Тема 2 Ряды Фурье

***Практическое занятие 1* Ряды Фурье по ортогональным системам функций**

1.1 Пространство кусочно-непрерывных функций

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция. В любой точке разрыва $x_0 \in [a;b]$ такой функции существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$. Поэтому на каждом участке непрерывности существуют определенные интегралы Римана $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. Значит, кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема вместе со своим квадратом на $[a;b]$. Функция $f(x)$ в этом случае называется *функцией с интегрируемым квадратом*.

Так как на множестве кусочно-непрерывных функций определены линейные операции, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства, то это множество образует линейное пространство.

Скалярным произведением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx .$$

На рассматриваемом множестве скалярное произведение функций (φ,ψ) существует и обладает следующими свойствами:

– $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$;
– $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$;
– $(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)\ \ \forall\lambda\in\mathbf{R}$;
– $(\varphi,\varphi)\ge 0$, $(\varphi,\varphi)=0 \Leftrightarrow \varphi=0$,

т. е. удовлетворяет аксиомам евклидова пространства.

Множество всех кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций со скалярным произведением (φ,ψ) называется *пространством* L_2 и обозначается $L_2[a;b]$.

Неотрицательное число

$$\|\varphi\|=\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}$$

называется *нормой* функции $\varphi(x)$ в $L_2[a;b]$.

Учитывая, что

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx=(\varphi,\varphi),$$

норму функции можно записать в виде:

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)} .$$

Функция $\varphi(x)$ называется *нормированной*, если ее норма равна единице.

Две функции $\varphi(x)\in L_2[a;b]$ и $\psi(x)\in L_2[a;b]$ называются *ортогональными* на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на $[a;b]$ равно нулю:

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0 .$$

Система функций

$$(\varphi_n(x))=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots)$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной* на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на этом отрезке, т. е.

$$(\varphi_m,\varphi_n)=0,\ \forall m\ne n,\ m,n\in\mathbf{N} .$$

Ортогональная система функций ($\varphi_n(x)$) на отрезке $[a;b]$ называется *ортонормированной*, если

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \ .$$

Любую ортогональную на $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$) с $\|\varphi\| \neq 0 \ \ \forall n \in \boldsymbol{N}$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы ($\varphi_n(x)$) на ее норму. В результате получим ортонормированную систему функций $\left(\dfrac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right)$.

Основной тригонометрической системой функций на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, ...\right).$$

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$.

1.2 Обобщенный ряд Фурье

При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке x_0 предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Пусть ($\varphi_n(x)$) – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Выражение

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ... + c_n\varphi_n(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

называется *обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций* ($\varphi_n(x)$). Если ($\varphi_n(x)$) – основная тригонометрическая система функций, то ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье*.

Метрикой ρ *(расстоянием)* в пространстве $L_2[a;b]$ называется величина

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx} \ .$$

Величина $\rho(f, \varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ *в среднем квадратичном*.

Используя определение нормы функции, имеем

$$\rho(f, \varphi) = \|f(x) - \varphi(x)\|.$$

Ортогональным многочленом Фурье называется частичная сумма

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x).$$

Если в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система, то многочлен Фурье называется *тригонометрическим* и обозначается $T_n(x)$.

1.3 Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье

Теорема 1 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье) Среди всех обобщенных многочленов вида $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\varphi_k(x)$, $\alpha_k \in \mathbf{R}$, *наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *является многочлен Фурье, коэффициенты которого находятся по формулам* $\alpha_k = c_k = \dfrac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Теорема 2 (неравенство Бесселя) Если $f(x) \in L_2[a;b]$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ *ее обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций* ($\varphi_n(x)$), *то справедливо неравенство*

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 .$$

Ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(x) \in L_2[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться равенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Из равномерной сходимости следует, что при $n \to \infty$

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S_n(x)| \to 0 .$$

Ряд Фурье называется *сходящимся в среднем квадратичном* к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0 .$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

Теорема 3 Если обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ функции $f(x)$ сходится на отрезке $[a;b]$ равномерно к функции $f(x) \in L_2[a;b]$, то он сходится к $f(x)$ на $[a;b]$ и в среднем квадратичном.

Теорема 4 Для того чтобы обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ функции $f(x) \in L_2[a;b]$ сходился к $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x) dx .$$

Ортогональная система функций ($\varphi_k(x)$), для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется *замкнутой* в $L_2[a;b]$, а само равенство – *уравнением замкнутости*.

Из теоремы 4 следует, что любая функция $f(x) \in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$), если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется кусочно-непрерывной?

2 Что называется скалярным произведением функций и какими свойствами оно обладает?

3 Какая система функций называется ортогональной и ортонормированной?

4 Запишите основную тригонометрическую систему и докажите ее ортогональность.

5 Какое выражение называется обобщенным рядом Фурье?

6 Как измерить близость функций? Что называется среднеквадратичным уклонением функций?

7 Какое выражение называется ортогональным многочленом Фурье? Запишите тригонометрический многочлен Фурье.

8 Сформулируйте теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.

9 Что можно сказать о сходимости обобщенного ряда Фурье, если для него выполняется неравенство Бесселя?

10 Какая ортогональная система функций называется замкнутой?

Решение типовых примеров

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Имеем:

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

2 Вычислить норму функции $\varphi(x)=\sin x$ в $L_2[0;\pi]$.

Решение. Так как

$$\|\varphi\|^2=\int_0^\pi \sin^2 xdx=\left.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\right|_0^\pi=\frac{\pi}{2},$$

то $\|\varphi\|=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

3 Проверить ортогональны ли функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезках а) $[-1;1]$, б) $[0;1]$.

Решение.

а) функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ являются ортогональными на отрезке $[-1;1]$, так как

$$(\varphi,\psi)=\int_{-1}^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^1=0;$$

б) функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ не являются ортогональными на отрезке $[0;1]$, поскольку

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 x\cdot x^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}\neq 0.$$

4 Доказать, что основная тригонометрическая система функций

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right)$$

на отрезке $[-l;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

Решение. Докажем, что система ортогональна. Имеем:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}dx=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}+\frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right|_{-l}^{l}=0.$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных интегралов:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall\ n\in\mathbf{N},$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall\ n\in\mathbf{N},$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall m,n\in\mathbf{N},\ m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall m,n\in\mathbf{N},\ m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall m,n\in\mathbf{N},\ m\neq n.$$

Вычислим норму первого члена основной тригонометрической системы функций. Так как

$$\|1\|^2=\int_{-l}^{l}(1)^2dx=\left.x\right|_{-l}^{l}=2l,$$

то $\|1\|=\sqrt{2l}$.

Найдем норму произвольного члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=l\Rightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}\,,\ \forall\ n\in\mathbf{N}\ .$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}\quad\forall\ n\in\mathbf{N}\ .$$

Разделим каждый член ортогональной на $[-l;l]$ системы на соответствующую ему норму. В результате получается ортонормированная на отрезке $[-l;l]$ *система функций:*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},...,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},...\right).$$

5 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Решение. Ортогональная на $[-1;1]$ система многочленов Лежандра задается условием:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n=0,1,...$$

Первые три члена этой системы имеют вид:

$$P_0(x)=1\,,$$
$$P_1(x)=x\,,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$$

Запишем обобщенный ряд Фурье для функции $f(x)=e^x\in L_2[-1;1]$:

$$e^x\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$$

и найдем три первых члена искомого разложения, использовав формулы:

$$c_0=\frac{(f,P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2},\ c_1=\frac{(f,P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2},\ c_2=\frac{(f,P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2}$$

Вычислим квадраты нормы многочленов Лежандра:

$$\|P_0(x)\|^2=\int_{-1}^{1}dx=2\,,$$

$$\|P_1(x)\|^2=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}\,,$$

$$\|P_2(x)\|^2=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right)dx=\frac{2}{5}\,.$$

Тогда

$$c_0=\frac{1}{2}(f,P_0(x))=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^xdx=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right),$$

$$c_1=\frac{3}{2}(f,P_1(x))=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}e^xxdx=\frac{3}{e}\,,$$

$$c_2=\frac{5}{2}(f,P_2(x))=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}e^x\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx=\frac{5}{2}\left(e-\frac{7}{e}\right).$$

Обобщенный ряд Фурье, порожденный функцией $f(x)=e^x\in L_2[-1;1]$, запишется в виде

$$e^x\sim\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\frac{3}{e}x+\frac{5}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)+...$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x^3$ и $\psi(x)=x^4+1$ на отрезке $[0;1]$.

2 Доказать, что система $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, …, $\sin\frac{n\pi x}{l}$, … на отрезке $[0;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

3 Доказать, что система *многочленов Лежандра*, определяемая следующим образом:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-n\right)^n,\ n=0,1,\ldots,$$

на отрезке $[-1;1]$ является ортогональной.

4 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Задания для домашней работы

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=e^x$ на отрезке $[0;1]$.

2 Доказать, что система 1, $\cos x$, $\cos 2x$, …, $\cos nx$, … на отрезке $[0;\pi]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

3 Записать первые пять членов разложения функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Практическое занятие 2 **Ряды Фурье по тригонометрической системе**

2.1 Ряд Фурье для периодической функции с периодом T
2.2 Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье
2.3 Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций
2.4 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

7.1 Ряд Фурье для периодической функции с периодом T

П е р и о д $T=2l$. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом $T=2l$. Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на $[-l;l]$:

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right), \quad (2.1)$$

для которой:

$$\|1\|=\sqrt{2l}\,,\ \|\sin nx\|=\|\cos nx\|=\sqrt{l}\,.$$

Основная тригонометрическая система функций обладает полнотой, т. е. для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом, имеет место равенство Парсеваля – Стеклова при $a=-l$, $b=l$:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2\|\varphi_n\|^2\,. \quad (2.2)$$

Поэтому периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2l$ можно разложить в ряд Фурье, который будет сходиться к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)=$$

$$=c_0+c_1\cos\frac{\pi x}{l}+c_2\sin\frac{\pi x}{l}+c_3\cos\frac{2\pi x}{l}+c_4\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots.$$

С учетом того, что коэффициенты при косинусах принято обозначать буквой a, при синусах – буквой b, а начальный коэффициент – буквой $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, ряд Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{(1, f)}{\|1\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{\left(f, \cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \ n \in \boldsymbol{N} \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{\left(f, \sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ n \in \boldsymbol{N}.$$

Тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{2.4}$$

коэффициенты которого определяются по формулам (2.3), называется *тригонометрическим рядом Фурье* для периодической функции $f(x) \in L_2[a;b]$.

Для тригонометрического ряда Фурье справедливо *уравнение Ляпунова*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\|f\|^2. \tag{2.5}$$

Период $T = 2\pi$. Пусть $f(x) \in L_2[-\pi;\pi]$. Ряд Фурье для такой функции получается из ряда (2.4) при $l = \pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{2.6}$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ n \in \mathbf{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \ n \in \mathbf{N}.$$

2.2 Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье

Каждой периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x) \in L_2[-l;l]$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по соответствующим формулам.

Важными являются два вопроса о сходимости рядов Фурье:

– при каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, ряд Фурье сходится в том или ином смысле к этой функции и, следовательно, в соотношениях (2.4) и (2.6) справедливы знаки равенства?

– как влияют свойства функции $f(x)$ на характер сходимости ее ряда Фурье?

Ответ на эти вопросы будет дан в следующих теоремах.

Теорема 1 *Если $f(x) \in L_2[-l;l]$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2.4) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right)dx = 0.$$

Теорема 2 *Если $f(x) \in L_2[-l;l]$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2.4) сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда*

Фурье справедливы следующие соотношения:

1) $S(x)=f(x)$, *если* x *– точка непрерывности функции* $f(x)$*;*

2) $S(x)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, *если* x_0 *– точка разрыва первого рода функции* $f(x)$*;*

3) $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

На рисунке 2. 1 дана геометрическая интерпретация условий 1), 2), 3) теоремы 2.

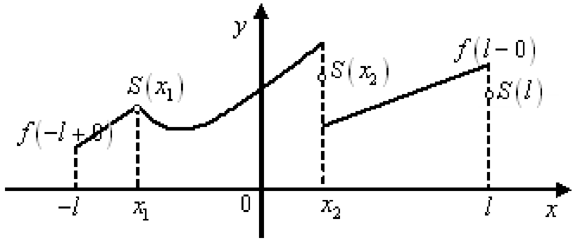

Рисунок 2. 1 – Сходимость ряда Фурье в различных точках

Так, например, условие 2) означает, что в точках разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции справа и слева.

Т е о р е м а 3 Если функция $f(x)\in L_2[a;b]$ *является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке* $[-l;l]$*, а на концах этого отрезка удовлетворяет условию* $f(-l)=f(l)$*, то ее тригонометрический ряд Фурье на* $[-l;l]$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Теоремы 1 – 3 показывают, как свойства функции $f(x)\in L_2[a;b]$ влияют на сходимость ее ряда Фурье:

– если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T=2l$, то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва, т.е. сумма ряда не везде совпадает с $f(x)$;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая и непрерывная функция, то ее ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$.

2.3 Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций

Рассмотрим частные случаи.

Ч е т н а я ф у н к ц и я. Для четной функции имеет место равенство:

$$f(-x)=f(x)\ \ \forall x\in[-l;l].$$

В этом случае произведение $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ – нечетной. Поэтому коэффициенты ряда Фурье для четной функции находятся по формулам:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=0,\ n\in\mathbf{N}.$$

а сам ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы и свободный член:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Н е ч е т н а я ф у н к ц и я. Для нечетных функций имеет место равенство:

$$f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in[-l;l].$$

В этом случае произведение $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ – четной. Таким образом, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для нечетной функции находятся по формулам:

$$a_0 = a_n = 0\,,\ n \in \mathbf{N}\ ,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,,\ n \in \mathbf{N}\ ,$$

а сам тригонометрический ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\ .$$

Непериодическая функция. Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по *косинусам* ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным образом (рисунок 2. 2):

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-x) & \forall x \in [-l;0], \\ f(x) & \forall x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

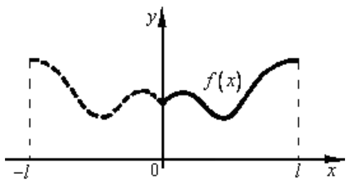

Рисунок 2. 2 – Продолжение непериодической функции четным образом

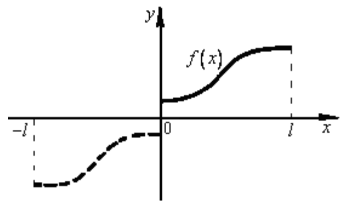

Рисунок 2. 3 – Продолжение непериодической функции нечетным образом

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\,,$$

где $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $n \in \mathbf{N}$.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по *синусам* ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (рисунок 2. 3):

$$f^*(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{при } x \in [-l;0], \\ f(x) & \text{при } x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,,$$

где $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $n \in \mathbf{N}$.

2.4 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Пусть $f(x) \in L_2[-l;l]$, $2l$-периодическая функция, которая представима сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В электро- и радиотехнике для такой функции используется *комплексная форма* тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \qquad (2.7).$$

Коэффициенты c_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, ряда (2.7) находятся по формулам:

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,,$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots .$$

Выражения $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ называются *гармониками*, числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ – *волновыми числами*, множество всех волновых чисел – *спектром*, коэффициенты c_n – *комплексными амплитудами*.

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для периодических функций?

2 При выполнении каких условий тригонометрический ряд Фурье сходится к функции?

3 В чем особенность вычисления коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций?

4 Как разложить в ряд Фурье непериодическую функцию?

Решение типовых примеров

1 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию (рисунок 2.4)

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } -\pi<x<0,\\ \ \ 1, \text{ если } 0\le x\le \pi.\end{cases}$$

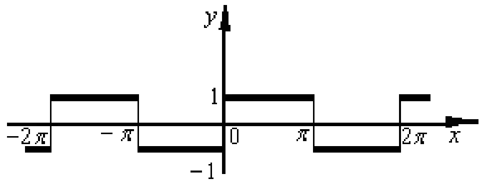

Рисунок 2. 4 – График функции

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } -\pi<x<0,\\ \ \ 1, \text{ если } 0\le x\le \pi.\end{cases}$$

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos n\pi}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, \text{ если } n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n}, \text{ если } n=2k+1,\end{cases}$$

где $k\in\mathbf{N}$.

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+\ldots\right).$$

На рисунках 2. 5, 2. 6, 2. 7 изображены графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ соответственно.

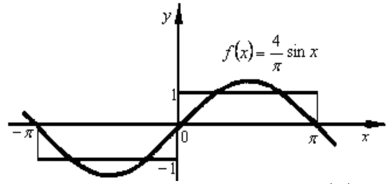

Рисунок 2. 5 – График $S_1(x)$

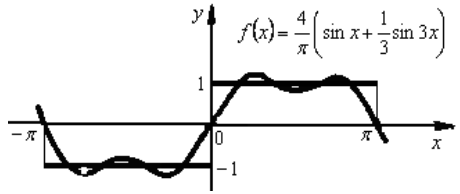

Рисунок 2. 6 – График $S_2(x)$

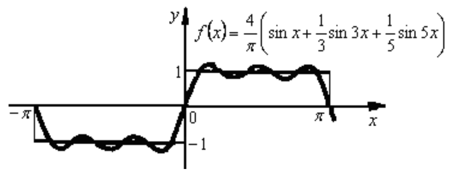

Рисунок 2. 7 – График $S_3(x)$

Видно, как частичные суммы S_n, ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n\to\infty$.

2 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π

функцию, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$ равенством $f(x)=|x|$.

Р е ш е н и е. Данная функция является чётной (рисунок 2. 8), поэтому её ряд Фурье содержит только косинусы.

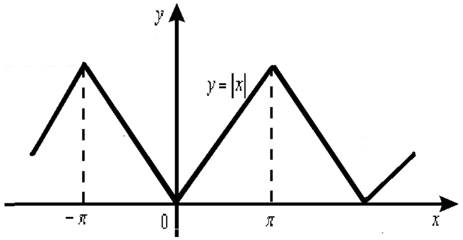

Рисунок 2. 8 – График 2π периодичной функции $f(x)=|x|$

Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(nx)dx=dv,\ v=\frac{1}{n}\sin(nx),\\ u=x,\ du=dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)=\left.\frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\right|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\begin{cases}0,\text{ если }\ n=2k,k=1,2,...,\\ -\dfrac{4}{\pi n^2},\text{ если }\ n=2k+1,k=0,1,....\end{cases}$$

Следовательно,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

3 Для функции $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ (рисунок 2. 9) записать ряд Фурье.

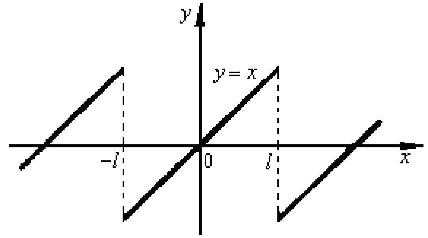

Рисунок 2. 9– График $2l$ -периодической функции $f(x)=x$

Р е ш е н и е. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\left.\cos\frac{n\pi x}{l}\right|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

Следовательно, ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)=x$ имеет вид:

$$x\sim\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Так как функция $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$, но сходимость является не равномерной, а поточечной (во всех внутренних точках отрезка $[-l;l]$). На концах этого отрезка ряд Фурье не является сходящимся к $f(x)$, поскольку, согласно теореме 2, его сумма

$$S(-l)=S(l)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}=0\,.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad \forall x\in(-l;l)\,.$$

4 Разложить функцию $f(x)=x$ на отрезке $[0;\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам.

Решение. а) продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом, т. е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную на $[-\pi;\pi]$ следующим образом: $f^*(x)=|x|$. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi\,,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Откуда

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right)\quad \forall x\in[-\pi;\pi]$$

или $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots;$$

б) продолжим функцию $f(x)=x$ теперь на отрезок $[-\pi;0]$ нечетным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)=x$, $|x|<\pi$. Вычислим коэффициенты Фурье b_n (так как для нечетной функции $a_0=a_n=0$):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\,.$$

Тогда $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots.$$

Задания для аудиторной работы

1 Разложить на промежутке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=5x-1$;

б) $f(x)=3x^2$;

в) $f(x)=|\sin 2x|$;

г) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 & \text{при } 0<x\le\pi.\end{cases}$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=2x+3x^2$.

3 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -x \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=6-2x$.

4 Разложить на промежутке $[0;\ln 2]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sh}x$, доопределив ее на $[-\ln 2;0]$ а) четным, б) нечетным способами.

5 Разложить на промежутке $[-1;1]$ в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } -1\le x\le 0,\\ 1-x \text{ при } 0<x\le 1.\end{cases}$$

Задания для домашней работы

1 Разложить на промежутке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=2-3x$;

б) $f(x)=x-x^2$;

в) $f(x)=|\cos x|$;

г) $f(x)=\begin{cases}4 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 \text{ при } 0<x\le \pi.\end{cases}$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам функции.

а) $f(x)=\begin{cases}1-2x \text{ при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 \quad \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ б) $f(x)=4x-3$.

3 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ б) $f(x)=4+\dfrac{1}{2}x$.

4 Разложить на промежутке $[0;3]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=3x-x^2$, доопределив ее на $[-3;0]$ а) четным, б) нечетным способами.

5 Разложить на промежутке $[-1;1]$ в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}4x \text{ при } -1\le x\le 0,\\ -1-x \text{ при } 0<x\le 1,\end{cases},$$