, $a>0$, $y=0$.

Решение. Областью интегрирования является криволинейная трапеция, ограниченная сверху параболой $y=x^2$, снизу – осью Ox, справа – прямой $x=a$, $a>0$.

Если внутренний интеграл взять по y, то y изменяется от 0 до $y=x^2$, а x изменяется в пределах от 0 до a:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,ds=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy.$$

Если внутренний интеграл взять по x, то x изменяется от 0 до $x=\sqrt{y}$, а y изменяется в пределах от 0 до a^2:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,ds=\int\limits_0^{a^2} dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{a} f(x,y)\,dx.$$

2 Представить двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по x и по y, если область G ограничена линиями $y=2x$, $x=0$, $y+x=3$ (рисунок 2. 4).

Решение. Областью интегрирования является треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(0;3)$; $B(1;2)$.

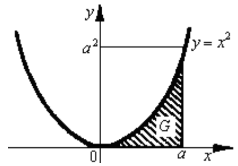

Рисунок 2. 3 – Область интегрирования для типового примера 1

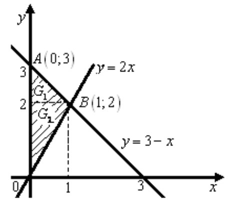

Рисунок 2. 4 – Область интегрирования для типового примера 2

Если внутренний интеграл взять по y, то область G рассмотрим как криволинейную трапецию, ограниченную слева прямой $x=0$, справа – прямой $x=1$; снизу – прямой $y=2x$, сверху – прямой $y+x=3$. Отсюда $0\le x\le 1$, $2x\le y\le 3-x$. Поэтому пределы расставятся следующим образом:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)\,dy$$

Если внутренний интеграл будем брать по x, то область G разбивается прямой $y=2$ на две непересекающиеся области:

$$G_1=\left\{(x;y)\middle|\,0\le x\le\frac{y}{2},\ 0\le y\le 2x\right\},$$

$$G_2=\left\{(x;y)\,|\,0\le x\le 3-x,\ 2\le y\le 3\right\}.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_2^3 dy\int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx.$$

3 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G x^2 y dx dy$ по области, ограниченной линиями $y=0$, $y=2x^3$, $x+y=3$.

Решение. Область интегрирования G состоит из двух непересекающихся областей G_1 и G_2 (рисунок 2. 5).

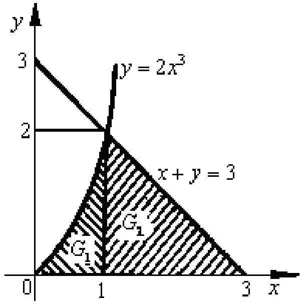

Рисунок 2. 5 – Область интегрирования для типового примера 3

Рассмотрим различный порядок интегрирования. Сначала вычислим внешний интеграл по переменной x. В этом случае исходный интеграл сводится к вычислению двух интегралов по областям

$$G_1 = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x^3 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (x;y) \middle| 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 3-x \right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^3} x^2 y dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} x^2 y dy$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$G = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le y \le 2, \sqrt[3]{\frac{1}{2}y} \le x \le 3-y \right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y dx dy = \int_0^2 dy \int_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} x^2 y dx = \int_0^2 y dy \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 y\left((3-y)^3 - \frac{y}{2} \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^2 y\left(27 - 27y + 9y^2 - y^3 - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{9}{4}y^4 - \frac{275}{30}y^3 \right)\Bigg|_0^2 = \frac{154}{45}.$$

4 Вычислить $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, если G – прямоугольник

$$G = \left\{ x \middle| \ 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 \right\}.$$

Решение. Относительно переменных $y = x$ и y интегралы $\int \frac{dx}{(x+y+1)^2}$ и $\int \frac{dy}{(x+y+1)^2}$ табличные, поэтому двойной интеграл сведем к следующему повторному:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2} = \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{d(x+y+1)}{(x+y+1)^2} =$$

$$\int_1^2 \left(\left(-\frac{1}{x+y+1} \right) \Bigg|_0^1 \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \left(-\ln(x+2) + \ln(x+1) \right) \Big|_1^2 = -\ln 4 + \ln 3 + \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \ln\frac{9}{8}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, где G – область, ограниченная параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой $y = x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

Получаем точки: $O(0;0)$ и $A(2;2)$

Итак, снизу область G ограничена параболой $y = \frac{1}{2}x^2$, сверху – прямой $y = x$:

$$G=\left\{ x \middle|\ 0\le x\le 2, \frac{1}{2}x^2\le y\le x \right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\iint_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\frac{xdy}{x^2+y^2}=\int_0^2 xdx\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\frac{dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{x}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\bigg|_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\right)dx=\int_0^2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\bigg|_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}x\Big|_0^2-\int_0^2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ du=\frac{2dx}{x^2+4}, \\ dv=dx \qquad v=x \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2xdx}{x^2+4}\right)=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}1+\int_0^2\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^2=\ln 8-\ln 4=\ln\frac{8}{4}=\ln 2\,.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

а) $\iint_G \frac{xdxdy}{y^2}$, $G=\left\{ (x;y) \middle|\ 1\le x\le 2, 4\le y\le 6 \right\}$;

б) $\iint_G \left(x^2+y^2\right)dxdy$, $G=\left\{ (x;y) \middle|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \right\}$.

2 Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint_G f(x;y)dxdy$ от функции $f(x;y)$, непрерывной в указанной области:

а) G ограничена линиями $y=x^2$, $y=4$;

б) G определена неравенствами $x^2+y^2\le 9$, $x+y\ge 3$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\iint_G (x-y)dxdy$, G ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$;

б) $\iint_G (\cos 2x-\sin y)dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$;

в) $\iint_G \left(x^2+2y\right)dxdy$, G ограничена линиями $y=x^2$, $y=4$;

г) $\iint_G \frac{x^2}{y^2}dxdy$, G ограничена линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$;

д) $\iint_G \left(6x^2y+8xy^3\right)dxdy$, G ограничена линиями $x^2+y=2$, $y^3=x^2$;

е) $\iint_G \frac{xdxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, G ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ (первая четверть).

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, предварительно изобразив на рисунке область интегрирования:

а) $\int_0^4 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{2x-3} f(x,y)dy$;

б) $\int_{-2}^{1} dx\int_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$;

в) $\int_1^6 dx\int_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)dy$;

г) $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$;

д) $\int_0^4 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

е) $\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

а) $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x^2}$, $G=\{(x;y)|\ 2\le x\le 4, 6\le y\le 8\}$;

б) $\iint\limits_D \left(3xy^2+4y^3\right)dxdy$, $G=\{(x;y)|\ 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$.

2 Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$ от функции $f(x;y)$, непрерывной в указанной области:

а) G ограничена линиями $y=-x^2+2$, $y^3=x^2$, G ограничена линиями $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$);

б) G определена неравенствами $x^2+y^2\le 1$, $x^2+4y^2\ge 1$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\iint\limits_G (3x+y)dxdy$, G ограничена неравенствами $x^2+y^2\le 9$, $y\ge \frac{2}{3}x+3$;

б) $\iint\limits_G \sin(x+y)dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=x$;

в) $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$, G ограничена линиями $x=5$, $y^2=x+4$;

г) $\iint\limits_G \left(x^2+y\right)dxdy$, G ограничена линиями $y=x^2$, $y^2=x$;

д) $\iint\limits_G \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy$, G ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$;

е) $\iint\limits_G y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$;

ж) $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$, где G – треугольник ABC: $A(0;0)$, $B(1;-1)$, $C(1;1)$.

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, предварительно изобразив на рисунке область интегрирования:

а) $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{0}^{\ln x}f(x,y)dy$;

г) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x}f(x,y)dy$.

Практическое занятие 3 **Замена переменных в двойном интеграле**

3.1 Криволинейные координаты
3.2 Замена переменных в двойном интеграле
3.3 Полярные координаты
3.4 Геометрические и физические приложения двойных интегралов

3.1 Криволинейные координаты

Взаимно однозначное отображение

$$u = u(x;y), \quad v = v(x;y), \tag{3.1}$$

открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ на множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x;y) \in G$ пару чисел $(u;v) \in G^*$. Поэтому данное отображение можно рассматривать как переход к новым координатам u и v точки $(x;y)$ одной и той же плоскости G. В этом случае множество G^* представляет собой множество пар новых координат точек множества G.

Обратный переход от координат u и v к координатам x и y осуществляется с помощью отображения (рисунок 3. 1)

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v), \tag{3.2}$$

обратного отображению (3.1).

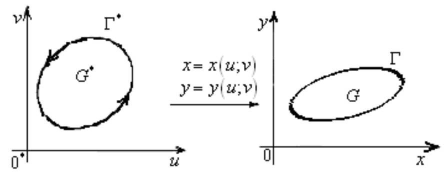

Рисунок 3. 1 – Отображение области G^* в область G при замене переменных $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется *координатной линией*.

При $u = u_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u_0;v), \quad y = y(u_0;v);$$

при $v = v_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u;v_0), \quad y = y(u;v_0).$$

В двух случаях получаются уравнения, являющиеся параметрическими уравнениями некоторых кривых. Координаты u и v называются *криволинейными координатами*.

3.2 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным по формулам (3.2). Функции (3.2) осуществляют отображение области $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на область $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$. Область G называется *образом* области, а область G^* – *прообразом* области G при отображении (3.2).

Теорема 1 Пусть

1) отображение $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ переводит замкнутую ограниченную область G^* в замкнутую ограниченную область G и является взаимно однозначным;

2) функции $x(u;v)$ и $y(u;v)$ имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка;

3) якобиан отображения $J = \dfrac{D(x;y)}{D(u;v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ во всех области G^*;

4) функция $f(x;y)$ непрерывна в области G.

Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_{G^*} f\big(x(u;v); y(u;v)\big)|J|dudv. \tag{3.3}$$

Если условие 1) или условие 3) нарушается в отдельных точках или на отдельных кривых, то формула (3.2) остается в силе.

3.3 Полярные координаты

Если область G ограничена дугами окружности, то удобно переходить к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{3.4}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобиан перехода к полярным координатам равен:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(\rho;\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому формула замены переменных запишется в виде:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r\, dr d\varphi. \tag{3.5}$$

Если область G ограничена дугами эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то удобно переходить к обобщенным полярным координатам

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом якобиан отображения равен

$$J = abr.$$

3.4 Геометрические и физические приложения двойных интегралов

Двойные интегралы используются для вычисления:

– *площади* S *плоской фигуры* G

$$S = \iint\limits_G dxdy; \tag{3.6}$$

– *площади* S *поверхности*, заданной уравнением $z = f(x;y)$

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy, \tag{3.7}$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy;

– *объема тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y) > 0$, снизу – плоскостью $z = 0$, с боковых сторон – цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси Oz, а направляющей служит контур области G

$$V = \iint\limits_G f(x;y)dxdy; \tag{3.8}$$

– *массы плоской пластины* G с плотностью $\rho(x;y)$

$$m = \iint\limits_G \rho(x;y)dxdy; \tag{3.9}$$

– *статических моментов* S_x, S_y относительно осей Ox, Oy соответственно и *координат* $(x_c; y_c)$ *центра тяжести* плоской пластины G

$$S_x = \iint\limits_G y\cdot\rho(x;y)dxdy,\quad S_y = \iint\limits_G x\cdot\rho(x;y)dxdy, \tag{3.10}$$

$$x_c = \frac{S_y}{m},\qquad y_c = \frac{S_x}{m}; \tag{3.11}$$

– *моментов инерции* плоской пластины G относительно осей Ox и Oy

$$I_x = \iint\limits_G y^2\rho(x;y)dxdy,\qquad I_y = \iint\limits_G x^2\rho(x;y)dxdy; \tag{3.12}$$

– *момента инерции* плоской пластины G относительно начала координат $O(0;0)$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)dxdy. \tag{3.13}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какие координаты называются криволинейными?

2 Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

3 Чему равен якобиан при переходе от декартовых координат к полярным?

4 Какие геометрические приложения имеет двойной интеграл?

5 Перечислите, при вычислении каких физических величин используется двойной интеграл.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\iint_G y^3 dxdy$ по области

$$G=\left\{(x;y)\mid\ y\ge x^2, y\le 2x^2, xy\ge 1, xy\le 2\right\}.$$

Решение. Область G представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2}{x}$ (рисунок 3. 2, а).

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при $x\ge 0$ отображение вида:

$$u=\frac{y}{x^2},\ v=xy. \tag{3.14}$$

Образом области G^* является квадрат (рисунок 3. 2, б)

$$G^*=\left\{(u;v)\mid\ 1\le u\le 2, 1\le v\le 2\right\}.$$

Данное отображение является взаимно однозначным, поскольку уравнения (3.14) разрешимы относительно x и y:

$$x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},\ y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}.$$

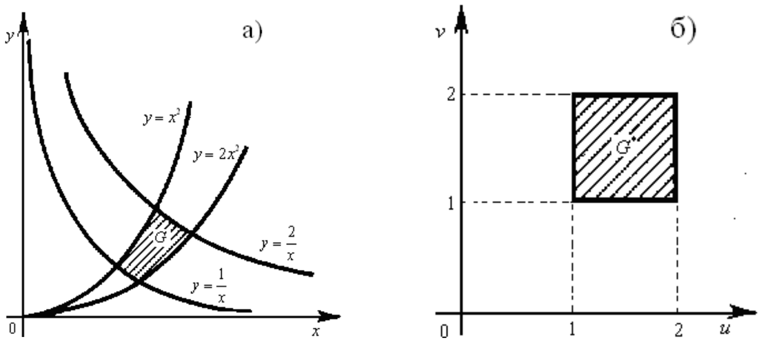

Рисунок 3. 2 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 1

Найдем якобиан отображения6

$$J=\frac{D(x;y)}{D(u;v)}==\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}\\ \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3u}.$$

Тогда

$$\iint_G y^3 dxdy=\left[\begin{array}{l}x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}, y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}},\\ |J|=\dfrac{1}{3|u|}\end{array}\right]=\iint_{G^*}uv^2\frac{1}{3|u|}dudv=$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{G^*}v^2dudv=\frac{1}{3}\int_1^2 du\int_1^2 v^2dv=\frac{1}{3}u\Big|_1^2\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_1^2=\frac{1}{3}(2-1)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{9}.$$

2 Вычислить интеграл $\iint_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где

$$G=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0,\ y\le 0\right\}.$$

Решение. Область G представляет собой часть круга радиуса 1, расположенного в первой четверти (рисунок 3. 3, а) Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам по формулам (3.4). При этом область G преобразуется в прямоугольник (рисунок 3. 3, б):

$$G^*=\left\{(r;\varphi)\middle|0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

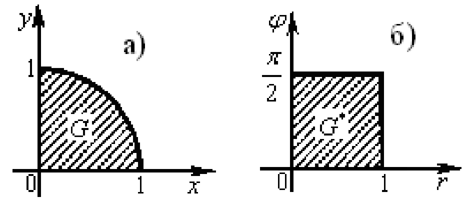

Рисунок 3. 3 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 2

По формуле (3.5) имеем:

$$\iint_G e^{x^2+y^2}dxdy = \iint_{G^*} e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi} r\,drd\varphi = \iint_{G^*} e^{r^2} r\,drd\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{r^2} d\left(r^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}e_0^1 \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4y - y^2,\ x + y = 6.$$

Решение. Найдем координаты точек пересечения данных линий. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} x = 4y - y^2, \\ x + y = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y - y^2, \\ 4y - y^2 + y - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4y - y^2, \\ y^2 - 5y + 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 3, \\ y_1 = 2, y_2 = 3. \end{cases}$$

Итак, имеем две точки пересечения $A(4;2)$ и $B(3;3)$.

Подставляя в формулу (3.6) вычисления площади, получим:

$$S = \iint_G dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy =$$

$$= \int_2^3 \left(-y^2 + 5y - 6\right)dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}.$$

4 Вычислить $\iint_G \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, если область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

Решение. Преобразуем уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0;\ (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Область G представляет собой окружность с центром в точке $(a;0)$ и радиусом a (рисунок 3. 4).

Переходя к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2,$$

получаем уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r^2 = 2ar\cos\varphi \Rightarrow r(r - 2a\cos\varphi) = 0.$$

Отсюда $r_1 = 0$; $r_2 = 2a\cos\varphi$, т. е.

$$0 \le r \le 2a\cos\varphi.$$

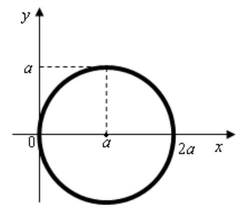

Рисунок 3. 4 – Область G для типового примера 5

Тогда

$$\iint_G \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint_{G^*} r^2 \cdot r drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4\cos^4\varphi d\varphi = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= a^4\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^4\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{2}a^4\pi.$$

5 Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем

$$f_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ f_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рисунок 3. 5).

Тогда по формуле (3.7) площадь поверхности равна

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_G dxdy =$$

$$=\left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi, J=r,\\ \dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\le r\le 2\cos\varphi \end{array}\right]=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r\,dr=2\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^2}{2}\bigg|_{0}^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=4\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=4\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=2\sqrt{2}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\sqrt{2}.$$

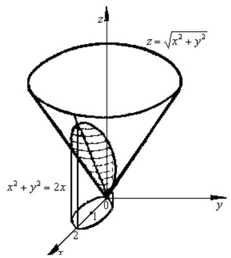

Рисунок 3. 5 – Рисунок для типового примера 6

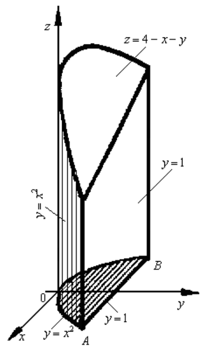

Рисунок 3. 6 – Рисунок для типового примера 7

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=x^2,\ x+y+z=4,\ y=1,\ z=0.$$

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z=4-x-y$, снизу – частью плоскости, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$ (рисунок 3. 6).

Тогда по формуле (3.8) получим:

$$V=\iint\limits_G(4-x-y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(4-x-y)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\left((4-y)x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)dy=2\int\limits_0^1(4-y)\sqrt{y}\,dy=$$

$$=8\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy-2\int\limits_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{68}{15}.$$

7 Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2, $r_1<r_2$. Поместим полярный радиус системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей примут вид $r=r_1$ и $r=r_2$. Поверхностная плотность в любой точке кольца равна $\rho=\dfrac{k}{r^2}$.

Масса кольца по формуле (3.9) равна

$$m=\iint\limits_G\frac{k}{x^2+y^2}dxdy=\left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi, |J|=r,\\ 0\le\varphi\le 2\pi, r_1\le r\le r_2 \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{k}{r^2}r\,dr=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr=k\int\limits_0^{2\pi}\left(\ln r\Big|_{r_1}^{r_2}\right)d\varphi=$$

$$=k\ln\frac{r_1}{r_2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi k\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

8 Найти массу пластинки G, заданной неравенствами

$$1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge\frac{3x}{2},$$

если поверхностная плотность $\rho(x,y)=\dfrac{9x}{y^3}$

Решение. Переходим к обобщенным полярным координатам

$$x=2r\cos\varphi,\ y=3r\sin\varphi.$$

Якобиан отображения равен $J=6r$.

Из неравенства $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4$ получим $1 \le r^2 \le 4$, т. е. $1 \le r \le 2$.

Из уравнения прямой $y = \frac{3}{2}x$ имеем

$$3r\sin\varphi = 3r\cos\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Поскольку $x \ge 0$, то очевидно, что $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Значит, по формуле (3.9) имеем

$$m = \iint\limits_G \frac{9x}{y^3}dxdy = \iint\limits_{G^*} \frac{9\cdot 2r\cos\varphi}{27r^3\sin^3\varphi}\cdot 6rdrd\varphi =$$

$$= 4\iint\limits_{G^*} \frac{\cos\varphi}{r\sin^3\varphi}drd\varphi = 4\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}d\varphi\int\limits_1^2 \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{2}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \ln r\Big|_1^2 = (-2+4)\cdot(\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 2.$$

9 Найти центр масс равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительно его гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза AB (рисунок 3. 7).

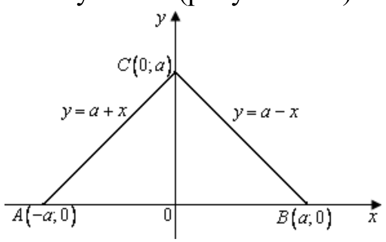

Рисунок 3. 7 – Рисунок для типового примера 10

Тогда относительно системы координат Oxy уравнения катетов AC и BC будут $y = x + a$ и $y = a - x$. Согласно условию

задачи в точке $(x;y)$ треугольника ABC плотность имеет вид $\rho(x;y) = ky$.

По формуле (3.9) для массы получим:

$$m = \iint\limits_{ABC} ky\,dxdy = k\int\limits_0^a ydy\int\limits_{y-a}^{a-y} dx = k\int\limits_0^a y\left(x\Big|_{y-a}^{a-y}\right)dy =$$

$$= k\int\limits_0^a y(a-y-y+a)dy = 2k\int\limits_0^a (ay - y^2)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^3}{3}.$$

По формулам (3.10) находим статические моменты:

$$S_x = \iint\limits_{ABC} y\cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^2dy\int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^2(a-y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^4}{6};$$

$$S_y = \iint\limits_{ABC} x\cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_{y-a}^{a-y} x\,dx = 0.$$

Координаты центра тяжести находятся по формулам (3.11):

$$x_c = 0,\; y_c = \frac{a}{2}.$$

Момент инерции относительно гипотенузы AB представляет собой I_x. Поэтому по формуле (3.12) получим:

$$I_x = \iint\limits_{ABC} y^2\,ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^3dy\int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^3(a-y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^5}{10}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линией $x^2+y^2=4y$.

2 Вычислить $\iint\limits_G 2\pi\left(x^2-y^2\right)\sin\pi(x-y)^2\,dxdy$, где G – параллелограмм: $x+y=2$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=2$.

3 Вычислить $\iint\limits_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где G – область, ограниченная линией $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

4 Вычислить $\iint\limits_G \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линиями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

5 Вычислить $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, где G – трапеция $ABCD$: $A(1;3)$, $B(2;6)$, $C(6;2)$, $D(3;1)$.

6 Найти площадь области G, ограниченной линиями

$$3x-3y-7=0,\quad y^2+2y-3x=0.$$

7 Найти массу пластинки $y=x$, $y=x+3$, $x=0$, $x=1$, если поверхностная плотность равна сумме координат точки.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2=10x+25,\quad y^2=-6x+9.$$

9 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x,\ x=2y,\ x+y=1,\ x+3y=1.$$

10 Вычислить площадь области, ограниченной кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2x^3.$$

11 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x-y=0$, $\sqrt{3}\,x-y=0$, $x^2+y^2=8$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$);

б) $x^2+y^2=4x$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$;

в) $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=3$;

г) $x^2+y^2=4$ отсекаемого плоскостями $z=0$, $z=3x$, $z\ge 0$.

12 Найти массу плоской пластинки G с плотностью $\rho(x;y)$ и ограниченной линиями:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1$, $x\le 0$, $y\ge -\frac{3}{2}x$, $\rho(x,y)=xy^2$;

б) $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=0$, $4x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^2$;

в) $x+y=1$, $x+y=2$, $3x-y=0$, $4x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^{-4}$.

13 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

а) $x+y=4$, $x-3y=0$, $x+5y=16$;

б) $y=x^2+1$, $x-y+3=0$;

в) $xy=12$, $x-3y=0$, $4x-3y=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$;

г) $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить $\iint\limits_G r^2\,drd\varphi$, где G – область, ограниченная линиями $r=3(1+\cos\varphi)$ и $r=3$ (область, не содержащая полюса).

2 Вычислить $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$.

3 Вычислить $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где G – область, ограниченная линиями:

а) $x^2+y^2=1$; б) $x^2+y^2=4$.

4 Вычислить $\iint\limits_G xydxdy$, где G – область, ограниченная линиями $y=-x$, $y=x\sqrt{3}$, $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=3x$.

5 Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где G – трапеция $ABCD$: $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(3;4)$, $D(6;2)$.

6 С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной линиями $y^2=4+x$, $x+3y=0$.

7 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x\sqrt{3}$.

8 Вычислить площадь области G: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=x$.

9 Найти площадь области $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

10 Вычислить площадь области G, ограниченной кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^2=18\left(x^2-y^2\right).$$

11 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x-y=0$, $\sqrt{3}x-y=0$, $x^2+y^2=8$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$);

б) $x^2+y^2=4x$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$;

в) конуса $z^2=2xy$, отсекаемого плоскостями $x=0$, $y=0$, $x+y=2$;

г) конуса $y^2+z^2=x^2$, отсекаемого цилиндром $x^2+y^2=4$.

12 Найти массу плоской пластинки G с плотностью $\rho(x;y)$ и ограниченной линиями:

а) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x\le 0$, $y\ge 0$, $\rho(x,y)=\dfrac{y-4x}{x^2+y^2}$,

б) $x+y=1$, $x+y=3$, $5x-y=0$, $10x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^3$;

в) $x+y=1$, $x+y=3$, $2x-y=0$, $5x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^{-3}$.

13 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

а) $x-2y=0$, $x+y=8$, $y=8$, $x=3$;

б) $y^3=x^2$, $y=-x^2+2$;

в) $xy=8$, $x+y=9$;

г) $x^2+y^2=8$, $x-y=0$, $y=\sqrt{3}x$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Практическое занятие 4 **Формула Грина**

4.1 Формула Грина

4.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

4.1 Формула Грина

Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая элементарная относительно оси Ox или Oy область G, ограниченная замкнутым контуром Γ.

Теорема 1 (формула Грина) Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G, то имеет место формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\Gamma Pdx + Qdy, \tag{4.1}$$

где контур Γ обходится в положительном направлении.

Формула Грина справедлива для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей. Формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

Площадь области G, ограниченной замкнутым контуром Γ, с помощью формулы Грина вычисляется по формуле

$$S = \iint_G dxdy = \frac{1}{2}\oint_\Gamma xdy - ydx . \tag{4.2}$$

4.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Плоская область G называется *односвязной*, если любой замкнутый контур Γ, лежащий внутри этой области, ограничивает область G_Γ, полностью принадлежащую G.

Теорема 2 Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области G. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в G, верно

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy = 0 ;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

не зависит от выбора пути интегрирования AB, целиком лежащего в G;

3) выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G:

$$Pdx + Qdy = dF ;$$

4) в области G всюду

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая область называется односвязной?

2 Какие условия должны выполняться для того, чтобы была справедлива формула Грина?

3 Перечислите эквивалентные условия, если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где

$$\Gamma=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2=4\right\}.$$

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы Грина. Имеем

$$P(x;y)=x-y, \qquad Q(x;y)=x+y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Тогда

$$\oint_{x^2+y^2=4}(x-y)dx+(x+y)dy=\iint_{x^2+y^2\le 4}(1+1)dxdy=2\pi\cdot 2^2=8\pi.$$

2 Вычислить интеграл $\int_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy$.

Решение. Здесь $P=y$, $Q=x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$. Согласно теореме 2, интеграл не зависит от пути интегрирования. Из выполнения условия 4) следует справедливость условия 3). Так как $d(xy)=xdy+ydx$, то

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy=xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)}=1-0=1.$$

3 Вычислить площадь, ограниченную астроидой

$$x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ 0\le t\le 2\pi$$

Решение. По формуле (4.2) находим

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3a^2}{16}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{3a^2\pi}{8}.$$

4 Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)}\left(12xy+4x^2\right)dx+\left(6x^2+y\right)dy,$$

предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

Решение. Функции

$$P(x;y)=12xy+4x^2,\ Q(x;y)=6x^2+y$$

непрерывны вместе со своими частными производными в любой односвязной области, содержащей точки $(0;0)$ $(1;1)$.

Поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12x,$$

то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, данный интеграл не зависит от пути интегрирования. По теореме 2 подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$:

$$dU=\left(12xy+4x^2\right)dx+\left(6x^2+y\right)dy.$$

С другой стороны

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Сравнивая два выражения для dU, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x}=12xy+4x^2,\ \frac{\partial U}{\partial y}=6x^2+y.$$

Из первого равенства, считая y постоянным, находим

$$U(x;y)=6x^2y+\frac{4}{3}x^3+C(y).$$

Находим частную производную по переменной y

$$\frac{\partial U}{\partial y}=6x^2+C'(y).$$

Сравнивая полученное выражение с имеющимся для $\frac{\partial U}{\partial y}$, получим

$$6x^2+C'(y)=6x^2+y.$$

Отсюда $C'(y)=y$ и $C(y)=\frac{y^2}{2}$.

Поэтому

$$U(x;y)=6x^2y+\frac{4}{3}x^3+\frac{y^2}{2}.$$

Тогда данный интеграл равен

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)}\left(12xy+4x^2\right)dx+\left(6x^2+y\right)dy=U(1;1)-U(0;0)=6+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{51}{6}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Проверить, зависят ли следующие криволинейные интегралы от пути интегрирования:

а) $\int\limits_\Gamma 2xe^{x^2+y^2}dx+3y^2e^{x^2+y^2}dy$;

б) $\int\limits_\Gamma 8x\sin\left(4x^2-5y^2\right)dx-10y\sin\left(4x^2-5y^2\right)dy$;

в) $\int\limits_\Gamma \left(xy^3+x^2-2y^2\right)dx+\left(y^5-3x^3y^2+x^4\right)dy$.

2 Применив формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint\limits_\Gamma \left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$, $\Gamma=\left\{\ (x;y)\mid\ x^2+y^2=9\right\}$;

б) $\oint\limits_\Gamma 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, Γ – треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$;

в) $\oint\limits_\Gamma (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $\Gamma=\left\{\ (x;y)\mid\ x^2+y^2=ax\right\}$;

г) $\oint\limits_\Gamma 2xdx-ydx$**,** где Γ – замкнутый контур, ограниченный дугой параболы $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$ и отрезком прямой $y=x$ между точками $O(0;0)$ и $B(1;1)$.

3 Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение:

а) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)}\left(3y^2+4y\right)dx+(6xy+4x-4y)dy$;

б) $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)}\left(4x^3-3y^2+5y\right)dx+(5x-6xy-4y)dy$.

Задания для домашней работы

1 Проверить, зависят ли следующие криволинейные интегралы от пути интегрирования:

а) $\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2+y^2-1}dx+\ln\left(x^2+y^2+1\right)dy$;

б) $\int\limits_\Gamma \left(4x^3-12x^2y\right)dx+\left(5y^4-4x^3\right)dy$.

2 Применив формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint\limits_\Gamma (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $\Gamma=\left\{(x;y)\mid\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$;

б) $\oint\limits_{\Gamma}(x+y)dx-(x-y)dy$, $\Gamma=\left\{(x;y)\middle|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$;

в) $\oint\limits_{\Gamma}e^{y^2-x^2}\left(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy\right)$, $\Gamma=\left\{(x;y)\middle|\ x^2+y^2=16\right\}$;

г) $\oint\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$, где Γ – контур прямоугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$, $D(3;4)$.

3 Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение:

а) $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy$;

б) $\int\limits_{(0;2)}^{(1;3)}\left(4xy-15x^2y\right)dx+\left(2x^2-5x^3+7\right)dy$.