Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx = \pi i e^{-6}$.

Отделяя слева и справа действительные и мнимые части, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx = \pi\, e^{-6}.$$

6 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Имеем:

$$z = e^{ix};\ dx = \frac{dz}{iz}:\ \cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Найдем особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+1}$:

$$z^2+4z+1=0;$$

$$z_1 = -2+\sqrt{3};\ z_2 = -2-\sqrt{3}$$

Точка z_1 лежит в круге $|z|<1$, а точка z_2 – вне круга. Тогда получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{i}2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+4z+1} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to\sqrt{3}-2} \frac{\left(z-\sqrt{3}+2\right)}{\left(z-\sqrt{3}+2\right)\left(z+\sqrt{3}+2\right)} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to\sqrt{3}-2} \frac{1}{z+\sqrt{3}+2} = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

7 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$.

Решение. а) имеем $z_0 = -1$; $|z_0| = 1$; $\arg z_0 = \pi$.

Тогда

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki = i\pi + 2\pi ki = i\pi(1+2k),\ k \in \mathbb{C};$$

б) по свойствам обратных тригонометрических функций имеем

$$\operatorname{Arctg}(1-i) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{2+i}{-i} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(2i-1).$$

Для числа $2i-1$ модуль и главное значение аргумента есть

$$|2i-1| = \sqrt{5},$$

$$\arg(2i-1) = \pi - \operatorname{arctg} 2.$$

Найдем

$$\operatorname{Ln}(2i-1) = \ln\sqrt{5} + i(\pi - \operatorname{arctg} 2) + 2k\pi i =$$

$$= \ln\sqrt{5} - i\operatorname{arctg} 2 + (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\operatorname{Arctg}(1-i) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{i}{2}\ln\sqrt{5} + \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{C}.$$

6 Найти область однолистности функции $w = z^2$.

Решение. Возьмем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ две различные точки z_1 и z_2, заданные в показательной форме:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Из условия однолистности

$$r_1^2 e^{2i\varphi_1} = r_2^2 e^{2i\varphi_2}$$

находим $r_1 = r_2$, $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{C}$.

Очевидно, при $k=0$ получим $\varphi_2 = \varphi_1$, т. е. $z_1 = z_2$.

Так как $z_1 \ne z_2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi k$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Таким образом, область однолистности функции $w = z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на π.

7 Вычислить предел $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z}{\operatorname{ch} iz} = \square\operatorname{ch} iz = \cos z\square = \lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z}{\cos z} = \lim_{z\to 0}\cos z = 1.$$

Тема 2 Аналитические функции. Условия Коши-Римана

1 Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

а) $w = z^2 \cdot \overline{z}$; в) $w = e^{z^2}$;

б) $w = |z| \cdot \overline{z}$; г) $w = |z-1|^2$.

2 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $w = \operatorname{sh} z$; б) $w = \ln z^2$.

3 Найти области аналитичности функций:

а) $w = \operatorname{tg} z$; г) $w = \dfrac{z \cos z}{1+z^2}$;

б) $w = z e^{-z}$; д) $w = \operatorname{cth} z$;

в) $w = \sin z + \overline{z}$; е) $w = z \ln z$.

4 Проверить гармоничность функций:

а) $u = x^2 + 2x - y^2$; в) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; д) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

б) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; г $v = 2e^x \sin y$.

5 Восстановить аналитич по известной действительной $u(x;y)$ или

а) $u = x^2 - y^2 + 2x$ при усл

б) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$ при условии $f(0) = 0$;

в) $v = 2\cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$ при условии $f(0) = 2$.

г) $u(x,y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy$;

д) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

е) $v(x,y) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

6 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w = e^z$, $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$; $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

5 Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9}\,dx$.

Р е ш е н и е. Введем вспомогательную функцию $f(z) = \dfrac{ze^{i2z}}{z^2+9}$.

Видно, если $z = x$, то $f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x) = \dfrac{x \sin 2x}{x^2+9}$.

Рассмотрим контур C_R (рисунок 19). При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z) = \dfrac{z}{z^2+9}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| \le \dfrac{R}{R^2+9}$.

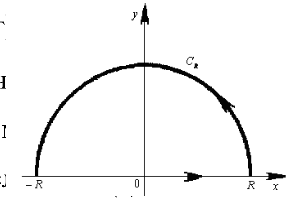

Рисунок 19 – Рисунок к типовому примеру 5

Следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R \to \infty$.

Значит, по лемме Жордана $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\,dz = 0$.

Так как точка $z = 3i$ является простым полюсом, то вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9} = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) = \frac{1}{2}e^{-6}.$$

Для любого $R > 3$ имеем:

$$\int_{-R}^{+R} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}\,dx + \int_{C_R} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2}e^{-6} = \pi i e^{-6}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}\left(z-3i\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{\left(z+3i\right)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{\left(z+3i\right)^3}=\frac{1}{12i}.$$

Тогда получим:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{12i}=\frac{\pi}{12}.$$

4 Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$ определена на всей действительной оси $-\infty<x<+\infty$. Аналитическое продолжение этой функции в верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} z\ge 0$) есть функция $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$, являющаяся аналитической в каждой точке верхней полуплоскости за исключением точки $z=i$ (полюса 3-го порядка). На действительной оси полюсов нет. При этом для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z|=R>R_0>1$, имеет место оценка:

$$\left|f(z)\right|=\left|\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}\right|<\frac{1}{|z|^6}.$$

Поэтому для исходного интеграла можно применить теорему 2:

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\left(z-i\right)^3}{\left(z^2+1\right)^3}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\left(z+i\right)^3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{\left(z+i\right)^5}=-\frac{3i}{16}.$$

Следовательно,

б) $w=z^2$, $z_1=2-i$; $z_2=1+i\frac{\pi}{2}$.

7 Найти области растяжения и сжатия при отображениях:

а) $w=e^z$; б) $w=\frac{1}{z}$.

8 Найти области конформности функций:

а) $w=2z$; б) $w=e^{-3z}$; в) $w=-iz^2$.

9 Найти образы окружности $x^2+y^2=2x$ при отображениях:

а) $w=z+1$; б) $w=\frac{1}{z}$; в) $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Примеры оформления решения

1 Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\overline{z}$.

Решение. Функция $f(z)=\overline{z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Она может быть представлена в виде

$$f(z)=x-iy.$$

Тогда при любом z имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Приращение Δz может стремиться к нулю по любому направлению. Выбирая для Δz два различных направления, получим два различных значения отношения:

– если $\Delta y=0$, $\Delta x\ne 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-0i}{\Delta x+0i}=1$;

– если $\Delta x=0$, $\Delta y\ne 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{0-i\Delta y}{0+i\Delta y}=-1$.

Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует.

Функция $f(z)=\overline{z}$ непрерывная на всей комплексной плоскости не имеет производной ни в одной точке плоскости.

2 Исследовать функцию $w=z^2$ на дифференцируемость и найти ее производную.

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$z^2=\left(x+iy\right)^2=\left(x^2-y^2\right)+2ixy.$$

Следовательно, $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$.

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x;y)$.

Значит, функция $w=z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Тогда

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy=2(x+iy)=2z.$$

3 Найти аналитическую функцию $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, если $v(x;y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ при условии $f(0)=0$.

Решение. Частные производные первого и второго порядков функции $v(x;y)$ равны:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=6x^2-6xy-6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6x+12y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x-12y.$$

Функция $v(x;y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как

$$\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Тогда существует функция $u(x;y)$, сопряженная к функции $v(x;y)$. Проинтегрируем 1-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ по переменной x:

$$u(x;y)=\int\left(6x^2-6xy-6y^2\right)dx,$$

$$u(x;y)=2x^3-3x^2y-6xy^2+C(y).$$

Найдем особые точки функции: $z^2+2z-3=0$, $z_1=1$, $z_2=-3$. Точка $z_2=-3$ лежит вне области, ограниченной контуром Γ, а $z_1=1$ находится внутри области. Определим характер точки $z_1=1$:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{(z-1)(z+3)}=\frac{\frac{e^z-1}{z+3}}{z-1}=\frac{\varphi(z)}{z-1},$$

где $\varphi(z)=\frac{e^z-1}{z+3}$ – аналитическая функция, $\varphi(1)=\frac{e-1}{4}\neq 0$.

Значит, точка $z=1$ – простой полюс.

Тогда вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z-1}{(z-1)(z+3)}(z-1)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z-1}{z+3}=\frac{e-1}{4}.$$

Имеем:

$$\oint_\Gamma\frac{e^z-1}{z^2+2z-3}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=2\pi i\frac{e-1}{4}=\pi i\frac{e-1}{2}.$$

3 Вычислить интеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}$ четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}$, которая на действительной оси (при $z=x$) совпадает $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс 2-го порядка в точке $z=3i$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен:

$$\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z-1)^3\left(z^2+1\right)}=2\pi i\cdot\left[\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^3\left(z^2+1\right)}+\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z-1)^3\left(z^2+1\right)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{(z-1)^3}{(z-1)^3\left(z^2+1\right)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\left(z^2+1\right)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^3(z+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 1}\left(\frac{2z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)'+\frac{1}{(i-1)^3(i+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 1}\frac{2\cdot\left(z^2+1\right)^2-2z\cdot 2\cdot\left(z^2+1\right)\cdot 2z}{\left(z^2+1\right)^4}+\frac{1}{2i\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 1}\frac{2\cdot\left(z^2+1\right)\left(z^2+1-4z^4-4z^2\right)}{\left(z^2+1\right)^4}-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 1}\frac{2\cdot\left(1-4z^4-z^2\right)}{\left(z^2+1\right)^4}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{2(1-4-1)}{(1+1)^4}-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}\right]=-\frac{\pi}{2}(1+i).$$

2 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z-1}{z^2+2z-3}dz$, где

$$\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{1}{2}\right|=1\right\}.$$

Решение. Контур Γ интегрирования есть окружность радиуса $R=1$ с центром в точке $z=\frac{1}{2}$.

Дифференцируя последнее равенство по переменной y и подставляя во 2-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$-3x^2-12xy+C'(y)=-\left(3x^2+12xy-3y^2\right).$$

Отсюда $C'(y)=3y^2$. Интегрируя по y, получим

$$C(y)=y^3+C,\ C=\text{const}.$$

Тогда аналитическая функция имеет вид

$$f(z)=\left(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+C\right)+i\left(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3\right).$$

Из условия $f(0)=0$ находим постоянную C: $C=0$.

Искомая функция примет вид

$$f(z)=\left(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3\right)+i\left(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3\right)=$$

$$=(x+iy)^3\cdot(2+i)=(2+i)z^3.$$

4 Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w=5z$.

Решение. Поскольку $w'=5\neq 0$, то отображение $w=5z$ является конформным во всех точках плоскости $\mathbb{C}$.

Модуль производной $\left|f'(z_0)\right|=5>1$, значит, происходит растяжение при отображении $w=5z$.

Аргумент производной равен $\arg f'(z)=0$, поэтому направление при отображении не меняется.

5 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^2$ в точке $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $w'(z)=2z$. Тогда

$$w'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как

$$\left|f'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\right|=4>0,$$

$$\arg f'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}>0,$$

то при отображении $w=z^2$ происходит растяжение с коэффициентом, равным 4, и поворот против часовой стрелки на угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

6 Найти область D', в которую функция $w=z^2$ отображает круг $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

Решение. Функция $w=z^2$ является аналитической всюду в плоскости $\mathbb{C}$. Введем полярные координаты

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Тогда отображение $w=z^2$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$w=r^2\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^2 \text{ или } w=r^2\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right).$$

Найдем уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах:

$$\left|r\cos\varphi+ir\sin\varphi-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\left(r\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow r=\cos\varphi,$$

т. е. уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах $r,\ \varphi$ принимает вид $r=\cos\varphi$.

Обозначим через $\rho,\ \theta$ полярные координаты в плоскости W. Тогда справедливы равенства

$$\rho=r^2,\ \theta=2\varphi.$$

При отображении $w=z^2$ окружность $r=\cos\varphi$ переходит в кардиоиду

$$\rho=\cos^2\frac{\theta}{2} \text{ или } \rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$

б) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos x}{2+\sin x}dx$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$;

е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+9}$;

ж) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1-4\cos x+4}$;

и) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+4}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$;

к) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;

м) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2x\,dx}{8+\sin x}$;

н) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$;

о) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$;

п) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$;

р) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3\sin 2xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$;

с) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$;

т) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(x-3\right)^2}{\left(x^2+9\right)^3}dx$;

у) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx$.

3 Найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+4)^2}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos\alpha k}{k^2+9}$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z-1)^3\left(z^2+1\right)}$, где $\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z-1-i|=2\right\}$.

Решение. В круге $|z-1-i|<2$ данная функция имеет полюс 3-го порядка в точке $z_1=1$, простые полюса порядка в точках $z_{2,3}=\pm i$. Точка $z=-i$ не принадлежит кругу $|z-1-i|<2$. Тогда получим:

Тема 9 Приложения вычетов

1 Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$;

б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$;

в) $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\right.$

г) $\oint\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

е) $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$;

ж) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

и) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$;

к) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\sin zdz}{(z-1)^5}$;

л) $\oint\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

м) $\oint \frac{\cos zdz}{\dots}$;

$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\dots dz}{z^2+2z-3}$;

п) $\oint\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z dz$;

р) $\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3}$;

с) $\oint\limits_{|z-i+2|=2} \frac{1-\cos^2 z}{z^2+z-2}dz$;

т) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z\sin z}{z^2+5z-6}dz$;

у) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z^2}dz$.

2 Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$;

л) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\,dx}{2+\sin x}$;

при этом сохраняется направление обхода окружности $r=\cos\varphi$ и кардиоиды $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$.

На основании принципа взаимно однозначного соответствия границ заключаем, что функция $w=z^2$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности на внутренность кардиоиды (рисунок 18).

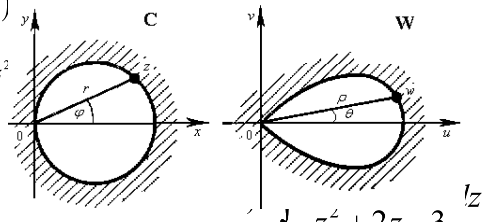

Рисунок 18 – Рисунок к типовому примеру 6

Тема 3 Интегрирование функции комплексной переменной

Вычислить интегралы:

1 $\int\limits_\Gamma \left((y+1)-xi\right)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1$, $z_2=-i$.

2 $\int\limits_\Gamma \bar{z}\,\mathrm{Re}\,zdz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-2-i$, $z_2=1+2i$.

3 $\int\limits_\Gamma (1+i-2\bar{z})dz$, где Γ – парабола $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

4 $\int\limits_\Gamma (z^2+z\bar{z})dz$, где Γ – дуга окружности $|z|=1$, $0\le\arg z\le\pi$.

5 $\int\limits_{1+i}^{2-i} (3z^2+2z)dz$.

6 $\int\limits_0^i z\cos zdz$.

7 $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz$, где Γ есть кривая $z=(2+i)t$, $0 \le t \le 1$.

8 $\int\limits_{\Gamma} \left(iz^2 - 2z\bar{e}^{z^2}\right) dz$, где Γ – произвольная линия, соединяющая точки $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = i$.

9 $\int\limits_{\Gamma} \left(1+2i-2\bar{z}\right) dz$, где Γ – ломаная $z_1 z_2 z_3$, где $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 1$.

10 $\int\limits_{c} z \operatorname{Im} z^2 dz$, где Γ есть $|z|=1$ $(-\pi \le \arg z \le 0)$.

11 $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1) dz$.

12 $\int\limits_{\Gamma} \ln z dz$, где Γ есть $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

13 $\int\limits_{0}^{i+1} z^3 dz$.

14 $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz$, где Γ есть $z=(2+3i)t$ $(0 \le t \le 1)$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^i z^2 dz$; б) $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz$ при $n \ne 1$; в) $\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0}$.

Решение. а) по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_0^i z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^i = -\frac{i}{3};$$

б) параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда комплексно-параметрическое уравнение окружности есть

6 Найти вычеты функции в особых точках $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}$.

Решение. Особая точка функции $z=1$ есть полюс 2-го порядка. Находим

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2}(z-1)^2\right) = \lim_{z\to 1}\left(z^2\right)' = \lim_{z\to 1} 2z = 2.$$

7 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функции $f(z) = \frac{\sin z}{z+1}$.

Решение. Точки вида $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, являются простыми нулями функции. Логарифмический вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{z_k=\pi k} \left(\ln f(z)\right)' = 1.$$

Точка $z=-1$ есть простой полюс данной функции. Поэтому:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \left(\ln f(z)\right)' = -1.$$

8 Найти логарифмический вычет функции $f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ относительно окружности $|z| = \pi$.

Решение. В круге $|z| < \pi$ данная функция имеет два простых нуля $z=i$ и $z=-i$, а также семь полюсов 2-го порядка

$$z_k = k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Логарифмический вычет относительно окружности $|z| = \pi$ равен

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 7 = -5.$$

5 Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}$.

Решение. Изолированные особые точки функции есть $z=-3$ и $z=0$.

Точка $z=-3$ – простой полюс. Поэтому вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} f(z)=\lim_{z\to-3}\left(\frac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}\right)(z+3)=\lim_{z\to-3}\cos\frac{1}{z}=\cos\frac{1}{3}.$$

Точка $z=0$ – существенно особая точка функции. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$. Поскольку

$$\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\ldots,$$

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+\ldots\right),$$

то

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\ldots\right)\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{3z}\left(\frac{1}{2!\cdot3}-\frac{1}{4!\cdot3^3}+\frac{1}{6!\cdot3^5}-\ldots\right)+\frac{1}{z^2}c_{-2}+\ldots+.$$

Таким образом, находим:

$$c_{-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot2!}-\frac{1}{3^3\cdot4!}+\frac{1}{3^5\cdot6!}-\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\,3^{2n}}.$$

Значит,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot3^{2n}}.$$

$$z=z_0+R\cdot e^{it},\ 0\le t\le 2\pi.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^n\,dz=\left[z=z_0+R\cdot e^{it}\right]=\int\limits_0^{2\pi}\left(R\cdot e^{it}\right)^n R\cdot i\cdot e^{it}dt=$$

$$=i\cdot R^{n+1}\cdot\int\limits_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt=i\cdot R^{n+1}\cdot\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{R^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\cos2\pi(n+1)+i\sin2\pi(n+1)-e^0\right)=\frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1)=0;$$

в) имеем:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}=\left[z=z_0+R\cdot e^{it}\right]=\int\limits_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt=i\cdot\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi i.$$

2 Вычислить $\int\limits_\Gamma\left(\overline{z}+z^2\right)dz$, где Γ – отрезок прямой $y=x$, соединяющий точки $z_0=0$ и $z_1=1+i$.

Решение. <u>1 способ</u>. Так как контур интегрирования – прямая $y=x$, сделаем замену $z=re^{i\varphi}$. Тогда

$$\overline{z}=re^{-i\varphi},\ z^2=r^2e^{2i\varphi},$$

где φ является постоянным и $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$z=re^{i\frac{\pi}{4}},\ \overline{z}=re^{-i\frac{\pi}{4}},\ z^2=r^2e^{i\frac{\pi}{2}};\ dz=e^{i\frac{\pi}{4}}dr.$$

В точке $z_0=0$ имеем $r=0$, а в точке $z_1=1+i$ получим:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_\Gamma\left(\overline{z}+z^2\right)dz=\int\limits_0^{\sqrt2}\left(re^{-i\frac{\pi}{4}}+r^2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}dr=\int\limits_0^{\sqrt2}\left(r+r^2e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)dr=$$

$$=\left.\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)\right|_0^{\sqrt2}=1+\frac{2\sqrt2}{3}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)=$$

$$=1+\frac{2\sqrt2}{3}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)=1-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i.$$

2 способ. Выделим действительную и мнимую части исходной функции:

$$\overline{z}+z^2=x-iy+x^2-y^2+2xyi=\left(x+x^2-y^2\right)+i\left(2xy-y\right).$$

Отсюда

$$u\left(x,y\right)=x+x^2-y;$$

$$v\left(x,y\right)=2xy-y.$$

Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\overline{z}+z^2\right)dz=\int\limits_{\Gamma}\left(x+x^2-y^2\right)dx-\left(2xy-y\right)dy+$$

$$+i\int\limits_{C}\left(2xy-y\right)dx+\left(x+x^2-y^2\right)dy=\begin{vmatrix} y=x; & x_0=0\\ dy=dx; & x_1=1\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x+x^2-x^2-2x^2+x\right)dx+i\int\limits_0^1\left(2x^2-x+x+x^2-x^2\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx+2i\int\limits_0^1 x^2dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+2i\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i.$$

3 Вычислить $\int\limits_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz$, где Г – часть окружности $\left|z\right|=1$, расположенная в верхней полуплоскости.

Решение. Положим $z=re^{i\varphi}$. Так как $\left|z\right|=1$, то $r=1$ и $z=e^{i\varphi}$. Тогда $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$ и $0\le\varphi\le\pi$ по условию.

Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz=\int\limits_0^{\pi}\left(e^{2i\varphi}-e^{i\varphi}\right)ie^{i\varphi}d\varphi=i\int\limits_0^{\pi}\left(e^{3i\varphi}-e^{2i\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\varphi}-\frac{1}{2i}e^{2i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{3}\left(e^{3\pi i}-1\right)-\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi-1\right)-\frac{1}{2}\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi-1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-1-1\right)-\frac{1}{2}\left(1-1\right)=-\frac{2}{3}.$$

Поскольку

$$\lim_{z\to 0}f\left(z\right)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi},$$

то точка $z=0$ – устранимая особая точка и поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f\left(z\right)=0.$$

Так как

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}f\left(z\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\infty,$$

то точка $z=\frac{\pi}{4}$ – полюс.

Преобразуем функцию $f\left(z\right)$ к виду:

$$f\left(z\right)=\frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sin z^2}{z^2}}{z-\frac{\pi}{4}}=\frac{\varphi\left(z\right)}{z-\frac{\pi}{4}},$$

где $\varphi\left(z\right)=\frac{\sin z^2}{z^2}$ – аналитическая в точке $z=\frac{\pi}{4}$, при этом $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$. Значит, $z=\frac{\pi}{4}$ – простой полюс.

Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}}f\left(z\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}f\left(z\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f\left(z\right)=-\left(0+\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}\right)=-\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

2 Вычислить вычет функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z_0=0$.

Решение. Точка $z=0$ является для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ существенно особой точкой. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots.$$

Отсюда находим $\operatorname*{Res}_{z=0}e^{\frac{1}{z}}=c_{-1}=1$.

3 Найти сумму вычетов относительно всех полюсов функции

$$f(z)=\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}$$

Решение. Полюсами данной функции являются точки: $z_{1,2}=\pm 2i$ – полюса 2-го порядка, $z_{3,4}=\pm i$ – полюса 3-го порядка.

Видно, что в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет нуль первого порядка. Правильная часть ее разложения в ряд Лорана начинается с члена $\dfrac{1}{z}$.

Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}=-1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{4}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}=1.$$

4 Найти вычеты в особых точках функции

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$$

Решение. Изолированные особые точки функции $f(z)$ есть $z_1=0$; $z_2=\dfrac{\pi}{4}$.

4 Вычислить $\int\limits_{\Gamma}e^{\bar z}dz$, где Γ – отрезок прямой $y=-x$, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=\pi-i\pi$

Решение. Параметрические уравнения контура Γ есть $x=t$, $y=-t$ или $z=t-it$, где действительное t изменяется от 0 до π. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Gamma}e^{\bar z}dz=\int\limits_0^{\pi}e^{t+it}(1-i)dt=(1-i)\int\limits_0^{\pi}e^{t(1+i)}dt=\frac{1-i}{1+i}e^{t(1+i)}\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{1-i}{1+i}\left(e^{\pi(1+i)}-1\right)=\frac{(1-i)^2}{2}\left(e^{\pi}e^{\pi i}-1\right)=$$
$$=\frac{1-2i-1}{2}\left(e^{\pi}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)-1\right)=-i\left(e^{\pi}\left(-1+i\cdot 0\right)-1\right)=$$
$$=\left(e^{\pi}+1\right)i.$$

5 Вычислить $\int\limits_{1-i}^{2+i}(2z+3)dz$.

Решение. Функция $f(z)=2z+3$ аналитична всюду на $\mathbb{C}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}(2z+3)dz=\left(z^2+3z\right)\Big|_{1-i}^{2+i}=(2+i)^2+3(2+i)-$$
$$(1-i)^2-3(1-i)==4+4i-1+6+3i-1+2i+1-3+3i=6+12i.$$

Тема 4 Интегральная формула Коши

Вычислить интегралы (обход по контуру в положительном направлении):

1 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^2+2z}dz$.

2 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}dz$.

8 $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$.

9 $\oint\limits_{|z|=5}\dfrac{dz}{z^2+16}$.

3 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^3} dz$.

4 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \dfrac{1}{z^3} \cos\dfrac{\pi}{z+1} dz$.

5 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz$.

6 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z \operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$.

7 $\oint\limits_{|z-i|=4} \dfrac{e^{z+1}}{(z-1)^2 \cdot (z+2)} dz$.

10 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z \operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$.

11 $\oint\limits_{|z-2|=1} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(z^2+4\right)^2} dz$.

12 $\oint\limits_{|z-3|=6} \dfrac{z dz}{(z-2)^3 (z+4)}$.

13 $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{e^{z^2}}{z-1} dz$.

14 $\oint\limits_{|z+i|=3} \dfrac{\sin\dfrac{i\pi z}{2}}{(z-2) z^2} dz$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz$, если Γ есть окружность, определяемая уравнением:

а) $|z-2|=1$; б) $|z-2|=3$; в) $|z-2|=5$.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ будут точки, обращающие в нуль знаменатель, т. е. $z^2-6z=0$. Решая уравнение, получим две особые точки $z_1=0$, $z_2=6$.

а) внутри области D, ограниченной окружностью $|z-2|=1$, нет особых точек функции $f(z)$, т. е. $f(z)$ аналитична в области D. В силу теоремы Коши имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 0;$$

б) внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, лежит точка $z_1=0$. По интегральной формуле Коши имеем:

к) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z+1)^2}$; у) $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$.

2 Вычислить:

а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$; б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \dfrac{(1-\operatorname{ch} z)\operatorname{sh} z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$.

3 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функций

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\cos^3 z$.

4 Найти логарифмические вычеты функций относительно контуров:

а) $f(z)=\dfrac{z}{1+z^3}$. $|z|=2$; б) $f(z)=\operatorname{th} z$, $|z|=8$.

Примеры оформления решения

1 Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-4}{z^3-z}$.

Решение. Изолированными особыми точками данной функции являются $z_1=0$ – полюс 2-го порядка и $z_2=1$ – простой полюс.

Для точки $z_2=1$ имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z-4}{z^3-z} = \left.\frac{z-4}{\left(z^3-z\right)'}\right|_{z=1} = \left.\frac{z-4}{3z^2-1}\right|_{z=1} = \frac{1-4}{3\cdot 1-1} = -\frac{3}{2}.$$

Для точки $z_1=0$ имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z-4}{z^3-z} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \left(\frac{z^2 \cdot (z-4)}{z^3-z} \right)'' = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z-4}{z-1} \right)'' =$$

$$= \lim_{z\to 0} \left(\frac{3}{(z-1)^2} \right)' = \lim_{z\to 0} \frac{-6}{(z-1)^3} = 6.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(-\frac{3}{2}+6\right) = 4{,}5.$$

2 способ Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$, т. е. в области $0<|z|<\infty$:

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, поэтому точка $z_0=0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Тема 8 Вычеты

1 Найти в особых точках вычеты функций

а) $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$; л) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$;

б) $f(z)=\frac{tgz}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$; м) $f(z)=\frac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$;

в) $f(z)=\frac{e^z}{z^3(z-1)}$; н) $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$;

г) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$; о) $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$;

д) $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$; п) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$;

е) $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$; р) $f(z)=\cos z\sin\frac{1}{z}$;

ж) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z+1}$; с) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$;

и) $f(z)=\frac{1}{z^2(z+1)}$; т) $f(z)=\cos\frac{2}{z-\pi}$;

$$\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0}=$$

$$2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3};$$

в) в области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, лежат обе особые точки: $z_1=0$ и $z_2=6$. Непосредственно применять интегральную формулу Коши нельзя. Вычислить данный интеграл можно двумя способами.

1 способ Разложим дробь $\frac{1}{z^2-6z}$ на простейшие:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл и применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z-6}dz-\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=6}-\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

2 способ Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1=0$ и $z_2=6$ малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-2|\le 5$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2|=5$, γ_1 и γ_2 подынтегральная функция аналитична всюду. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=$$

$$=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\Big|_{z=0}+2\pi i\frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6}==-\frac{\pi i}{3}+\frac{\pi i}{3}e^{36}=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

2 Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2+2z} dz$, где окружность обходится в положительном направлении.

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z|=1$, находится точка $z=0$, в которой знаменатель функции $f(z)=\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2+2z}$ обращается в нуль.

Перепишем заданный интеграл так

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2+2z} d\zeta = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z}.$$

Функция $f(z)=\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}$ является аналитической в круге $|z|\le 1$. Применяя интегральную формулу Коши в точке $z_0=0$ получим:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2+2z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i .$$

3 Вычислить интегралы

а) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

Решение. а) особые точки функции $z_1=1$, $z_2=-1$. В области $|z-1|\le 1$ лежит точка $z_1=1$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

Подставляя, получим:

Аналогично точка $z_2=1$ – полюс, поскольку

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)} = \infty .$$

Так как

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1} = \frac{\varphi_1(z)}{z-1},$$

где $\varphi_1(z)$ – аналитична в точке $z_2=1$ и $\varphi(1)=\frac{\sin 1}{4}\ne 0$, то точка $z_2=1$ – простой полюс функции $f(z)$

8 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z)=\frac{1}{z^3}$$

Решение. Особая точка функции $z_0=0$. Так как

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z^3}=\infty,$$

то точка $z_0=0$ – полюс.

Для функции $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=z^3$ точка $z_0=0$ – нуль третьего порядка, значит, для функции $f(z)$ – полюс 3-го порядка.

9 Определить характер особой точки $z=0$ для функции

$$f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Решение. <u>1 способ</u> Рассмотрим поведение функции на действительной и мнимой осях.

Пусть $z=x$ и $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\to\infty$ при $x\to 0$.

Пусть $z=iy$ и $f(iy)=e^{-\frac{1}{y^2}}\to 0$ при $y\to 0$.

Отсюда следует, что функция $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела в точке $z_0=0$ и $z_0=0$ – существенно особая точка функции $f(x)$.

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{1}=1\neq 0$$

Значит, $z_0=0$ является устранимой особой точкой функции.

<u>*2 способ*</u>. Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ имеет вид:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}=\frac{\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)-1}{z}=$$

$$=\frac{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots .$$

Ряд Лорана не содержит главной части, значит по теореме 3 точка $z_0=0$ есть устранимая особая точка данной функции.

7 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}.$$

Решение. Найдем особые точки функции из условия:

$$z^3+z^2-z-1=0.$$

Решая уравнение, получим две особые точки $z_1=-1$; $z_2=1$.

Найдем предел в точке $z_1=-1$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}=\infty$$

Согласно определению, точка $z_1=-1$ – полюс. Чтобы определить его порядок, представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2},$$

где $\varphi(z)=\dfrac{\sin z}{z-1}$ – аналитична в точке $z_1=-1$ и $\varphi(-1)=\dfrac{\sin 1}{2}\neq 0$.

Отсюда по теореме 2 точка $z_1=-1$ – полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

$$\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz=\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin\pi z}{(z^2+1)^2}\right)'\Bigg|_{z=1}=$$

$$=2\pi i\frac{2\pi\cos\pi-2\sin\pi}{2^3}=2\pi i\cdot\frac{(-2\pi)}{8}=-\frac{\pi^2 i}{2};$$

б) подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в области $|z|\le 1$ всюду, кроме точки $z=0$. Функция $f(z)=\cos z$ является всюду аналитической в круге $|z|\le 1$. При $n=2$ имеем

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(0).$$

Так как $f''(z)=-\cos z$ и $f''(0)=-1$, то $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz=\pi\cdot i\cdot(-1)=-\pi\cdot i$.

Тема 5 Ряды аналитических функций

1 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos ik}{2^k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos ik^2}{5^{k^2}}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} i\sqrt{k}}{\sin ik}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{\sqrt{k}}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch} i\frac{\pi}{k}}{k^{\ln k}}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin ik}{2^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{ik^2}}{k^3}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2+i}{3}\right)^k$; к) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{i^k}{k}$.

2 Найти области сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(z-1)^k}{k^2}$; г) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{1-i}\right)^k$; ж) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{(1+i)^k}$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty}(k+i)z^k$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{ch}\frac{i}{k}z^k$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}e^{ik}z^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\cos^k\left(\frac{\pi i}{\sqrt{k}}\right)z^k$; е) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{i^k}$; к) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}$.

Примеры оформления решения

1 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik}}{k^2}$.

Решение. По формуле Эйлера общий член ряда можно записать в виде

$$e^{ik}=\cos k+i\sin k .$$

Рассмотрим два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^2} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$$

Так как $\frac{|\cos k|}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$ и $\frac{|\sin k|}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то оба ряда сходятся. Значит, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik}}{k^2}$ сходится.

2 Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k$.

Решение. Каждый коэффициент ряда равен 1, поэтому радиус сходимости $R=1$. Заданный ряд является рядом геометрической прогрессии, для которого

$$S_n(z)=1+(z-z_0)+...+(z-z_0)^n=\frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)} .$$

Поэтому сумма ряда есть аналитическая функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\frac{1}{1-(z-z_0)} .$$

3 Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(z-i)^k} .$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Так как

Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $z_0=0$.

<u>2 способ</u> Разложение в ряд Лорана функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0=0$ имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots .$$

Видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Следовательно, точка $z_0=0$ является существенно особой точкой.

5 Определить какую особенность в бесконечно удаленной точке имеет функция $f(z)=\frac{1}{z-4}$.

Решение. Произведем замену переменной z на переменную w по формуле $z=\frac{1}{w}$. Тогда данная функция принимает следующий вид $f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{w}{1-4w}$. При условии $|4w|<1$ имеет место разложение:

$$f\left(\frac{1}{w}\right)=w\left(1+4w+(4w)^2+\cdots\right).$$

Возвращаясь к переменной z, имеем:

$$f(z)=\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{4}{z}+\frac{4^2}{z^2}+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+1}},\ |z|>4 .$$

Видно, что ряд Лорана не содержит правильную часть. Следовательно, точка $z=\infty$ является устранимо особой точкой.

6 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z} .$$

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0=0$.

<u>*1 способ*</u>. Вычислим предел

Тогда $f(z)=z^5\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=6\neq 0$.

Следовательно, точка $z_0=0$ является для данной функции нулем 5-го порядка.

3 Какую особенность в точке $z_0=0$ имеет функция

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}\ ?$$

Решение. <u>1 способ</u> Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой, так как предел в этой точке равен

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.$$

<u>2 способ</u> В окрестности точки $z_0=0$ разложение в ряд Лорана имеет вид:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots}{z}=$$

$$=1-\frac{z^2}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

Видно, что ряд Лорана в точке $z_0=0$ не содержит членов с отрицательными степенями, т. е. не содержит главной части. Поэтому точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

4 Какую особенность в точке $z_0=0$ имеет функция

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\ ?$$

Решение. <u>1 способ</u> Имеем:

– если $z\to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$;

– если $z\to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(z-i)^k}{k(z-i)^{k+1}}\right|=\frac{1}{|z-i|},$$

то согласно признаку д'Аламбера ряд сходится абсолютно при условии $\dfrac{1}{|z-i|}<1$. Отсюда $|z-i|>1$. Значит, ряд сходится абсолютно вне круга с центром в точке $z_0=i$ радиуса 1. При $|z-i|=1$ имеем расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k$.

4 Найти область точечной и равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k-z^{k+1}\right).$$

Решение. Составим частичные суммы ряда

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\left(z^k-z^{k+1}\right)=1-z^{n+1}.$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-z^{n+1}\right)$ существует только при $|z|<1$ и в точке $z=1$. Поэтому областью точечной сходимости ряда является область $D=\{z\ |\ |z|<1 \text{ и } z=1\}$ и сумма ряда в каждой точке этой области равна

$$S(z)=\begin{cases}1 & \text{при } |z|<1,\\ 0 & \text{при } z=1.\end{cases}$$

Рассмотрим остаток ряда

$$r_n(z)=S(z)-S_n(z)=\begin{cases}z^{n+1} & \text{при } |z|<1,\\ 0 & \text{при } z=1.\end{cases}$$

В силу произвольности ε_0, положим $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$. Возьмем последовательность точек $z_n=2^{-\frac{1}{n+1}}e^{-i\varphi_n}$ таких, что $z_n\in D$ и $\forall\ \varphi_n\in\mathbb{R}$. Так как

$$|r_n(z_n)|=\frac{1}{2}>\frac{1}{4},$$

то по определению равномерной сходимости неравенство $\left|r_n(z)\right| < \varepsilon$ выполняется не для любого $z \in D$.

Значит, в области D функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k - z^{k+1}\right)$ сходится неравномерно.

5 Найти область сходимости и область равномерной сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}$.

Решение. Радиус сходимости есть

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(k+2)^2}{(k+1)^2 2^k}\right| = 2.$$

Следовательно, ряд сходится в круге $|z-i| < 2$. На границе круга при $|z-i| = 2$ получим ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$, который является сходящимся. Поэтому исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z-i| \le 2$.

Для всех z из круга сходимости $|z-i| \le 2$ имеем:

$$\left|\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}\right| \le \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}$ сходится абсолютно и равномерно в круге $|z-i| \le 2$.

6 Найти радиус сходимости и область равномерной сходимости рядов:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\cos ik\, z^k$; б) $\sum_{k=0}^{\infty}(1+i)^k z^k$.

Решение. а) преобразуем коэффициенты ряда

$$c_k = \cos ik = \frac{e^k + e^{-k}}{2} = \operatorname{ch} k.$$

Тогда радиус сходимости равен

г) $f(z) = \sin\frac{1}{z^2}$; и) $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+2z+1}$.

5 Определить характер указанных особых точек для функций:

а) $f(z) = \frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0 = -1$;

б) $f(z) = \cos\frac{1}{z+\pi}$, $z_0 = -\pi$.

Примеры оформления решения

1 Найти нули и определить их порядок функции

$$f(z) = 1 + \cos z.$$

Решение. Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z = -1$. Отсюда точки $z_n = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$, есть нули данной функции.

Далее

$f'(z) = -\sin z$, $f'((2n+1)\pi) = -\sin(2n+1)\pi = 0$,

$f''(z) = -\cos z$, $f''((2n+1)\pi) = -\cos(2n+1)\pi = 1 \ne 0$.

Следовательно, точки $z_n = (2n+1)\pi$, $n \in \square$, являются нулями 2-го порядка данной функции.

2 Найти порядок нуля $z_0 = 0$ функции $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$.

Решение. Используя разложение функции $\sin z$ в окрестности точки $z_0 = 0$, получим:

$$f(z) = \frac{z^8}{z-\sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)} = \frac{z^8}{-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots} =$$

$$= \frac{z^5}{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \ldots} = z^5 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \ldots}.$$

Положим $\varphi(z) = \frac{1}{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \ldots}$.

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)+1}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-\big(-(z-1)\big)}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n .$$

Тема 7 Классификация изолированных особых точек аналитической функции

1 Найти нули и определить их порядок для функций:

а) $f(z)=z^4+4z$; в) $f(z)=\cos z+\operatorname{ch} iz$;

б) $f(z)=z^2\sin z$; г) $f(z)=(z+\pi i)\operatorname{sh} z$.

2 Найти порядок нуля $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=4\sin z^3+z^2\left(z^2-2\right)$; в) $f(z)=\dfrac{z^4}{z-\sin z}$;

б) $f(z)=2(\operatorname{ch} z-1)-z^2$; г) $f(z)=z^2\left(e^{2}-1\right)$.

3 Определить характер особой точки $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$; в) $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+z-1}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-\operatorname{ch} z}$; г) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$.

4 Найти особые точки и определить их характер для функций:

а) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; д) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$;

б) $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z+1}$; е) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$;

в) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$; ж) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2-2z+1}$;

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{ch}(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{ch} k\operatorname{ch}1+\operatorname{sh} k\operatorname{sh}1}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}1+\operatorname{th} k\operatorname{sh}1}=\frac{1}{\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1}=e^{-1}.$$

Здесь учитывалось, что

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{th} k=\lim_{k\to\infty}\frac{e^k-e^{-k}}{e^k+e^{-k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1-e^{-2k}}{1+e^{-2k}}=1.$$

Следовательно, $R=e^{-1}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z|<e^{-1}$;

б) коэффициенты ряда $c_k=(1+i)^k$. Тогда

$$|c_k|=\left|(1+i)^k\right|=|1+i|^k=\left(\sqrt{2}\right)^k=2^{\frac{k}{2}}.$$

Отсюда

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{2^{\frac{k}{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, радиус $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Тема 6 Ряды Тейлора и Лорана

1 Разложить в окрестности указанных точек в ряд Тейлора и найти его области сходимости функции:

а) $f(z)=\sin(2z+1)$; $z_0=-1$; и) $f(z)=\cos z$; $z_0=-\dfrac{\pi}{4}$;

б) $f(z)=e^z$ по степеням $2z-1$; к) $f(z)=\dfrac{1}{3z+1}$; $z_0=-2$;

в) $f(z)=\ln(2-z)$; $z_0=0$; л) $f(z)=\cos^2\dfrac{iz}{2}$; $z_0=0$;

г) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$; м) $f(z)=\operatorname{sh}^2\dfrac{z}{2}$; $z_0=0$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i}$; $z_0=0$;

е) $f(z)=\dfrac{z-1}{2+z-z^2}$; $z_0=0$;

ж) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$;

н) $f(z)=\dfrac{2}{z-1}$; $z_0=i$;

о) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+2z-3}$; $z_0=0$;

п) $f(z)=e^{z+3}$; $z_0=2$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

б) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^5}{\left(z^2-4\right)^2}$;

е) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

ж) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$;

и) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$;

к) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$;

л) $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$;

м) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$;

н) $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2-4\right)\left(z^2-1\right)}$;

о) $f(z)=\dfrac{2z}{(z+1)(z-2)}$;

п) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)z}$.

3 Разложить функции в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)\left(1+z^2\right)}$ в области $1<|z|<4$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2-4\right)\left(z^2-1\right)}$ в области $1<|z|<2$;

в) $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2-2z+1}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=1$;

г) $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2-4\right)\left(z^2-1\right)}$ в окрестности точек $z_1=1$ и $z_2=-2$;

Ряд для первой функции сходится, если $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, т. е. при $|z|<2$, для второй функции, если $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, а ряд для функции $f(z)$ сходится в кольце $1<|z|<2$;

в) разложение для $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z}\right)}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n+1\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Ряд для первой функции сходится в области $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>2$, для второй, если $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в области $|z|>2$.

7 Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особых точек $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$.

Решение. Преобразуем функцию:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

Разложение в окрестности точки $z_1=0$ по степеням z до ближайшей особой точки $z_2=1$ (в кольце $0<|z|<1$) есть:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\ldots=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Разложение в окрестности точки $z_2=1$ по степеням $(z-1)$, справедливо в кольце $0<|z-1|<1$:

в) в области $2<|z|<\infty$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$, $z_2=1$. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

а) разложение в круге $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2+z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)}-\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)-\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n .$$

Ряд для первой функции сходится при условии $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. в области $|z|<2$, для второй – в области $|z|<1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в круге $|z|<1$;

б) разложение в кольце $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} .$$

д) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)z}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=3i$.

Примеры оформления решения

1 Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2+2z-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и найти область сходимости ряда.

Решение. Найдем нули знаменателя:

$$z^2+2z-3=0;\ z_1=-3;\ z_2=1.$$

Тогда $z^2+2z-3=(z-1)(z+3)$.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+2z-3}=\frac{z}{(z-1)(z+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3+z}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1,$$

получим:

$$f(z)=-\frac{1}{4}\left(1+z+\ldots+z^n+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n .$$

Область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ есть $|z|<1$, а область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$ есть $|z|<3$. Поэтому областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n$ является круг $|z|<1$.

2 Разложить по степеням $(z+1)$ функцию $f(z)=e^{2z+1}$.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=e^{2(z+1)-1}=e^{2(z+1)}\cdot e^{-1}.$$

Используя основное разложение функции e^z в ряд Маклорена, получим:

$$f(z)=e^{-1}\left(1+2(z+1)+\frac{2^2(z+1)^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n(z+1)^2}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z+1)^n.$$

Область сходимости данного ряда $|z|<\infty$.

3 Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=\operatorname{tg} z$.

Решение. Найдем производные функции $f(z)=\operatorname{tg} z$ в точке $z=0$:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z} \text{ или } f'(z)=1+f^2(z),$$

$$f''(z)=2f(z)f'(z),$$

$$f'''(z)=2\left(f'^2(z)+f(z)f''(z)\right),$$

$$f^{(4)}(z)=2\left(3f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)\right),$$

$$f^{(5)}(z)=2\left(3f''^2(z)+4f'(z)f'''(z)+f(z)f^{(4)}(z)\right).$$

Отсюда

$f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=2$; $f^{(4)}(0)=0$; $f^{(5)}(0)=16$, ….

Подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора, получим:

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots.$$

4 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в круге $|z|<1$.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right),\ |z|<2,$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}=-\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right),\ |z|<1,$$

то ряд Лорана есть

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)+\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}z^n+\cdots.$$

Полученный ряд сходится в круге $|z|<1$.

5 Разложить функцию $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z_0=0$

Решение. Используя основное разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена, получим

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\ldots.$$

Функция является аналитической в кольце $0<|z|<\infty$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

а) в круге $|z|<1$;

б) в кольце $1<|z|<2$;