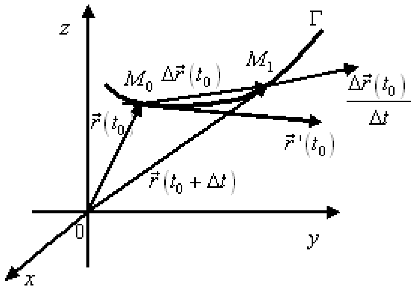


<u>Касательная к кривой.</u> Пусть задана кривая $\Gamma=\{\,\vec r(t)\,|\;\; a\le t\le b\}$, где $\vec r(t)$ – вектор-функция, дифференцируемая в точке $t_0\in[a;b]$, причем $\vec r\,'(t_0)\ne 0$. Согласно определению дифференцируемости ее приращение можно представить в виде

$$\Delta\vec r(t_0)=\vec r\,'(t_0)\cdot\Delta t+o(\Delta t),\;\;\Delta t\to 0\,.$$

Из этой формулы и условия $\vec r\,'(t_0)\ne 0$ следует, что для всех достаточно малых $\Delta t\ne 0$ имеет место $\Delta\vec r(t_0)\ne 0$ или $\vec r(t_0+\Delta t)\ne\vec r(t_0)$. Значит, точки $M_0=M(t_0)$ и $M=M(t_0+\Delta t)$ различны.

Проведем через эти точки прямую M_0M, которая называется *секущей.* Если $\vec r\,'(t_0)\ne 0$, то при всех значениях Δt, ненулевой вектор $\Delta\vec r=\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)$ параллелен секущей. Поэтому вектор $\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}$ также параллелен секущей (рисунок 9.8).

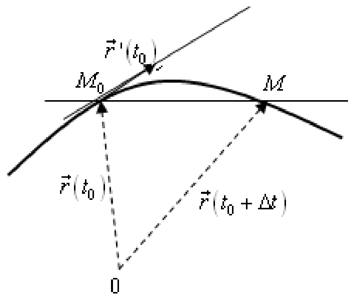
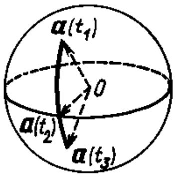


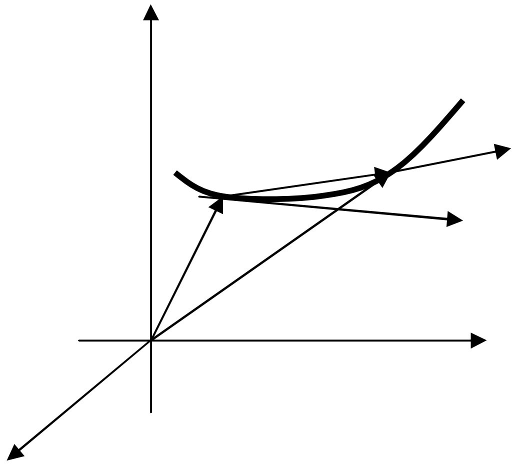
Рисунок 9.8 – Секущая M_0M и касательная

По условию в точке t_0 существует производная $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}=\vec r(t_0)\ne 0$. Геометрически это означает, что векторы $\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}$, параллельные секущей M_0M, при $\Delta t\to 0$ стремятся к некоторому предельному вектору $\vec r\,'(t_0)$. Все секущие M_0M проходят через точку M_0.

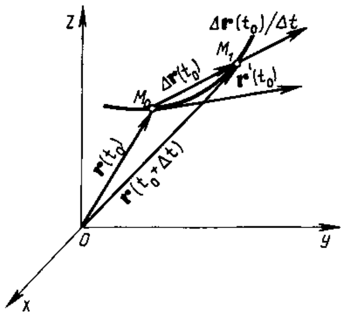


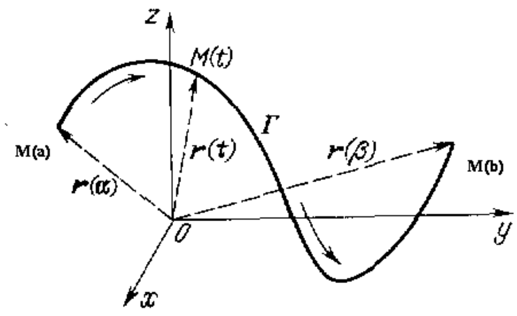
0 $\vec r(t_1)$ $\vec r(t_2)$ $\vec r(t_3)$ $\vec i$ $\vec j$ $\vec k$ x y z M_1 M_2 M_3

Γ

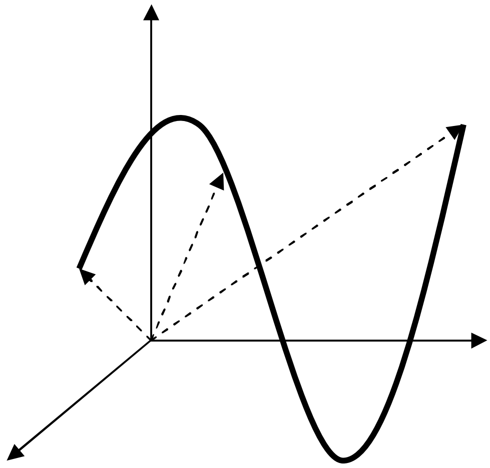


x y z 0 $\vec{r}\left(t_0\right)$ $\Delta\vec{r}\left(t_0\right)$ $\vec{r}\left(t_0+\Delta t\right)$ $\dfrac{\Delta\vec{r}\left(t_0\right)}{\Delta t}$ M_0 M_1 $\vec{r}\,'\left(t_0\right)$

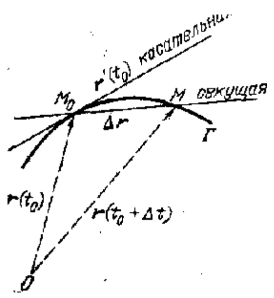




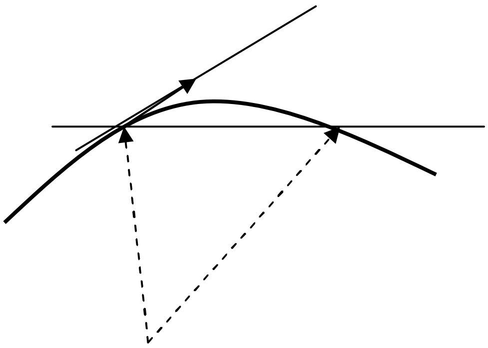
$M\left(a\right)$ $M\left(b\right)$ $\vec{r}\left(a\right)$ $\vec{r}\left(b\right)$ Γ $M\left(t\right)$ x y z 0
$\vec{r}\left(t\right)$

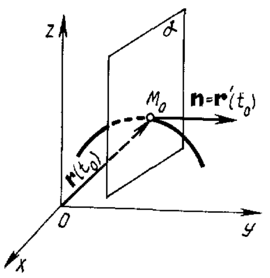


0

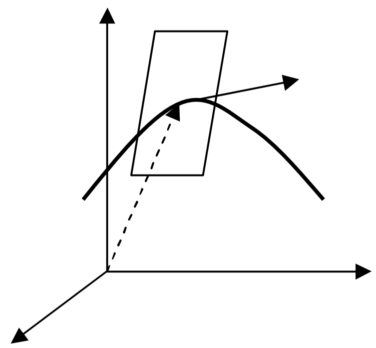


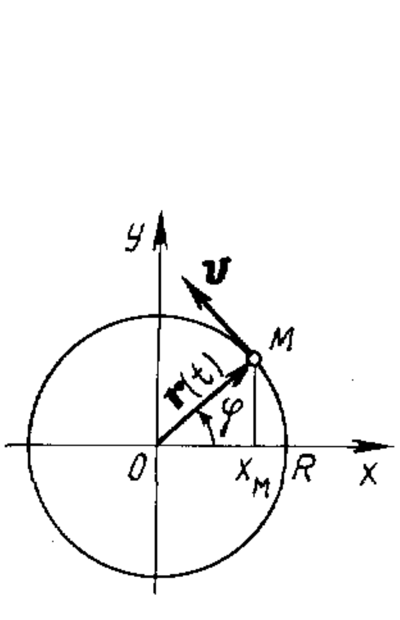
$\vec{r}\left(t_0\right)$ $\vec{r}\left(t_0+\Delta t\right)$ M_0 M $\vec{r}\,'\left(t_0\right)$



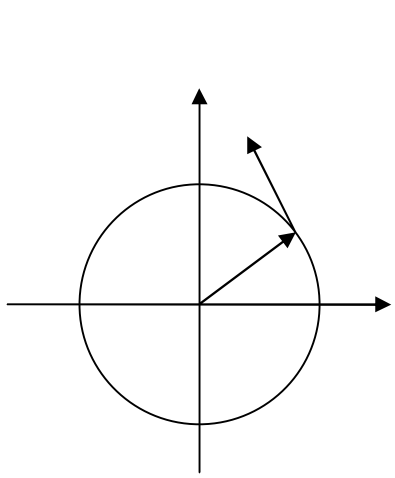


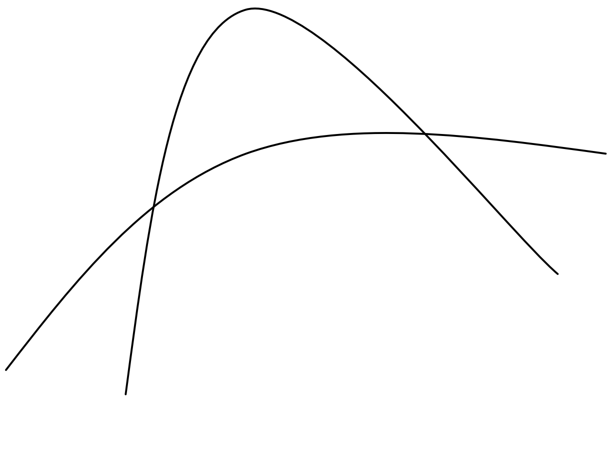
$x\ y\ z\ 0\ \vec{r}\left(t_0\right) M_0\ \ \alpha\ \ \vec{n} = \vec{r}\,'\left(t_0\right)$



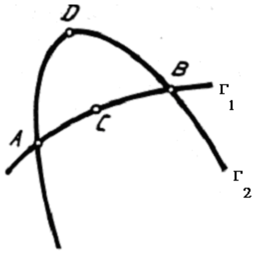

y
υ
M
r(t)
φ
O
x_M
R
x

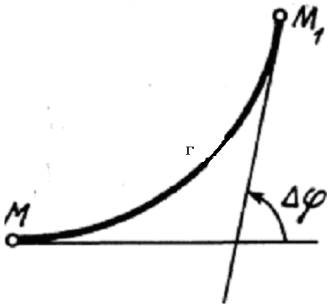
$0\, x\, y\, \vec{r}\left(t\right)\, \varphi\; M\;\; R\;\; \vec{v}\;\; x_M$

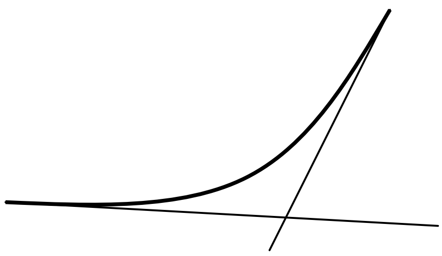




A B C D Γ_1 Γ_2

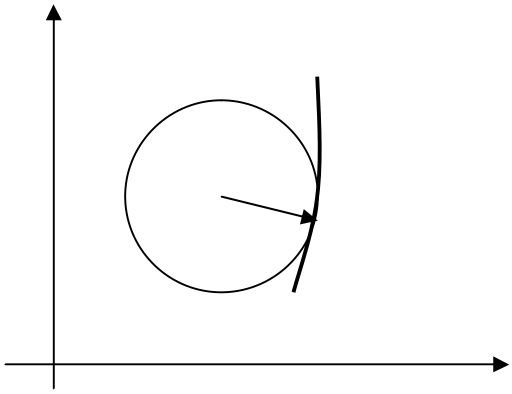


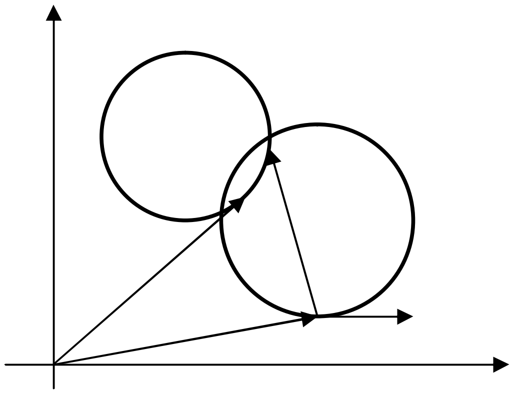




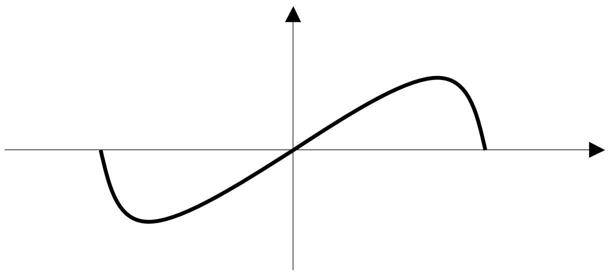
M $\Delta\varphi$ M_1 R

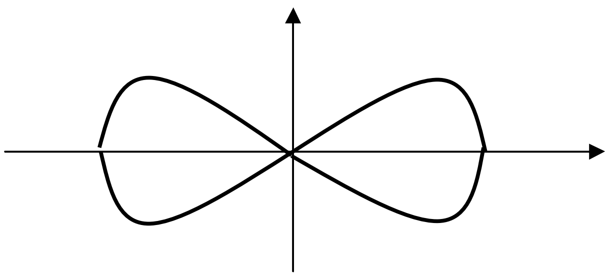
x y 0 N M
R



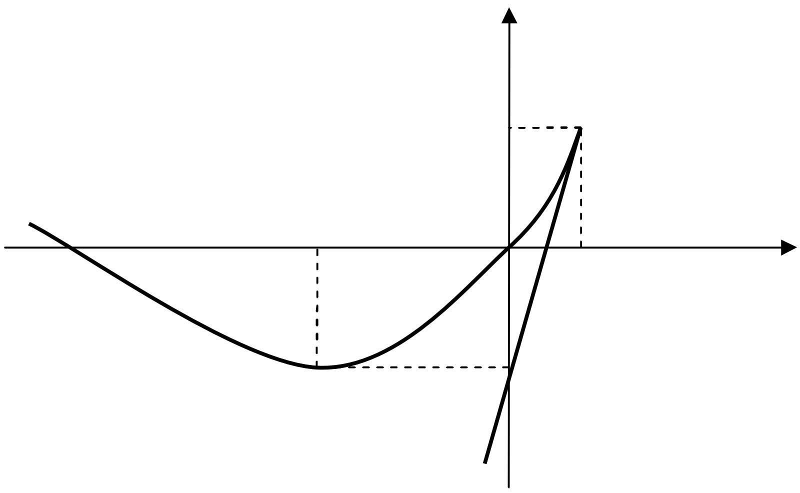


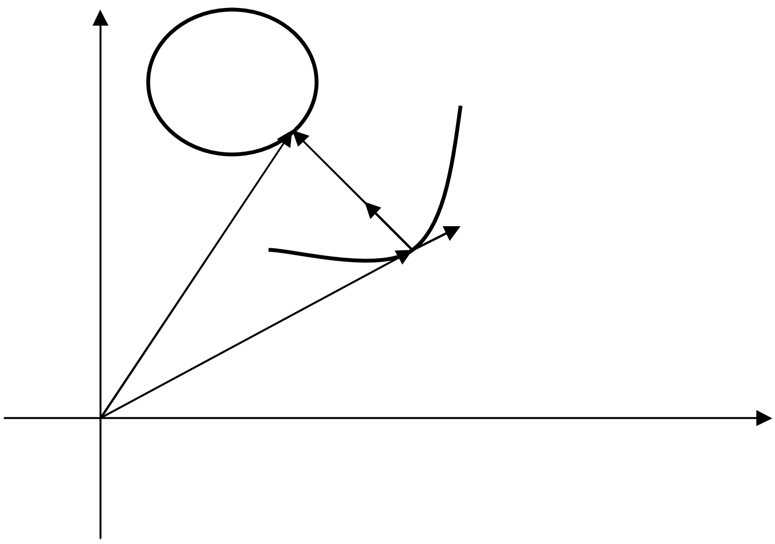
x y -1 0 1



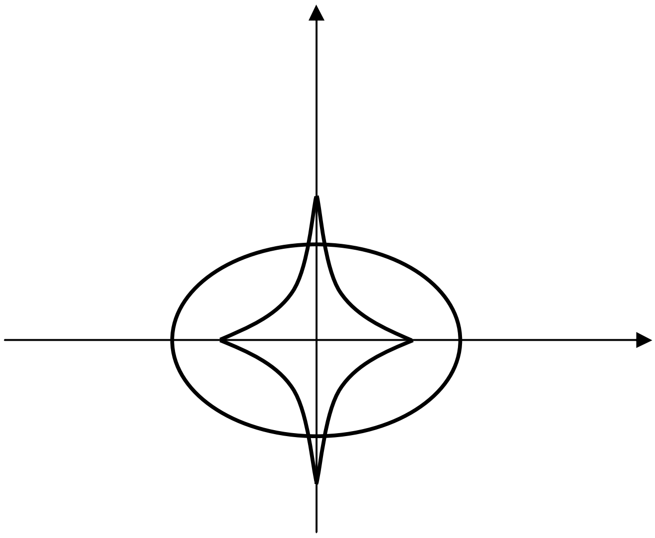


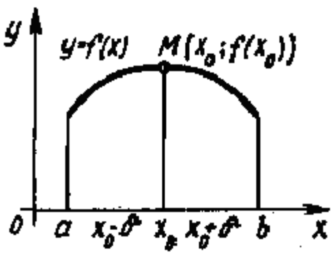
x y 0 -3 -2 1 2 $W(1;2)$ $N(-3;-2)$



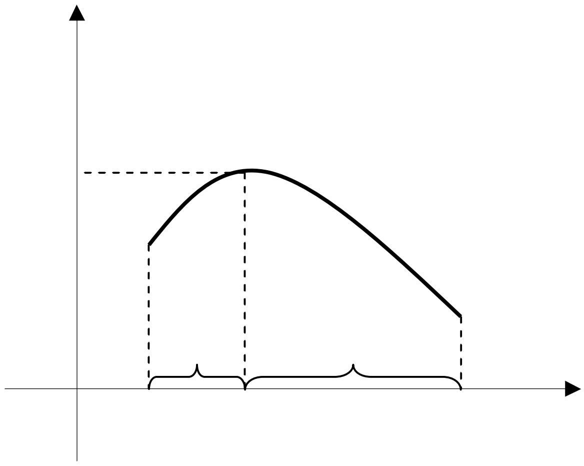


x 0 y $\vec{r}(t)$ $\vec{r}\,'(t)$ $\vec{n}$ $\vec{\tau}$ $N(\xi;\eta)$ $M(x;y)$ Γ





a b $-a$ $-b$ 0 x y



$0\ x\ y\ \ f\left(x_0\right) x_0\ \ x_0-\delta\ \ x_0+\delta\ \ M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)\ \ y=f\left(x\right)\quad a\ b$