Практическое занятие 9 **Векторные функции**

9.1 Годограф векторной функции
9.2 Производная и дифференциал векторной функции
9.3 Длина кривой
9.4 Натуральное уравнение гладкой кривой и уравнение нормальной плоскости

9.1 Годограф векторной функции

Векторной функцией действительного аргумента (*вектор-функцией скалярного аргумента*) называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in T \subset \mathbf{R}$ ставит в соответствие один и только один вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$. *Обозначается*: $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $t \in T$.

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определенную длину (модуль) и определенное направление в каждой точке t.

Выберем общую точку приложения O векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$. При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию Γ. Линия Γ, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении аргумента $t \in T \subset \mathbf{R}$, называется *годографом* вектор-функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$ (рисунок 9.1).

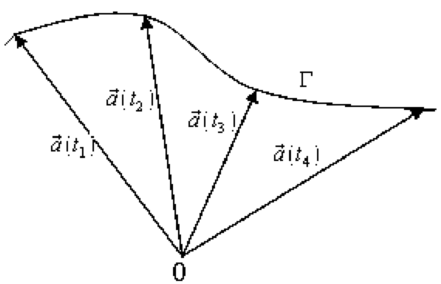

Рисунок 9.1 – Годограф вектор-функции

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а всякую линию Γ, в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

З а м е ч а н и я . *1* Если вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ изменяется только по длине, а его направление остается постоянным, то $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ есть множество связанных векторов, расположенных на луче, выходящем из точки O. Годографом такой вектор-функции является луч Γ (рисунок 9.2), если $T = \mathbf{R}$.

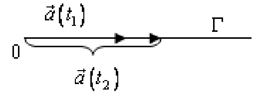

Рисунок 9.2 – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по длине

2 Если при изменении t модули векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$ не меняются, а изменяется только направление, то векторы из множества $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ будут находиться в шаре радиусом $|\vec{a}(t)|$ с центром в точке O. Годографом такой функции является линия, принадлежащая сфере радиусом $|\vec{a}(t)|$ (рисунок 9.3).

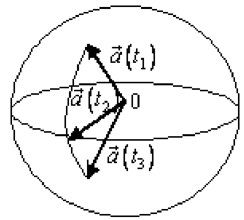

Рисунок 9.3. – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по направлению

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Тогда задание вектор-функции означает задание координат вектора $\vec{a}(t)$. Если начало вектора $\vec{a}(t)$ совпадает с точкой O, то $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется *радиусом-вектором* точки M и обозначается $\vec{r}(t)$ (рисунок 9.4).

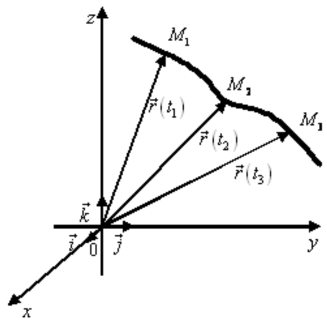

Рисунок 9.4 – Радиус-векторы

Любой радиус-вектор $\vec r(t)=\overrightarrow{OM}$ пространства $\mathbf{R}^3$ задается своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (координаты вектора совпадают с координатами точки $M\in\Gamma$ (рисунок 9.4)) и может быть разложен по ортам $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$:

$$\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k .$$

Так как каждой упорядоченной тройке чисел x, y, z соответствует единственный радиус-вектор $\vec r=\vec r(t)$, то задание вектор - функции эквивалентно заданию трех числовых функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$:

$$\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$$

где $t\in T$.

Поэтому исследование векторной функции скалярного аргумента сводится к исследованию трех координатных функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, определенных на множестве T. В координатной форме вектор-функция запишется в виде $\vec r(t)=(x(t);y(t);z(t))$.

Вектор $\vec a$ называется *пределом* вектор-функции $\vec r(t)$, $t\in T$, в точке $t=t_0$ (или $t\to t_0$), если $\lim\limits_{t\to t_0}|\vec r(t)-a|=0$.

Обозначается: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a$.

Выражение $|\vec r(t)-a|$ задает числовую функцию. Следовательно, понятие предела вектор-функции сводится к понятию предела скалярной функции. Поэтому можно записать:

$$\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\;\exists\delta>0:\;\;\forall t\in U(t_0;\delta)\Rightarrow |\vec r(t)-\vec a|<\varepsilon .$$

Геометрический смысл предела вектор-функции: если начало всех векторов $\{\,\vec r(t)\mid t\in T\}$ поместить в одну точку, то условие $|\vec r(t)-\vec a|<\varepsilon$ означает, что концы всех векторов $\vec r(t)$ при $t\in U(t_0;\delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\vec a$.

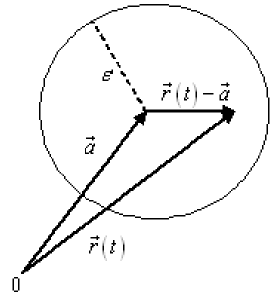

Рисунок 9.5 – Геометрический смысл предела вектор-функции

Т е о р е м а 1 Пусть $\vec r(t)=(x(t);y(t);z(t))$ и $\vec a=(a_1;a_2;a_3)$. Для того, чтобы $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a$, необходимо достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\;\lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\;\lim_{t\to t_0}z(t)=a_3.$$

Отсюда следует равенство:

$$\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\lim_{t\to t_0}x(t)\vec i+\lim_{t\to t_0}y(t)\vec j+\lim_{t\to t_0}z(t)\vec k=a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k .$$

Таким образом, для того чтобы вычислить предел вектор-функции, достаточно найти соответствующие пределы координат этой функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec r(t)$ не существует, то не существует и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)$.

Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t \in T$, называется *непрерывной* в точке $t = t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Очевидно, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

9.2 Производная и дифференциал векторной функции

Введем понятие производной вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$ в данной точке t_0. Для этого дадим аргументу t_0 приращение $\Delta t \neq 0$ и рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Если существует предел отношения приращения $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 к приращению скалярного аргумента Δt при $\Delta t \to 0$, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Обозначается: $\vec{r}\,'(t_0)$

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как

$$\Delta\vec{r}(t_0) = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]\vec{i} + [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]\vec{j} + [z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)]\vec{k} =$$

$$= \Delta x(t_0)\vec{i} + \Delta y(t_0)\vec{j} + \Delta z(t_0)\vec{k},$$

то по определению получим

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Итак, вычисление производных от векторной функции скалярного аргумента в точке t_0 сводится к вычислению производных ее координат.

Дифференцируемые векторные функции обладают следующими свойствами:

– если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке;

– если векторная функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{a}$;

– векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке;

– если $t = t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функция, $\vec{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0 = t(\tau_0)$ векторная функция, то

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau};$$

– для произвольных векторных функций имеют место формулы;

$$(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \pm \vec{r}_2\,',$$

$$(f \cdot \vec{r})' = f\,' \cdot \vec{r} + f \cdot \vec{r}\,',$$

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\,',$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2\,'.$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $\vec{r}(t)$ имеют одинаковую длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\vec{r}\,'(t_0)$ ортогональна вектору $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}\,'(t_0) \cdot r(t_0) = 0;$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \le |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot (b - a).$$

С *геометрической* точки зрения производная вектор-функции в точке t_0 есть вектор $\vec{r}\,'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Механический смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.

Производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно дифференцировать.

Производная функции $\vec{r}'(t)$ точке $t = t_0$ называется *второй производной* вектор-функции $r(t)$ по скалярному аргументу t в точке t_0 и обозначается так: $\vec{r}''(t_0)$, $\dfrac{d^2\vec{r}(t_0)}{dt^2}$, $\left.\dfrac{d\vec{r}'(t_0)}{dt}\right|_{t=t_0}$, $\ddot{r}(t_0)$.

Вектор $\vec{a}(t_0)$, равный производной скорости $\vec{v}(t)$ по времени t в момент t_0, называется *ускорением*: $\vec{r}''(t_0) = \dfrac{d\vec{v}(t_0)}{dt} = \vec{a}(t_0)$.

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

9.3 Длина кривой

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. И пусть на отрезке $[a;b] \subset \mathbf{R}$ заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в $\mathbf{R}^3$.

Числа $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно рассматривать как координаты точки $M = M(t)$ или как координаты радиус-вектора $\vec{r}(t)$ с началом в точке O и концом в точке M (рисунок 9.6):

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)),\ t \in [a;b] \subset \mathbf{R}.$$

Непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в пространство $\mathbf{R}^3$ называется *кривой* и обозначается $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, a \le t \le b \right\}$.

Множество точек пространства $\mathbf{R}^3$, на которое отображается отрезок $[a;b]$, называется *носителем* кривой Γ, переменная t называется *параметром* на кривой Γ.

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*.

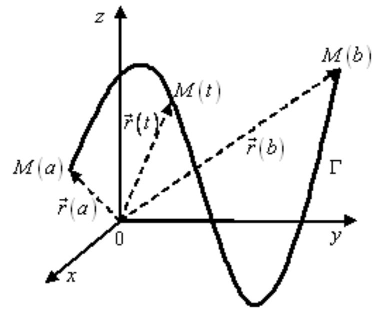

Рисунок 9.6 – Кривая Γ в пространстве $\mathbf{R}^3$

Кривая может быть задана:

– *явно*: непрерывная функция $y = f(x)$, $a \le x \le b$, задает плоскую кривую $\Gamma = \{ y = f(x) | \ a \le x \le b \}$, носителем является график функции $f(x)$, параметром – переменная x;

– *неявно*: координаты всех точек носителя плоской кривой Γ удовлетворяют уравнению $F(x;y) = 0$;

– *в координатной форме*: $\Gamma = \{ x(t); y(t); z(t) | \ a \le t \le b \}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатные функции отображения $M(t)$, $t \in [a;b] \subset \mathbf{R}$;

– *векторное представление*: $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) \,\middle|\, a \le t \le b \right\}$, где $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ – вектор-функция.

Если для точек кривой $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, a \le t \le b \right\}$ выполняется условие $\forall t_1 < t_2 \quad M(t_1)$ предшествует $M(t_2)$, то такая кривая называется *ориентированной*.

Точка носителя кривой, в которую при отображении $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, a \le t \le b \right\}$ отображаются хотя бы две разные точки отрезка $[a;b]$, называется *точкой самопересечения* (*кратной точкой*) кривой Γ.

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек (отображение $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, a \le t \le b \right\}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a;b]$ в точки пространства $\mathbf{R}^3$), то кривая называется *простой дугой*.

Если $M_0 = M(a)$ и $M_1 = M(b)$, то точка $(M_0;a)$ называется *началом* кривой Γ, а точка $(M_1;b)$ – *концом* данной кривой. Если $M(a) = M(b)$, то кривая Γ называется *замкнутой*.

Простым замкнутым контуром называется замкнутая кривая, у носителя которой нет кратных точек, кроме носителя ее начала и конца.

Если $t_1, t_2 \in [a;b]$, $t_1 < t_2$, то кривая $\Gamma = \{M(t) | \ t_1 \le t \le t_2\}$ называется *частью кривой* Γ или *простой дугой* $\overset{\frown}{M(t_1)M(t_2)}$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в точке $M(t_2)$.

Прямая проходящая через точку M_0 в направлении вектора $\vec{r}\,'(t_0)$, называется *касательной* к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

Поместим начало вектора $\vec{r}\,'(t_0)$ в точку $M(t_0)$. Направление данного вектора совпадает с направлением касательной. Поэтому уравнение касательной в векторной форме запишется в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\cdot\lambda, \ \lambda \in \mathbf{R},$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор касательной.

В координатной форме уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\cdot\lambda$ примет вид

$$x = x(t_0) + \lambda\cdot x'(t_0),$$
$$y = y(t_0) + \lambda\cdot y'(t_0),$$
$$z = z(t_0) + \lambda\cdot z'(t_0),$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$.

Выражая параметр λ, получим уравнение касательной в канонической форме:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Если функция $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется *непрерывно дифференцируемой* кривой. Если век-

торная функция $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется *n раз дифференцируемой* кривой.

Точка кривой Γ, в которой $\vec{r}\,'(t_0) \ne 0$, называется *неособой*, а точка, в которой $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ – *особой*.

Пусть $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t))$. Поэтому точка M_0 является неособой точкой кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0.$$

Из определения неособой точки следует, что во всякой неособой точке кривой Г существует касательная.

Гладкой кривой называется кривая, которая является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек. Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такая кривая называется *кусочно-гладкой*.

Для отрезка $[a;b]$ система $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,...,n$, точек t_k, таких, что $a = t_0 < t_1 < ...t_{n-1} < t_n = b$, называется *разбиением* отрезка $[a;b]$. Соответствующий набор точек $M_k = M(t_k)$, $k = 0,1,...,n$, где $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_k)$ называется *разбиением* кривой Γ.

Соединив последовательно точки M_0, M_1, ..., M_n, отрезками M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ получим ломаную P_n, которая называется *вписанной* в кривую Γ; отрезки $M_{k-1}M_k$, $k = 0,1,...,n$ называются *звеньями* ломаной P_n, а точки ломаной $M_k = M(t_k)$ – *вершинами* ломаной. Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$. Тогда длина всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|.$$

Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется *длиной* кривой:

$$L_\Gamma = \sup_{\tau_n} \sigma_n,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,...,n$, отрезка $[a;b]$.

Если $0 \le L_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой*.

Теорема 2 Если кривая $\Gamma = \{ x(t); y(t); z(t) |\ a \le t \le b \}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $l = l(t)$*, отсчитываемая от начала кривой* Γ*, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{dl}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} .$$

Поскольку $l'(t) = \dfrac{dl}{dt}$, то отсюда *дифференциал длины дуги* равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt .$$

9.4 Натуральное уравнение гладкой кривой и уравнение нормальной плоскости

Пусть кривая $\Gamma = \{ \vec{r}(t) |\ a \le t \le b \}$ гладкая кривая. В силу теоремы 2 переменная длина дуги $l = l(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a;b]$: $l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$. Так как $l(a) = 0$ и $l(b) = L_\Gamma$, то обратная функция $t = t(l)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; L_\Gamma]$. По теореме об обратной функции имеем

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0 .$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой Γ ее параметр t является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины l, производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра и уравнение кривой Γ можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(t(l))$, $l \in [0; L_\Gamma]$.

Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги l, то l называется *натуральным параметром*, а уравнение кривой $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(l) |\ 0 \le l \le L_\Gamma\}$ называется *натуральным уравнением* кривой.

Теорема 3 Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) |\ a \le t \le b\}$ *гладкая, а* $l = l(t)$ *– переменная длина ее дуги. Тогда* $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ *является единичным касательным к кривой* Γ *вектором и* $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1$.

Из теоремы 3 следует, что если α, β, γ – углы, образованные вектором касательной $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ к кривой Γ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то $\dfrac{d\vec{r}}{dl} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Нормальной плоскостью к кривой Γ называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка касания (рисунок 9.7). Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{r}\,'(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ коллинеарные, поэтому можно положить $A = x'(t_0)$, $B = y'(t_0)$, $C = z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(z - z_0) = 0 .$$

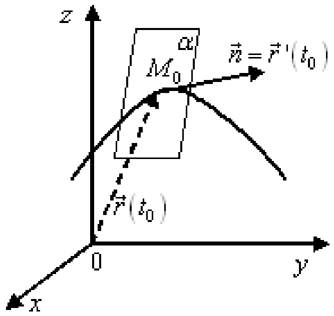

Рисунок 9.7 – Нормальная плоскость α к кривой Γ

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение векторной функции и годографа.

2 Дайте определение предела и непрерывности векторной функции. Перечислите свойства предела вектор-функции.

3 Дайте определение производной векторной функции. Какая вектор-функция называется дифференцируемой? Что называется дифференциалом векторной функции?

4 В чем состоит геометрический и физический смысл производной вектор-функции?

5 Дайте определение кривой. Перечислите способы задания кривой.

6 Какая прямая называется касательной к кривой?

7 Какая кривая называется гладкой кривой?

8 Что называется разбиением кривой?

9 Какая кривая называется спрямляемой? Дайте определение длины кривой.

10 Чему равен дифференциал дуги?

11 Какое уравнение называется натуральным уравнением гладкой кривой?

12 Чему равна длина единичного вектора касательной? Какие координаты он имеет?

Решение типовых примеров

1 Найти годограф вектор-функции
$$\vec{r}(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i}+\frac{2t}{1+t^2}\vec{j}+\vec{k}.$$

Решение. Параметрические уравнения годографа есть
$$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y(t)=\frac{2t}{1+t^2},\ z(t)=1.$$

Из первых двух уравнений исключаем параметр t:
$$x^2+y^2=\frac{\left(1-t^2\right)^2+4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1.$$

Следовательно, годографом вектор-функции является окружность
$$x^2+y^2=1,\ z=1,$$
из которой исключена точка $(-1;0;1)$.

При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(x;y;z)$ на годографе движется от точки $(-1;0;1)$ против часовой стрелки (если наблюдать из точки, расположенной выше плоскости $z=1$). При этом
$$\lim_{t\to\pm\infty}x(t)=-1,\ \lim_{t\to\pm\infty}y(t)=0.$$

2 Вычислить $\lim\limits_{t\to 2}\vec{r}(t)$, если $\vec{r}(t)=(3t+2)\vec{i}+(2t-1)\vec{j}+(1-t)\vec{k}$.

Решение. Согласно определению
$$\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)=\lim_{t\to 2}(3t+2)\vec{i}+\lim_{t\to 2}(2t-1)\vec{j}+\lim_{t\to 2}(1-t)\vec{k}=8\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}.$$

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции
$$\vec{r}=e^{2t}\,\vec{i}-(t+8)^{\frac{4}{3}}\vec{j}$$
при $t=0$.

Решение. Параметрические уравнения годографа есть
$$x(t)=e^{2t},\ y(t)=-(t+8)^{\frac{4}{3}},\ z(t)=0.$$

Найдем координаты направляющего вектора касательной к кривой $\left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)$:

$$\left(x'(t); y'(t); z'(t)\right) = \left(2e^{2t}; -\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}}; 0\right),$$

в частности в точке $t=0$

$$\vec{\tau} = \left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)\Big|_{t=0} = \left(2e^{2t}; -\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}}; 0\right)\Bigg|_{t=0} = \left(2; -\frac{8}{3}; 0\right).$$

Тогда единичный вектор годографа имеет вид

$$\vec{\tau}^{\,0} = \frac{2}{10/3}\vec{i} - \frac{8/3}{10/3}\vec{j} + \frac{0}{10}\vec{k} = 0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}.$$

4 Найти производную скалярного произведения векторов

$$\vec{r}_1 = 3t\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \text{ и } \vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3t\vec{j} + \vec{k}.$$

Решение. Согласно свойствам дифференцируемых векторных функций, имеем

$$\frac{d(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{dt} = \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \vec{r}_2 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} =$$

$$= \left(3t\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}\right) + 2\vec{i} - 3t\vec{j} + \vec{k} \cdot 3\vec{i} = -6 + 6 = 0.$$

5 Дано уравнение движения $\vec{r} = 3t\vec{i} - 4t\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

Решение. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = 3t,\ y(t) = -4t,\ z(t) = 0.$$

Из первого уравнения исключим параметр t

$$t = \frac{x}{3}$$

и подставим во второе

$$y = -4\cdot\frac{x}{3}.$$

Отсюда уравнение траектории движения

$$4x + 3y = 0,\ z = 0.$$

Вектор скорости движения есть

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}.$$

6 Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой

$$\vec{r} = \left(t^2 - 1\right)\vec{i} + (t+1)\vec{j} + t^3\vec{k}$$

в точке $M_0(0;2;1)$.

Решение. Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$.

Имеем

$$x'(t) = 2t,\ y'(t) = 1,\ z'(t) = 3t^2.$$

Подставляя значение $t = 1$, получаем

$$x'(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ z'(1) = 3.$$

Тогда уравнение касательной:

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3},$$

уравнение нормальной плоскости:

$$2(x-0) + 1(y-2) + 3(z-1) = 0$$

или $2x + y + 3z - 5 = 0$.

7 Найти скорость и ускорение материальной точки M, движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Решение. Пусть M – произвольная точка окружности. Обозначим через φ угол между радиус-вектором точки M и положительным направлением оси Ox. По условию

$$\varphi = \omega t,$$

где t – время движения.

Выразим координаты точки M как функции времени (рисунок 9.8):

$$x = R\cos\varphi = R\cos\omega t,$$

$$y = R\sin\varphi = R\sin\omega t.$$

Следовательно, радиус-вектор точки M

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j},$$

скорость $\vec{v}(t)$ движения точки M

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = \left(R\cos\omega t\right)'\vec{i} + \left(R\sin\omega t\right)'\vec{j} = -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

,

модуль скорости

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(-R\omega \sin \omega t\right)^2 + \left(R\omega \cos \omega t\right)^2} = \omega R .$$

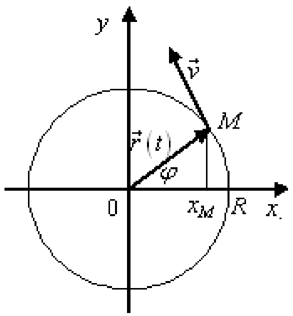

Рисунок 9.8 – Геометрическая интерпретация задачи 7.

Скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{r}$ есть:

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = -R^2 \cos \omega t \cdot \sin \omega t + R^2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t = 0 ,$$

т. е. векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны.

Отсюда следует, что вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка M .

Найдем ускорение $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a} = \vec{r}''(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t\, \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t\, \vec{j} =$$

$$= -\omega^2 \left(R \cos \omega t\, \vec{i} + R \sin \omega t\, \vec{j}\right) = -\omega^2\, \vec{r}(t).$$

Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{r}$ имеют противоположные направления.

Таким образом, ускорение материальной точки, движущейся с постоянной угловой скоростью по окружности, в каждый момент времени направлено к центру этой окружности.

8 К годографу винтовой линии (рисунок 9.9)

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t; y = a \sin t; z = bt \,\middle|\, 0 \le t \le T \right\}$$

а) найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) доказать, что касательная к винтовой линии образует постоянный угол с осью Oz ;

в) записать натуральное уравнение винтовой линии;

г) найти дифференциал длины дуги.

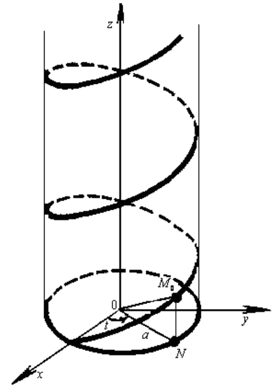

Рисунок 9.9 – Годограф функции

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t; y = a \sin t; z = bt \,\middle|\, 0 \le t \le T \right\}$$

Решение. а) координаты точки касания $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ есть:

$$x_0 = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2},\ y_0 = a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ z_0 = b\frac{\pi}{3}.$$

Координаты вектора $\vec{r}'(t_0)$:

$$x'(t_0) = -a \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{a\sqrt{3}}{2},\ y'(t_0) = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}.\ z'(t_0) = b.$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x - \dfrac{a}{2}}{-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \frac{z - \dfrac{b\pi}{3}}{b},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - b\left(z - \frac{b\pi}{3}\right) = 0;$$

б) вектор касательный к годографу вектора $\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\sin t; a\cos t; b).$$

Тогда

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

в) векторная функция $\vec{r}(t) = (a\cos t; a\sin t; bt)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} > 0.$$

Тогда $l'(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$. Интегрируя обе части, получим $s(t) = t\sqrt{a^2+b^2} + C$. Из начального условия $l(0)=0$, имеем $C=0$. При этом длина винтовой линии равна

$$L_\Gamma = T\sqrt{a^2+b^2} \quad .$$

Следовательно, $t = \dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отсюда натуральное уравнение винтовой линии в координатной форме запишется в виде:

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; y = a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; z = b\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\},$$

где $0 \le l \le T\sqrt{a^2+b^2}$.

г) дифференциал длины дуги равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Для винтовой линии имеем

$$dl = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти годографы вектор функций:

а) $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} + 4t\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

б) $\vec{r} = \sqrt{1-t^2}\,\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\,\vec{j}$, $t \in [0;1]$;

в) $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} + 4t\vec{k}$;

г) $\vec{r} = 4\operatorname{ch} t\,\vec{i} - \vec{j} + 3\operatorname{sh} t\,\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

2 Дано уравнение движения $\vec{r} = 3t\vec{i} + (4t-t^2)\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$.

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (t^2+1)\vec{j} - (t^3+2)\vec{k}$$

при $t=0$.

4 Показать, что векторы

$$\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k} \text{ и } \vec{r}\,'$$

перпендикулярны.

5 Для следующих кривых написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

а) $x = 4\sin^2 t$, $y = 4\sin t\cos t$, $z = 2\cos^2 t$, $t = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $x = \dfrac{e^t\sin t}{\sqrt{2}}$, $y=1$, $z = \dfrac{e^t\cos t}{\sqrt{2}}$, $t=0$.

6 Найти дифференциал длины дуги кривой

$x = a\cos^2 t$, $y = \sqrt{a^2+b^2}\sin t\cos t$, $z = b\sin^2 t$.

Задания для домашней работы

1 Найти годографы вектор функций:

а) $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

б) $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

в) $\vec{r} = 3t\vec{i} + (2t-t^2)\vec{j}$; $t \in \mathbf{R}$;

г) $\vec{r} = (\operatorname{sh} t - 1)\vec{i} + \operatorname{ch}^2 t\,\vec{j} + 3\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

2 Дано уравнение движения $\vec{r}=2(t-\sin t)\vec{i}+2(1-\cos t)\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$.

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r}=(t^3+t)\vec{i}+t^2\vec{j}$$

при $t=-1$.

4 Для следующих кривых написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

а) $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$, $t=2$;

б) $x=a\operatorname{ch}t$, $y=a\operatorname{sh}t$, $z=at$, $t=0$;

в) $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\sin t-\cos t)$, $z=e^t$, $t=0$.

5 Показать, что кривые

$$\vec{r}_1=(t+1)\vec{i}+t^2\vec{j}+(2t-1)\vec{k} \text{ и } \vec{r}_2=2t^2\vec{i}+(3t-2)\vec{j}+t^2\vec{k}$$

пересекаются и определить угол между кривыми в точке их пересечения.

6 На кривой

$$\vec{r}=(t+1)\vec{i}+(t^2-1)\vec{j}+t^3\vec{k}$$

найти точку, касательная к которой параллельна плоскости

$$x+2y+z-1=0.$$

Практическое занятие 10 **Кривизна кривой**

10.1 Понятие кривизны кривой

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – *кривизна*.

Например, о двух плоских кривых $ACB\subset\Gamma_1$ и $ADB\subset\Gamma_2$ (рисунок 10.1) можно сказать, что кривая Γ_2 более изогнута, чем Γ_1.

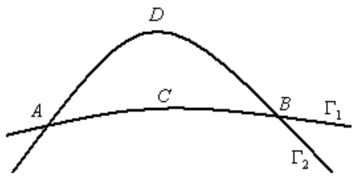

Рисунок 10.1 – Кривые Γ_1 и Γ_2

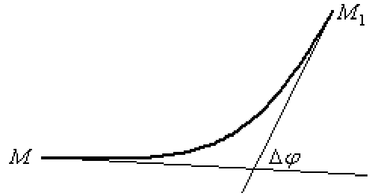

Рисунок 10.2 – Угол смежности

Однако для того, чтобы строго оценить степень изогнутости плоской линии, необходимо ввести количественную характеристику ее изогнутости (кривизны).

Рассмотрим на кривой точки M и M_1. Проведем в этих точках касательные к кривой. При переходе по кривой из точки M в точку M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется *углом смежности* (рисунок 10.2).

Отношение угла смежности дуги к ее длине называется *средней кривизной дуги:* $K_{\text{ср}}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой на всей дуге. На отдельных участках кривой кривизна может значительно отличаться от средней. Чтобы избежать такой неопределенности, вводится количественная мера изогнутости кривой в точке M. Эта характеристика основана на том, что чем меньше дуга Γ (рисунок 10.2), тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость линии вблизи точки M.

Кривизной K линии Γ в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1 линии Γ при стремлении точки M_1 к точке M:

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ср}} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|.$$

10.2 Вычисление кривизны кривой

Пусть кривая Γ является годографом дважды дифференцируемой *векторной функции* действительного аргумента $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) \middle| \ a \le t \le b \right\}$ (рисунок 10.3).

Тогда кривизна кривой Γ вычисляется по формуле

$$K = \frac{\left|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right|}{\left|\vec{r}\,'^3\right|}.$$

Если гладкая кривая Γ задана *параметрическими уравнениями*

$$\Gamma = \left\{ x(t); y(t); z(t) \middle| \ a \le t \le b \right\},$$

то кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{\sqrt{\left(y'z'' - y''z'\right)^2 + \left(z'x'' - z''x'\right)^2 + \left(x'y'' - x''y'\right)^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая Γ задана в *плоскости Oxy* уравнением $y = f(x)$, то формула для вычисления ее кривизны получается из формулы вычисления кривизны, положив в ней $t = x$, $z = 0$. Тогда уравнение линии Γ можно записать в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x), \\ t &= x. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\left|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right| = \sqrt{0 + 0 + \left(1 \cdot y'' - 0\right)^2} = \left|y''\right| \text{ и } \left|\vec{r}\,'\right| = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Значит,

$$K = \frac{\left|y''\right|}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy *неявно* уравнением $F(x; y) = 0$, то кривизна вычисляется по формуле

$$K = \left| \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F_x'^2 + F_y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то кривизна находится по формуле

$$K = \frac{\left|r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''\right|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

10.3 Радиус, круг и координаты центра кривизны плоской кривой

Проведем к кривой Γ нормаль в точке $M(x; y)$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN = R$ (рисунок 10.3), по величине обратный кривизне K: $R = \dfrac{1}{K}$.

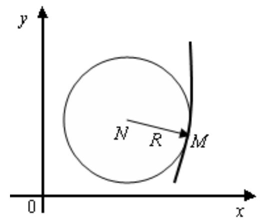

Рисунок 10.3 – Радиус кривизны *MN*

Отрезок MN называется *радиусом кривизны*, точка N – *центром кривизны*, а круг с центром в точке N и радиусом R – *кругом кривизны кривой* в точке $M(x; y)$.

Если кривая Γ задана *в декартовой системе* координат Oxy уравнением $y = f(x)$, то ее радиус кривизны находится по формуле:

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

Если кривая Γ в плоскости Oxy задана *параметрическими уравнениями*, то ее радиус кривизны определяется по формуле:

$$R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x' - y'x''\right|}.$$

Если Γ – годограф вектор-функции $r = r(t)$, то:

$$R = \frac{|\vec{r}\,'|^3}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}.$$

10.4 Эволюта и эвольвента плоской кривой

Из определения центра кривизны следует, что каждой точке M кривой Γ, соответствует точка N – центр кривизны кривой Γ' в точке M.

Множество точек Γ' центров кривизны линии Γ называется ее *эволютой*, а сама линия Γ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой.*

Пусть кривая Γ задана уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}$ в плоскости Oxy. Пусть $N(\xi;\eta)$ – центр кривизны линии Γ в точке M (рисунок 10.4).

Тогда для любой точки $M(x; y) \in \Gamma$ имеем $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$. Обозначим

$$\overrightarrow{ON} = \vec{r}_1, \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{r}, \qquad \overrightarrow{MN} = R\cdot\vec{n}^{\,0},$$

где $\vec{n}^{\,0}$ – единичный вектор нормали кривой Γ.

Тогда

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + R\vec{n}^{\,0}.$$

Это уравнение называется *векторным уравнением эволюты кривой* Γ.

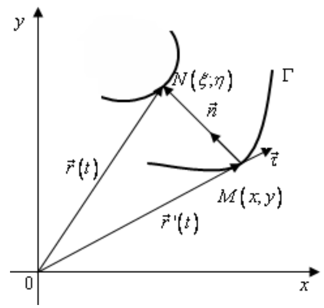

Рисунок 10.4 – Эволюта и эвольвента

Запишем разложения векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ по базису $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$r_1 = \xi\cdot\vec{i} + \eta\cdot\vec{j},$$
$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}.$$

Найдем вектор $\vec{n}^{\,0}$.

Единичный вектор касательной к кривой Γ есть

$$\vec{\tau}^{\,0} = \frac{r'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \frac{x'\vec{i} + y'\cdot\vec{j}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\vec{j}.$$

Продифференцируем равенство $\vec{\tau}^{\,0^2} = 1$ по t. Имеем

$$2\vec{\tau}^{\,0} = \frac{d\vec{\tau}^{\,0}}{dt} = 0.$$

Отсюда $\dfrac{d\vec{\tau}^{\,0}}{dt} \perp \vec{\tau}^{\,0}$. Таким образом, вектор нормали $\vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}^{\,0}}{dt}$.

Координаты вектора $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}^{\,0}}{dt} = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)'\vec{i} + \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)'\vec{j} =$$

$$=-y'\frac{x'y''+y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{i}+x'\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{j}\ .$$

Тогда

$$\vec{n}^0=\mp\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{i}\pm\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{j}\ .$$

Подставим $\vec{n}^0$ и $R=\dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x'-y'x''\right|}$ в векторное уравнение эволюты $\vec{r}_1(t)=\vec{r}(t)+R\cdot\vec{n}^0$:

$$\xi\cdot\vec{i}+\eta\cdot\vec{j}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}\vec{i}+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\vec{j}\ .$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях выражения, получим:

$$\xi=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''},$$

$$\eta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}.$$

Данные формулы являются параметрическими уравнениями эволюты Γ' кривой $\Gamma=\left\{x(t);y(t);z=0\right|\ 0\le t\le T\}$. Сама же кривая Γ является эвольвентой по отношению к кривой Γ'.

Свойства эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними:

– нормаль к эвольвенте Γ является касательной к эволюте в соответствующей точке;

– если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение кривизны и радиуса кривизны кривой.

2 Как вычисляется кривизна в случаях векторного, параметрического представления кривой?

3 Дайте определение радиуса, круга и центра кривизны плоской кривой.

4 Что называется эволютой и эвольвентой плоской кривой?

Решение типовых примеров

1 Вычислить кривизну кривой $y=\ln x$ в точке $x_0=1$.

Решение. Находим $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$. Тогда кривизна кривой $y=\ln x$ в любой ее точке M с абсциссой x есть

$$K=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\frac{|x|}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\ .$$

В точке $x_0=1$ имеем

$$K\Big|_{x_0=1}=\frac{1}{2^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ .$$

2 Найти кривизну в любой точке циклоиды

$$\Gamma=\left\{x=a(t-\sin t); y=a(1-\cos t); 0\le t\le 2\pi\right\}$$

Решение. Имеем

$$x'=a(1-\cos t),\ x''=a\sin t\ ,$$

$$y'=a\sin t,\ y''=a\cos t\ .$$

Тогда

$$x'y''-y'x''=a^2\left(\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t\right)=-a^2(1-\cos t),$$

$$x'^2+y'^2=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=2a^2(1-\cos t).$$

Подставляя в формулу для вычисления кривизны, получим

$$K=\frac{\left|x'y''-x''y'\right|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-a^2(1-\cos t)\right|}{\left(2a^2(1-\cos t)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}}\ .$$

3 Найти координаты центра кривизны кривой $x^3 + y^4 = 2$ в точке $M(1;1)$.

Решение. Дифференцируем уравнение два раза:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 0,\ 6x + 12y^2 \cdot y'^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0.$$

Так как $x = 1$, $y = 1$, то из первого выражения находим, что $y' = \frac{-3}{4}$, а из второго получаем $y'' = -\frac{51}{16}$.

Подставляя в формулы для координат центра кривизны, получим

$$\xi = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''} = 1 - \frac{\left(1 + \frac{9}{16}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{51}{16}} = \frac{43}{68},$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{1 + \frac{9}{16}}{-\frac{51}{16}} = \frac{26}{51}, \text{ т. е. } C\left(\frac{43}{68}; \frac{26}{51}\right).$$

4 Найти эволюту эллипса $\Gamma = \{x = a\cos t; y = b\sin t; 0 \le t \le 2\pi\}$.

Решение. Имеем

$$x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t,\ x'' = -a\cos t,\ y'' = -b\sin t.$$

Подставляя в формулы для эволюты, получим

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a}\cos^3 t,\ \eta = \frac{b^2 + a^2}{b}\sin^3 t.$$

Данные уравнения являются параметрическими уравнениями астроиды (рисунок 10.6).

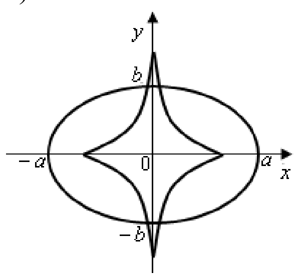

Рисунок 10.6 – Эллипс и его эволюта

5 Составить уравнение эволюты параболы

$$y^2 = x + \frac{1}{2}.$$

Решение. Продифференцируем два раза уравнение параболы:

$$2yy' = 1,\ y' = \frac{1}{2y},$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 0,\ y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Определяем координаты центра кривизны:

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2,$$

$$\eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y + \frac{1 + \frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме:

$$\xi = 3y^2,\ \eta = -4y^3.$$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в явном виде

$$\eta^2 = \frac{16}{27}\xi^3.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

а) $y = x^2$, $M_0(0;0)$, $M_1(1;1)$;

б) $x^2 - xy + y^2 = 1$, $M(1;1)$;

в) $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$ при $t = 1$;

г) $r = a(1-\cos\varphi)$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2 Найти радиусы кривизны кривых:

а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$;

г) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

3 Вычислить координаты центров кривизны кривых в указанных точках:

а) $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $M(0;a)$;

б) $y = xe^x$, $M\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

4 Составить уравнения эволют кривых:

а) $y = x^3$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\cos t - \sin t$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

а) $y = -x^3$, $M(1;-1)$;

б) $x^2 + 9y^2 = 9$ в вершинах эллипса $A(3;0)$ и $B(0;1)$;

в) $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$;

г) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

2 Найти радиусы кривизны кривых:

а) $y = \sqrt[3]{x}$;

б) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

в) $r = a\varphi$.

3 Вычислить координаты центров кривизны кривых в указанных точках:

а) $y = e^{-x^2}$, $M(0;1)$;

б) $y = \sin x$, $M\left(\frac{\pi}{2};1\right)$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $M(1;1)$.

4 Составить уравнения эволют кривых:

а) $x^2 - y^2 = a^2$;

б) $x = 2t$, $y = t^2 - 2$.