Практическое занятие 3 Функциональные ряды

3.1 Сходимость функциональных последовательностей
3.2 Функциональные ряды и их сходимость
3.3 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов
3.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

3.1 Сходимость функциональных последовательностей

Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} = (f_1(x); f_2(x); f_3(x);\ldots),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

Последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что $\forall n \in \mathbf{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \le M$:

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty} - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \text{ и } \forall x \in X \quad |f_n(x)| \le M .$$

Последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется *поточечно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$, т. е. $\forall x \in X \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$:

$$\forall\ x \in X \ \ \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon) \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty$.

Функциональная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех точек $x \in X$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$:

$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon)$ и $\forall\ x \in X \Rightarrow \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ n \to \infty$.

Для того чтобы последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Обозначим $r_n = \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)|$.

Тогда последовательность $(r_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)|\right)_{n=1}^{\infty}$ является числовой последовательностью.

Т е о р е м а 1 (к р и т е р и й К о ш и р а в н о м е р н о й с х о д и м о с т и п о с л е д о в а т е л ь н о с т и. *Для того чтобы последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех точек $x \in X$, всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p \in \mathbf{N}$ выполнялось неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon): \forall\ x \in X, \forall\ n > N(\varepsilon)\ \forall\ p \in \mathbf{N} \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon .$$

3.2 Функциональные ряды и их сходимость

Пусть $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$ – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется *функциональным.*

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится, то x_0 называется *точ-*

кой сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D \subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ конечная сумма $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется n-*й частичной суммой* и обозначается $S_n(x)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ называется n-*м остатком* и обозначается $r_n(x)$.

Поточечная сходимость функциональных рядов. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *сходящимся поточечно* к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $S(x)$ на X, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \iff \forall x \in X \ \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Функция $S(x)$ называется *суммой* ряда.

Очевидно, что для поточечно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ его остаток $r_n(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$\forall x \in X \ \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его

сходимость, то $D_1 \subset D$, где D – область сходимости функционального ряда.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используются признаки Коши и Д'аламбера, для которых в рассматриваемом случае предел L, вообще говоря, будет функцией переменной x.

Равномерная сходимость функциональных рядов. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $(S_n(x))$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows S(x) \iff S_n(x) \rightrightarrows S(x) \ \forall x \in X.$$

Для равномерно сходящегося ряда остаток удовлетворяет соотношению: $r_n(x) \rightrightarrows 0 \ \forall x \in X$.

Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер $N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т. е. $N = N(\varepsilon; x)$, а во втором – только от ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечн*ая сходимость называется также *неравномерной*.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости ряда) Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что всех $n > N(\varepsilon)$, всех $p \in \mathbf{N}$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство

$$|u_{n+1}(x) + .. + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

3.3 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 3 (признак Вейерштрасса) Пусть

1) члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X.$$

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_n \ge 0$, *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* X.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X$, называется *мажорантным* рядом или *мажорантой* для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется *мажорируемым* на множестве X.

Теорема 4 (признак Дирихле) Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ *равномерно сходится к нулю на множестве* X;

2) $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *в каждой точке* $x \in X$ *монотонна;*

3) последовательность частичных сумм $(B_n(x))$, $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$, *ограничена на* X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *равномерно сходится на* X.

Теорема 5 (признак Абеля). Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ *ограничена на множестве* X *и в каждой точке* $x \in X$ *монотонна;*

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ *равномерно сходится на* X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *равномерно сходится на* X.

3.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *(непрерывность)* если на множестве X функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма непрерывна на X и возможен предельный переход:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x) \quad \forall x_0 \in X;$$

– *(почленное интегрирование)* если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x] \subset [a;b]$ и справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\, dt;$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится равномерно на $[a;b]$;

– *(почленное дифференцирование)* если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$ членами сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ и справедливо равенство;

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функциональная последовательность называется ограниченной?

2 Какая функциональная последовательность называется поточечно сходящейся на множестве X?

3 Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности.

4 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательности.

5 Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.

6 Сформулируйте определения поточечной и равномерной сходимости функционального ряда.

7 Следует ли из равномерной сходимости ряда поточечная? Верно ли обратное?

8 Сформулируйте признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

9 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

10 Перечислите свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Решение типовых примеров

1 Доказать, что функциональная последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; x; x^2; \ldots\right)$, заданная на множестве $X = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, является равномерно сходящейся на этом множестве.

Решение. Предел существует и $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$ для всех $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Так как $\sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} \left|x^n - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} \left|x^n - 0\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Поэтому последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; x; x^2; \ldots\right)$ сходится равномерно к нулю на отрезке $X = \left[0; \frac{1}{2}\right]$: $x^n \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} 0$.

2 Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$.

Решение. Зафиксируем точку x и применим признак Д'аламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^k}{x^{k-1}}\right| = |x|.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ является интервал $(-1;1)$.

3 Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k$.

Решение. Применим признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда.
Так как

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|u_k(x)\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k\right|} = \left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}} = \left|\frac{x-1}{2x+1}\right|,$$

то ряд сходится, когда $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1$.

Решая данное неравенство, получим

$$-1<\frac{x-1}{2x+1}<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\ge 0,\\ -(2x+1)<x-1<2x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1<0,\\ -(2x+1)>x-1>2x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\frac{-1}{2},\\ x>0,\\ x>-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{2},\\ x<0,\\ x<-2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Итак, ряд сходится при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=0$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, являющийся сходящимся, поскольку он удовлетворяет условиям Лейбница.

При $x=-2$ получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$, являющийся расходящимся как обобщенный гармонический ряд ($p=\frac{1}{2}<1$).

4 Исследовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$$

на а) поточечную, б) равномерную сходимость.

Решение. а) так как

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}},$$

то члены исходного ряда при $x\neq 0$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{1+x^2}<1$, а при $x=0$ все обращаются в нуль. Тогда

$$S(x)=\begin{cases}0, \text{если } x=0,\\ 1+x^2, \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

Следовательно, областью поточечной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ является вся числовая ось $\mathbf{R}$. При этом, хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbf{R}$, сумма $S(x)$ разрывна в точке $x=0$;

б) пусть $0<\varepsilon<1$ и $x\neq 0$. Тогда

$$S_n(x)=\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right),$$

и неравенство

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon$$

выполняется при $n>N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Действительно,

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon \Rightarrow \left(1+x^2\right)^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow (n-1)\ln\left(1+x^2\right)>-\ln\varepsilon.$$

Отсюда $n>1-\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

Отсюда $N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Поскольку $N(\varepsilon,x)\to+\infty$ при $x\to 0$ и $0<\varepsilon<1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $N(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon \ \ \forall n>N(\varepsilon)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Значит, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ на $\mathbf{R}$ неравномерная.

5 Является ли сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}$ непрерывной функцией?

Решение. Каждый член $u_k(x)=\frac{\cos kx}{k^3}$, $k=1,2,\ldots$, есть функция, непрерывная от x. Поскольку $\left|\frac{\cos kx}{k^3}\right|\le\frac{1}{k^3}$, то и мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ является сходящимся как обобщенный гармонический ряд, $p=3>1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}$ сходится равномерно на всей числовой оси. Поэтому сумма этого ряда непрерывна при всех x как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

6 Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x^2}$.

Так как $\frac{1}{k^2+x^2}\le\frac{1}{k^2}$ $\forall x\in\mathbf{R}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $\mathbf{R}$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{k^2+t^2}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$.

7 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ сходится при $|x|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда сходится равномерно при $|x|\le q<1$ на основании признака Вейерштрасса, так как он мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$, сходящимся по признаку Д'аламбера. Используя свойство почленного дифференцирования, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},\ \forall x\in(-1;1).$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что последовательность $\left(\frac{k^2}{k^2+x^2}\right)_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на отрезке $[-1;1]$.

2 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^k$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\,e^{kx}$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^k$;

д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}4^k(3x+2)^{2k-1}$;

ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5-x^2}{4}\right)^k$;

и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2e^{-kx^2}$.

3 Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k}$.

4 Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+3^k}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+k^2}$.

5 Исследовать непрерывность функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{x^2+k^2}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x^2}$.

6 Найти сумму функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

Задания для домашней работы

1 Доказать, что последовательность $\left(\frac{\operatorname{arctg} kx}{\sqrt{k+x}}\right)_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на промежутке $[0;+\infty)$.

2 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!!}\left(\frac{x+4}{2x+1}\right)^k$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(\frac{2x-5}{3x+1}\right)^k$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{x^4+k^4}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}5^k(x+2)^k$; ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{x^2-4}\right)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kx}$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{k^2}$.

3 Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+2k}$.

4 Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k^4}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k\sqrt[3]{k}}$.

5 Исследовать непрерывность функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+k^3}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^k\left(1+x^{2k}\right)}$.

6 Найти сумму функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)k}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Практическое занятие 4 **Степенные ряды**

4.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля
4.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда
4.3 Свойства сходящихся степенных рядов

4.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля

Ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_k(x - x_0)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

называется *степенным рядом* по степеням $(x - x_0)$. Здесь a_k, x_0 – заданные действительные числа, x – переменная. Числа a_k называются *коэффициентами* степенного ряда.

При $x_0 = 0$ имеем *степенной ряд по степеням* x:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Поскольку заменой $x - x_0 = \xi$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ можно свести к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$, то не ограничивая общности можно рассматривать только ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 1 (Абеля) Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в интервале* $-|x_0| < x < |x_0|$ *и сходится равномерно на отрезке* $-q \le x \le q$, *где* $0 < q < |x_0|$. *Если в точке* $x_1 \neq 0$ *степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится, то он расходится во всех точках* x, *таких, что* $|x| > |x_1|$.

4.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля вытекает, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

Число $R \ge 0$ называется *радиусом* сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R; R)$ и расходится при $|x| > R$. Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости*.

При $x = \pm R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если ряд хотя бы в одной точке $x_1 = R$ или $x_2 = -R$ сходится, то эти точки вместе с интервалом сходимости образуют *область сходимости*.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbf{R}$, то $R = \infty$.

Теорема 2 Пусть для коэффициентов ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *существует предел* $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \neq 0$. *Тогда радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара:*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Если существует предел $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$, то $R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_k + 1} \right|$.

Для степенного ряда общего вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ существует $R \in \mathbf{R}$, $R \ge 0$, такое, что данный ряд абсолютно сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Здесь число $R \ge 0$ называют *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

4.3 Свойства сходящихся степенных рядов

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ обладает свойствами:

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то его сумма непрерывна на интервале сходимости $(-R; R)$;

– операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0; x] \subset (-R; R)$ степенного ряда не изменяют его радиуса сходимости;

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости;

– степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0; x]$, принадлежащем интервалу сходимости:

Вопросы для самоконтроля

1 Какой ряд называется степенным?

2 Сформулируйте теорему Абеля.

3 Что называется радиусом сходимости, интервалом сходимости, областью сходимости степенного ряда?

4 По каким формулам вычисляется радиус сходимости степенного ряда?

5 Перечислите свойства сходящихся степенных рядов.

Решение типовых примеров

1 Найти радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$.

Решение. Имеем:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0.$$

Значит, ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

2 Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k \cdot 5^k}$.

Решение. Имеем:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k \cdot 5^k}}{\frac{1}{(k+1) \cdot 5^{k+1}}} = 5.$$

Значит, интервал сходимости $-5 < x - 3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x = -2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, а в точке $x = 8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2; 8)$.

3 Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^k x^{2k} + \ldots,$$

полученный почленным дифференцированием исходного ряда. Так как члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $(-x^2)$, то его сумма $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$, если $|x| < 1$.

Интегрируя ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ почленно на отрезке $[0; x] \subset (-1; 1)$, получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg} x, \ |x|<1.$$

Таким образом, функция $y=\operatorname{arctg} x$ является суммой исходного ряда.

Задания для аудиторной работы

1 Найти радиус сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{7^k}$; д) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 5^k x^k$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty}k3^k x^k$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}k!(x-2)^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k^2}}{k!}(x+3)^k$; ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}(x+1)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})^{k^2}(x-e)^k$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k$.

2 Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k(5^k+1)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2k-1}}{k\cdot 7^k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k\sqrt{k+1}}$.

Задания для домашней работы

1 Найти радиус степенных рядов:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{2k}}$; д) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 3^{2k} x^2$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k 2^{2k} x^k$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+6)^k}{k!}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k^k}\,(x-1)^k$; ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}(x-1)^k$);

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2k}}{k^2}$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{k+5}\right)^{k^2} x^k$.

2 Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2k}}{k}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+5)^k}{k^4}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})^{k^2}\frac{x^{2k}}{2k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!k^k}{K(k!)^2}$.