Тестовые задания для итогового контроля по разделу «Функции комплексной переменной»

Вариант 1

1 По определению логарифмическая функция комплексной переменной имеет вид:

____ .

2 Для того чтобы в точке $z = x + iy$ функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ была дифференцируемой необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ как функции двух действительных переменных x и y, и выполнялись условия Коши-Римана:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3) Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ и кусочно-гладкого замкнутого контура Γ, целиком лежащего в области D и охватывающего точку z_0 справедливо равенство:

____ .

4) Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, определяемое формулой:

____ .

5) Найти все значения функции $f(z) = \sqrt[3]{z} - z$ в точке $z_0 = \sqrt{3} - i$.

6) Найти область аналитичности функции $f(z) = z - e^z$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$. Эта функция аналитична всюду на $\mathbb{C}$, кроме точек $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2i$, которые являются простыми полюсами.

Поскольку

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z^2\left(1+\dfrac{4}{z^2}\right)},$$

то $\dfrac{1}{z^2+4} = O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = -\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4} + \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}\right] =$$

$$= -\pi\left[\lim_{z\to -2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z} + \lim_{z\to 2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}\right] = -\pi\left[\frac{\operatorname{ctg}(-2i\pi)}{-2i\cdot 2} + \frac{\operatorname{ctg}(2i\pi)}{2i\cdot 2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\operatorname{cth} 2\pi .$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+4}$ можно записать в виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \ldots + \frac{1}{(-2)^2+4} + \frac{1}{(-1)^2+4} + \frac{1}{0^2+4} + \frac{1}{1^2+4} + \frac{1}{2^2+4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} .$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} - \frac{1}{8} .$$

Искомая сумма данного ряда равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{\pi}{4}\operatorname{cth} 2\pi - \frac{1}{8} .$$

Раздел 3 Операционное исчисление

Тема 1 Преобразование Лапласа

1 Проверить, какие из указанных функций являются функциями оригиналами:

а) $f(t)=2^t\eta(t)$; в) $f(t)=\dfrac{1}{t-3}\eta(t)$;

б) $f(t)=\operatorname{ch}(2-i)t\,\eta(t)$; г) $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\eta(t)$.

2 Найти изображения следующих функций:

1) $2t+3$;
2) te^{2t};
3) $\sin 3t$;
4) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2\operatorname{ch}\tau\, d\tau$;
5) $t+2\sin t$;
6) $4t+4\operatorname{sh}t+2e^t$;
7) e^{4t};
8) $\sin wt$;
9) $\sin^2 t$;
10) $e^{2t}\sin 2t$;
11) $e^{-t}t^3+e^{4t}\operatorname{sh}t$;
12) $\int\limits_0^t \tau\operatorname{sh}2\tau d\tau$;
13) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$;
14) $\cos^2 t$;
15) $t\cos 3t$;
19) $\sin(t-2)\eta(t-2)$;
20) $\dfrac{e^t-1}{t}$;
21) $e^{t-2}\eta(t-2)$;
22) $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$;
23) $\sin 2t\cos 4t$;
24) $2\operatorname{ch}^2 2t-4e^{5t}$;
25) $e^{-4t}\sin^2 t$;
26) $\cos^2(t-1)\eta(t-1)$;
27) $(t-1)^2\eta(t)$;
28) $\sin^3 t$;
29) $(t^3+t)\sin 2t$;
30) $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau$;
31) $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$;
32) $3+4t+2t^2$;
33) $1+e^{-2t}+t^2$;

Отрицательный знак тока означает, что при разряде конденсатора C через явное сопротивление r ток $i(t)$ направлен в сторону, противоположную направлению обхода контура, выбранного раньше. Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении в переходном процессе также отрицательно:

$$u_r = ri = -100e^{1000t}\ \text{В}.$$

Мгновенное значение переходного напряжения на конденсаторе, определяемое по второму закону Кирхгофа $u_C + ri = 0$ есть

$$u_C = -ri = -u_r = 100e^{-1000t}\ \text{В}.$$

Характер изменения i и u_C в переходном режиме показан на рисунке 27.

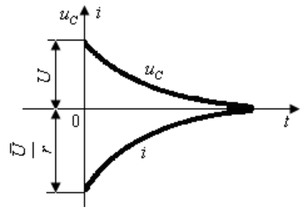

Рисунок 27 – Характер изменения i и u_C в переходном режиме

Решение. Будем считать, что до переключения рубильника из положения 1 в положение 2 конденсатор C был заряжен до напряжения источника U. Если обход контура взять совпадающим с ходом стрелки часов, то начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ считается положительным: $u_C(0)=U=100$ В. Операторное сопротивление контура

$$Z(p)=r+\frac{1}{pC}.$$

Внешних источников э. д. с. в контуре нет.

Изображение внутренней э. д. с. (начальной э. д. с. емкости) есть

$$\frac{-u_C(0)}{p}=\frac{-U}{p}=F(p).$$

По закону Ома в операторной форме имеем

$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{\frac{-U}{p}}{r+\frac{1}{pC}}=\frac{-UC}{rCp+1}.$$

Изображение тока переходного процесса удовлетворяет условиям применения второй теоремы разложения. Поэтому можно записать

$$I(p)=\frac{-UC}{rCp+1}=\frac{P(p)}{Q(p)},$$

где $P(p)=-UC=-100\cdot 10\cdot 10^{-6}=-10^{-3}$,

$Q(p)=rCp+1$,

$\alpha_1=-\dfrac{1}{rC}=-\dfrac{1}{100\cdot 10\cdot 10^{-6}}=-10^{3}$,

$P(\alpha_1)=-10^{-3}$,

$Q'(p)=rC=100\cdot 10\cdot 10^{-6}=10^{-3}$,

$Q'(\alpha_1)=10^{-3}$.

В результате получаем мгновенное значение тока переходного процесса в виде:

$$i=i(t)=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t}=\frac{-10^{-3}}{10^{-3}}e^{-10^3 t}=-e^{-1000t} \text{ А.}$$

16) $t^2\cos 2t$;

17) $t^2\left(e^{2t}+\operatorname{ch}3t\right)$;

18) $\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$;

34) $t\sin wt$;

35) $e^{2t}\sin t$;

36) $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$.

3 По графику оригинала (рисунок 20) найти изображение.

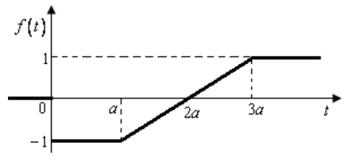

Рисунок 20 – Рисунок к задаче 3

Примеры оформления решения

1 Проверить, является ли оригиналом функция:

$$f(t)=\begin{cases} e^{2t}\sin t, \text{ ï ðè } t\ge 0,\\ 0, \text{ ï ðè } t<0.\end{cases}$$

Решение. Проверим, удовлетворяет ли данная функция условиям 1-3 определения оригинала.

В самом деле:

1) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

2) при $t\ge 0$ функция непрерывна;

3) для любых $t\in$ □ выполняется неравенство

$$\left|e^{2t}\sin t\right|\le e^{2t}.$$

Отсюда $M=1,\ s_0=2$.

2 Найти изображения функций:

а) Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}1 \quad \text{при } t\ge 0,\\ 0 \quad \text{при } t<0,\end{cases}$$

б) $f(t)=e^{4t}$, $t\ge 0$.

Решение. а) функция $\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$. Тогда согласно определению изображения получим:

$$F(p)=\int_0^{\infty} 1\cdot e^{-pt}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^{N} 1\cdot e^{-pt}dt = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^N\right)=\frac{1}{p}$$

при $u = \operatorname{Re} p > 0$;

б) функция $f(t) = e^{4t}$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 4$. Поэтому изображение $F(p)$ может быть определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 4$. Имеем:

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{4t}\cdot e^{-pt}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^{N} e^{-(p-4)t}dt = -\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4}e^{-(p-4)t}\Big|_0^N\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{e^{-(p-4)N}}{p-4}\right)=\frac{1}{p-4}.$$

Функция $F(p)=\dfrac{1}{p-4}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 4$, но и на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки $p = 4$. Такая особенность наблюдается и для многих изображений.

3 Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t)=\sin t,\ t\ge 0.$$

Решение. Для $\operatorname{Re} p > 0$ имеем:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-px}dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt};\ du = -pe^{pt}dt; \\ dv = \sin t\,dt;\ v = -\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty}\cos t\ e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt};\ du = -pe^{-pt}dt; \\ dv = \cos t\,dt;\ v = \sin t \end{bmatrix} =$$

$$=1 - p\left(pe^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt\right)=$$

$$=1-p^2\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt.$$

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{(p-2)^2+9}\doteq 2e^{2t}\sin 3t;$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{(p-2)^2-9}{(p-2)\left((p-2)^2-9\right)}=\frac{2(p-2)}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{p-2}\doteq$$

$$\doteq 2e^{2t}\cos 3t - e^{2t}.$$

Итак, решение системы

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}\sin 3t, \\ y = e^{2t}(2\cos 3t - 1). \end{cases}$$

7 Решить дифференциальное уравнение $x'' - x = \dfrac{1}{e^t+2}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. Рассмотрим вспомогательное уравнение $\tilde{x}'' - \tilde{x} = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0) = \tilde{x}'(0) = 0$.

Применяя операционный метод, находим изображение:

$$\tilde{X}(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}$$

и соответствующий ему оригинал $\tilde{x}(t)=\int_0^t \operatorname{sh}\tau\, d\tau = \operatorname{ch} t - 1$.

Тогда решение исходного дифференциального уравнения есть:

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+e^{\tau}}\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(e^t - te^t - 1\right)+\operatorname{sh} t \ln\frac{1+e^t}{2}.$$

8 Найти переходные значения тока и напряжений (i, u_r, u_C) в цепи, изображенной на рисунке 26, при переключении рубильника P из положения 1 в положение 2, если $U = 100$ В, $r = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ.

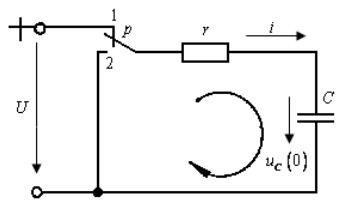

Рисунок 26 – Электрическая цепь к типовому примеру 8

6 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - 2x - 3y = 3e^{2t}, \\ y' + 3x - 2y = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющую начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$. Тогда

$$x'(t) \doteq pX(p),$$

$$y'(t) \doteq pY(p) - 1,$$

$$e^{2t} \doteq \frac{1}{p-2}.$$

Переход к уравнениям в изображениях дает систему операторных уравнений

$$\begin{cases} pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) = \dfrac{3}{p-2}, \\ pY(p) + 3X(p) - 2Y(p) = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(p)(p-2) - 3Y(p) = \dfrac{3}{p-2}, \\ Y(p)(p-2) + 3X(p) = 1. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ 3 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^2 + 9,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{p-2} & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{3}{p-2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = p - 2 - \frac{9}{p-2} = \frac{(p-2)^2 - 9}{p-2}.$$

Тогда

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = 1 - p^2 \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt.$$

Выразим искомый интеграл:

$$(1 + p^2) \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = 1.$$

Тогда

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = \frac{1}{1+p^2}.$$

4 Пользуясь свойством подобия, найти изображение функции

$$f(t) = \sin 2t, \quad t \ge 0$$

Решение. Так как $\sin t = \dfrac{1}{p^2+1}$, $\operatorname{Re} p > 0$, то по свойству подобия получим:

$$\sin 2t \doteq \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{4}{p^2+4} = \frac{2}{p^2+4}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

5 Пользуясь свойством смещения, найти изображение оригинала $f(t) = e^{-t} \cos 2t$, $t \ge 0$

Решение. Так как $\cos 2t \doteq \dfrac{p}{p^2+4}$ и $a = -1$, то по свойству смещения получим:

$$e^{-t} \cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

6 Пользуясь свойством запаздывания, найти изображение оригинала

$$f(t-1) = (t-1)^2 \eta(t-1).$$

Решение. Для функции $f(t) = t^2 \eta(t)$ имеем $f(t) \doteq \dfrac{2}{p^3}$. По свойству запаздывания находим:

$$(t-1)^2 \eta(t-1) \doteq e^{-p} \frac{2}{p^3}.$$

7 Найти изображение оригинала $f(t)$, заданного графиком на рисунке 21.

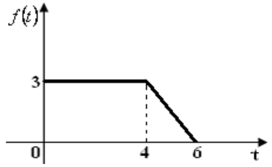

Рисунок 21 – График функции $f(t)$ к типовому примеру 7

Решение. Аналитическое выражение для функции $f(t)$ имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{ при } t<0, \\ 3, \text{ при } 0\le t<4, \\ 9-\dfrac{3}{2}t, \text{ при } 4\le t<6, \\ 0, \text{ при } t\ge 6. \end{cases}$$

С помощью единичной функции Хевисайда функцию $f(t)$ можно записать следующим образом:

$$f(t)=3\eta(t)-3\eta(t-4)+\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6)=$$

$$=3\eta(t)+\left(6-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6).$$

Для нахождения изображения этой функции представим ее в форме:

$$f(t)=3\eta(t)+\varphi_1(t-4)\eta(t-4)+\varphi_2(t-6)\eta(t-6),$$

Имеем:

$$f(t)=3\eta(t)-\frac{3}{2}(t-4)\eta(t-4)+\frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$$

Отсюда $\varphi_1(t)=-\dfrac{3}{2}t$, $\varphi_2(t)=\dfrac{3}{2}t$. Так как

$$\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t\doteq-\frac{3}{2p^2},\ \varphi_2(t)=\frac{3}{2}t\doteq\frac{3}{2p^2},$$

то по свойству запаздывания находим изображение

$$f(t)\doteq\frac{3}{p}-\frac{3}{2p^2}e^{-4p}+\frac{3}{2p^2}e^{-6p}.$$

$$p^2X(p)-p+pX(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Решая уравнение, находим $X(p)$

$$X(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}=\frac{\tau^2}{2}+1\doteq\tilde{x}(\tau)$$

Заменив τ на $t-1$, получим решение $x(t)$ исходной задачи Коши

$$x(t)=\frac{(t-1)^2}{2}+1.$$

5 Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'-2y-4z=\cos t, \\ z'+y+2z=\sin t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$ и $z(0)=0$.

Решение. Пусть $y(t)\doteq Y(p)$ и $z(t)\doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к данной системе, получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (-2+p)Y-4Z=\dfrac{p}{p^2+1}, \\ Y+(2+p)Z=\dfrac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Определитель данной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2+p & -4 \\ 1 & 2+p \end{vmatrix}=p^2.$$

Тогда решение относительно изображений есть

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p^2(p^2+1)}=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Переходя от найденных изображений к оригиналам, при $t>0$ получим:

$$y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,$$

$$z(t)=-2t+2\sin t.$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p)$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Откуда

$$X(p) = \frac{2\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)}{p^2\left(p^2+4\right)} = \left(\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2\left(p^2+4\right)}\right)\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Итак,

$$X(p) = \frac{1}{2p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{2p^2} - \frac{1}{2\left(p^2+4\right)} + \frac{e^{-p}}{p^2+4} - \frac{e^{-2p}}{2\left(p^2+4\right)} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{2} t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1) + \frac{1}{2}(t-2)\eta(t-2) - \frac{1}{4}\sin 2t\eta(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\eta(t-1) - \frac{1}{4}\sin 2(t-2)\eta(t-2).$$

Преобразуя, получим:

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\eta(t) + \left(\frac{\sin 2(t-1)}{2} - (t-1)\right)\eta(t-1) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}(t-2) - \frac{\sin 2(t-1)}{4}\right)\eta(t-2).$$

4 Решить задачу Коши

$$x''(t) + x'(t) = t,$$

$$x(1) = 1,\ x'(1) = 0.$$

Решение. Положим $t = \tau + 1$. Тогда $x(t) = x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$. Значит,

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1,$$

$$\tilde{x}(0) = 1,\ \tilde{x}'(0) = 0,$$

так как значению $t = 1$ отвечает значение $\tau = 0$.

Пусть $\tilde{x}(\tau) \doteq X(p)$. Тогда

$$\tilde{x}'(\tau) = pX(p) - 1,$$

$$\tilde{x}''(\tau) = p^2 X(p) - p,$$

и операторное уравнение примет вид:

8 Найти изображение π -периодичной функции

$$f(t) = |\sin t|$$

при $0 \le t \le \pi$, график которой представлен на рисунке 22.

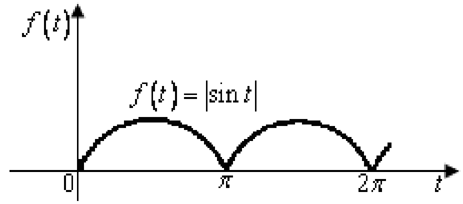

Рисунок 22 – График π -периодичной функции $f(t) = |\sin t|$

*Решение***.** Учитывая типовой пример 3 и свойство изображения периодической функции, имеем:

$$|\sin t| \doteq \frac{1}{1 - e^{-\pi \cdot p}} \cdot \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-\pi \cdot p}} \cdot \left.\frac{e^{-pt}(p\sin t - \cos t)}{p^2+1}\right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1 + e^{-\pi p}}{\left(1 - e^{-\pi p}\right)\cdot\left(p^2+1\right)}.$$

9 Найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Так как $f(0) = \sin^2 0 = 0$, и

$$\left(\sin^2 t\right)' = 2\sin t\cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4},$$

то

$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p).$$

Откуда

$$F(p) = \frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Значит,

$$\sin^2 t \doteq \frac{2}{p\left(p^2+4\right)};$$

10 Найти изображение функции $f(t)=t^2e^{3t}$.

Решение. Имеем $e^{3t} \doteq \frac{1}{p-3}$.

Применяя свойство дифференцирования изображения, получаем

$$t^2e^{3t} \doteq (-1)^2\left(\frac{1}{p-3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(p-3)^2}\right)' = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

11 Найти изображение оригинала $\int_0^t \tau e^{\tau} d\tau$.

Решение. Так как $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$, то по свойству дифференцирования изображения имеем:

$$te^t \doteq -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

По свойству интегрирования оригинала получим:

$$\int_0^t \tau e^{\tau} d\tau = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

12 Используя свойство интегрирования изображения, найти изображение интегрального синуса $\mathrm{Si}\, t = \frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, то по свойству интегрирования изображения получим:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

13 Найти изображение оригинала $\psi(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{\tau} d\tau$.

Решение. Оригинал $\psi(t)$ есть свертка оригиналов $g(t)=t$, $f(t)=e^t$. По свойству свертки имеем:

$$y''(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p\cdot y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 15p - 2,$$

$$y'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p\cdot y'(0) - y''(0) =$$
$$= p^3F(p) - 15p^2 - 2p - 56.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение и преобразовывая, получим:

$$Y(p) = \frac{15(p^2-p-6)+2(p-1)+56}{p^3-p^2-6p} = \frac{15p^2-13p-36}{p(p+2)(p-3)} =$$
$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3}.$$

По таблице оригиналов находим:

$$\frac{1}{p} \doteq 1,\quad \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t},\quad \frac{1}{p-3} \doteq e^{3t}.$$

Тогда получаем:

$$y(t) = 6 + 5\,\mathrm{e}^{-2t} + 4\,\mathrm{e}^{3t}.$$

3 Решить задачу Коши

$$x'' + 4x = f(t),$$
$$x(0) = x'(0) = 0,$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t<0, \\ 2t, & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 4-2t, & \text{при } 1 \le t \le 2, \\ 0, & \text{при } t>2. \end{cases}$$

Решение. С помощью единичной функции Хевисайда запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением:

$$f(t) = 2t\eta(t) - 2t\eta(t-1) + (4-2t)\eta(t-1) - (4-2t)\eta(t-2) =$$
$$= 2t\eta(t) - 4(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2).$$

Применяя формулу

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p),$$

получим

$$f(t) \doteq \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p} = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Полагая $x(t) \doteq X(p)$ и учитывая начальные условия, получим

4 Для электрической цепи (рисунок 25) определить напряжение на элементе L_1 цепи при подключении постоянной э. д. с. $e(t)=E$ (в случае необходимости положить $u_C(0)=0$.

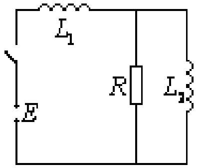

Рисунок 25 – Электрическая цепь к задаче 4

Примеры оформления решения

1 Решить уравнение $x''+4x=t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$.

Решение. Пусть $x(t)\doteq X(p)$.

По свойству дифференцирования оригинала

$$x''(t)\doteq p^2X(p)-px_0-x_1;\ f(t)\doteq t=\frac{1}{p^2}.$$

В результате приходим к алгебраическому уравнению:

$$p^2X(p)-px_0-x_1+4X(p)=\frac{1}{p^2}$$

Отсюда получаем:

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p^2+4)}+\frac{px_0}{p^2+4}+\frac{x_1}{p^2+4}$$

Разложив изображение $X(p)$ на простейшие дроби и используя таблицу изображений, находим решение задачи Коши:

$$X(p)=\frac{1}{4p^2}-\frac{1}{4(p^2+4)}+\frac{px_0}{p^2+4}+\frac{x_1}{p^2+4}\doteq$$

$$\doteq x(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t+x_0\cos 2t+\frac{x_1}{2}\sin 2t.$$

2 Решить уравнение $y'''-y''-6y'=0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=15$, $y'(0)=2$, $y''(0)=56$.

Решение. Пусть $y(t)\doteq Y(p)$. Тогда

$y'(t)\doteq p\cdot Y(p)-y(0)=pY(p)-15$,

$$\psi(t)\doteq\Psi(p)=F(p)G(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Тема 2 Восстановление оригинала по изображению

Найти оригиналы по изображению:

1 $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

2 $\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

3 $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

4 $\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

5 $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

6 $e^{-\frac{1}{p}}-1$.

7 $\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

8 $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

9 $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$.

10 $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

11 $\dfrac{p+1}{p^2+4p+5}$.

12 $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

13 $\dfrac{1}{p+2p+p^3}$.

14 $\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

15 $\dfrac{e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}}{p^2+1}$.

16 $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

17 $\sin\dfrac{1}{p}$.

18 $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

19 $\dfrac{p}{(p^3+1)^2}$.

20 $\dfrac{p}{p^2+2p+2}$.

21 $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

22 $\dfrac{3p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение. Найдем оригинал непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений. Поскольку

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p^2+1}\doteq\sin t, \qquad \frac{p}{p^2+1}\doteq\cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\doteq 2\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau+0=t\cos t+\sin t.$$

2 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$.

Решение. Из таблицы изображений имеем $\dfrac{2}{p^2+4}\doteq\sin 2t$. Используя свойства линейности и интегрирования оригинала, находим:

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4}\doteq\frac{1}{2}\int_0^t\sin 2\tau d\tau=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\Big|_0^t=\frac{1}{4}(1-\cos 2t).$$

3 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$.

Решение. Функция $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ является аналитической в точке $p=\infty$. Разложение ее в ряд Лорана в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид:

3) $\begin{cases} y'+z=2\sin t, \\ z'+y=-1, \end{cases}$ $y(0)=0$, $z(0)=1$;

4) $\begin{cases} y'+y-3z=2, \\ z'-y-z=5\cos t, \end{cases}$, $y(0)=1$, $z(0)=0$;

5) $\begin{cases} y'-y+z=\operatorname{sh} t, \\ z'+y+z=t, \end{cases}$ $y(0)=0$, $z(0)=-1$;

6) $\begin{cases} y'-y+3z=4\sin 2t, \\ z'+y+z=4t, \end{cases}$ $y(0)=1$, $z(0)=-1$;

7) $\begin{cases} y'+y-z=t^2, \\ z'-y-z=\operatorname{ch} t, \end{cases}$ $y(0)=-1$, $z(0)=1$;

10) $\begin{cases} y'+9z=3e^t, \\ z'+y=8\operatorname{sh} t, \end{cases}$ $y(0)=0$, $z(0)=2$;

11) $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=0$;

12) $\begin{cases} x''-3x'+2x+y'-y=0, \\ -x'+x+y''-5y'+4y=0, \end{cases}$, $x(0)=x'(0)=y'(0)=0$; $y(0)=1$;

13) $\begin{cases} x'=-y-z, \\ y'=-x-z, \\ z'=-x-y, \end{cases}$ $x(0)=-1$, $y(0)=0$, $z(0)=1$.

3 Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$ пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t=0$ частица находится на расстоянии x_0, от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2=\lambda^2-\mu^2$, то смещение частицы определяется выражением $\dfrac{1}{n}e^{-\mu t}\left(nx_0\cos nt+\left(v_0+\mu x_0\right)\sin nt\right)$.

7) $x''' + x' = 1$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

8) $x''' - x'' = \sin t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

9) $x''' + x' = e^t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 2$,
$x''(0) = 0$;

10) $x'' - 2x' = e^{2t}$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

17) $x' + 3x = t^2$,
$x(0) = 0$;

18) $x'' + 4x = f(t)$,
$x(0) = x'(0) = 0$,
$f(t)$ изображена на рисунке 23;

19) $x'' + x = f(t)$,
$x(0) = x'(0) = 0$,
$f(t)$ изображена на рисунке 24;

20) $x'' - x = \dfrac{1}{e^t + 2}$,
$x(0) = x'(0) = 0$.

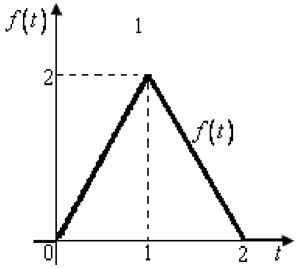

Рисунок 23 – График $f(t)$ для задачи 1 (18)

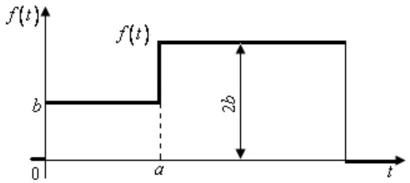

Рисунок 24 – График $f(t)$ для задачи 1 (19)

2 Решить системы уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

2) $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1$;

8) $\begin{cases} y' - 4z = 4t, \\ z' - y = 5\cos t, \end{cases}$
$y(0) = 2$, $z(0) = 0$;

9) $\begin{cases} y' + 9z = 3e^t, \\ z' + y = 8\,\mathrm{sh}\, t, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 2$;

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{p^2}\right)} = \left[\left|\frac{1}{p^2}\right| < 1 \Rightarrow |p| > 1\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \ldots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Следовательно, по 1-й теореме разложения при $t > 0$ имеем

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots = \cos t.$$

4 Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{-5}{p(p-1)(p^2+4p+5)}.$$

Р е ш е н и е. Представим $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{-5}{p(p-1)(p^2+4p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4p+5}$$

Находим коэффициенты:

$$A = 1;\ B = -\frac{1}{2};\ C = -\frac{1}{2};\ D = \frac{3}{2}.$$

Тогда по второй теореме разложения найдем оригинал:

$$\frac{-5}{p(p-1)(p^2+4p+5)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+4p+5} =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} \doteqdot$$

$$\doteqdot 1 - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

5 Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}$.

Р е ш е н и е. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь, для которой точки $p_1 = -1$, $p_2 = -2i$, $p_3 = 2i$ являются простыми полюсами. Так как:

– для $p_1 = -1$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1} = \left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1} = -\frac{2}{5},$$

– для $p_2 = -2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i} = \left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i} = \frac{-1-2i}{-8-4i} = \frac{1+2i}{8+4i} = \frac{4+3i}{20};$$

– для $p_3 = 2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i} = \left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i} = \frac{-1+2i}{-8+4i} = \frac{1-2i}{8-4i} = \frac{4-3i}{20},$$

то по второй теореме разложения получим:

$$f(t) = \frac{-2}{5}e^{-t} + \frac{4+3i}{20}e^{-2it} + \frac{4-3i}{20}e^{2it} =$$

$$= \frac{-2}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{3}{10}\sin 2t.$$

6 Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$.

Решение. Функция $F(p)$ в точках $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$ имеет полюсы 2-го порядка

Следовательно, по второй теореме разложения находим:

$$F(p) = \frac{p}{\left(p^2-1\right)^2} \doteq \frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p+1)^2} + \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p-1)^2} =$$

$$= \lim_{p\to 1}\frac{\left(te^{pt}p + e^{pt}\right)(p+1)^2 - e^{pt}p\cdot 2(p+1)}{(p+1)^4} +$$

$$+ \lim_{p\to -1}\frac{\left(te^{pt}p + e^{pt}\right)(p-1)^2 - e^{pt}p\cdot 2(p-1)}{(p-1)^4} =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(te^t + e^t\right)4 - 4e^t\right] + \frac{1}{16}\left[\left(-te^{-t} + e^{-t}\right)4 - 4e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}te^{-t} = \frac{1}{2}t\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

7 Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Решение. Аналитическим продолжением функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p \le s_0$ является функция $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяющая условиям леммы Жордана и имеющая две особые точки – полюсы первого порядка $p_1 = -i\omega$ и $p_2 = i\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re} p = u \ge 0$ и $t > 0$ имеем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{pt}dp = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{p_k t} =$$

$$= \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin\omega t.$$

Тема 3 Приложения операционного исчисления

1 Решить задачи Коши:

1) $x' + x = e^{-t}$,
$x(0) = 1$;

2) $x' + 2x = \sin t$,
$x(0) = 0$;

3) $x'' + x' = 1$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

4) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

5) $x'' - 2x' + 2x = 1$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

6) $x'' + x' = \cos t$,
$x(0) = 2$, $x'' + x' = 0$;

11) $x'' + x' = 4\sin^2 t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

12) $x^4 - x'' = \cos t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$,
$x''(0) = x'''(0) = 0$;

13) $x''(t) + x'(t) = 2t$,
$x(1) = 1$, $x'(1) = -1$;

14) $x''(t) + x(t) = -2\sin t$,
$x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$;

15) $x' - 2x = 1$,
$x(0) = 14$

16) $x'' + x' = e^{-t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;