

$f(x)$ равномерно-непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon .$

Число δ зависит только от ε и является общим для всех значений $x_1, x_2 \in X$ переменной x .

Геометрическая интерпретация равномерной непрерывности функции: если $f(x)$ равномерно-непрерывна на X , то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε , параллельными осям Ox и Oy , можно переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рисунок 2. 2).

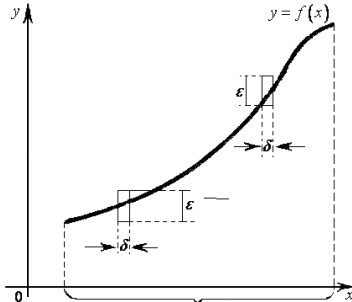


Рисунок 2. 2 – Равномерная непрерывность функции

Очевидно, что равномерно-непрерывная функция $f(x)$ на промежутке X является непрерывной на X .

Теорема (Кантора) Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, равномерно-непрерывна на этом отрезке.

Теорема не верна, если отрезок заменить интервалом.

Вопросы для самоконтроля

Определения

- 1 Сформулируйте определение числовой последовательности.
- 2 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности.
- 3 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?
- 4 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.
- 5 Перечислите свойства бесконечно малых последовательностей.
- 6 Дайте определение предела последовательности.

Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется сочетанием n элементов по k . Число всевозможных сочетаний из n элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Числа C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу:

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ & . & . & . & . & . & . & . & \\ & . & . & . & . & . & . & . & \end{matrix}$$

Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки. В каждой n строчке стоят последовательно числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$.

Число сочетаний используется при вычислении коэффициентов в формуле бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n .$$

Тема 3 Множество комплексных чисел

3.1 Понятие комплексного числа

3.2 Комплексная плоскость

3.3 Действия над комплексными числами в алгебраической форме

3.4 Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, где i удовлетворяет условию $i^2 = -1$, при этом число x называется действительной частью а число y – мнимой частью комплексного числа z .

Для комплексного числа z приняты обозначения

$$z = x + iy, \text{Re } z = x, \text{Im } z = y .$$

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа. Множество комплексных

чисел обозначается \mathbb{C} . Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x = x + 0 \cdot i$.

Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Отсюда

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{C}.$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Комплексное число $z = 0 + i \cdot 0$, называется *нулем* и обозначается 0 .

Понятие неравенства для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т.е. $z_1 \neq z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2 . Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными*.

Комплексное число $z = x + iy$ геометрически изображается на плоскости \mathbb{C}^2 *точкой* с координатами x, y , или *вектором* \vec{z} , проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y . При этом координатную плоскость Oxy называют *комплексной плоскостью* и обозначается \mathbb{C} , ось абсцисс – *действительной осью*, ось ординат – *мнимой осью* комплексной плоскости (рисунк 1.1).

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $z(x, y)$ до начала координат и обозначается $|z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ , образованный положительным направлением Ox и вектором \vec{z} .

Обозначается $\text{Arg } z$.

Аргумент z ($z \neq 0$) определяется равенствами (рисунок 1.1):

Тогда на множестве Y обратная функция $x = f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1 (*устойчивость знака непрерывной функции*) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0 , в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (*прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение*) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ , в которой значение функции равно нулю:

$$f(x): f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a; b): f(x_0) = 0.$$

3 Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C , заключенного между A и B , найдется такая точка $c \in [a; b]$, что $f(c) = C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (*ограниченность непрерывных функций*) Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (*достижение непрерывной функцией своих точных граней*) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M = f(x_1) = \sup_{[a; b]} f(x), \quad m = f(x_2) = \inf_{[a; b]} f(x).$$

Из множества функций, непрерывных на числовом промежутке, выделяют равномерно-непрерывные функции.

Функция $f(x)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$:

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел: равен бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty.$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a; b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b . Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой* \mathbb{R} , если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, является функцией, непрерывной для любого $x \in \mathbb{C}$.

Всякая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{C}$, для которой $Q(x) \neq 0$. Здесь $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений.

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$.

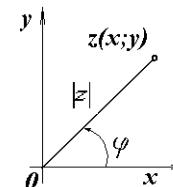


Рисунок 1. 1 – Комплексная плоскость \mathbb{C}

Тогда $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей этих чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексного числа z_1 на $z_2 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под *частным* $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z , такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексно-сопряженное знаменателю число \bar{z}_2 :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Возведение комплексного числа z в степень n , $n \in \mathbb{Z}$, рассматривается как умножение числа z на себя n раз: z^n .

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любому комплексному числу $z \in \mathbb{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка $M(x; y) \in \mathbb{C}^2$, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x , y . Вводя полярные координаты (полярная ось u совпадает с положительным направлением действительной оси Ox , полюс O – с началом координат O , полярный угол φ равен углу между полярной осью и лучом OM), эту точку можно однозначно определить заданием главного значения аргумента $\arg z$ и модуля $|z|$ комплексного числа z .

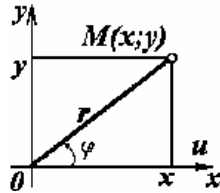


Рисунок 1. 2 – Связь декартовых и полярных координат

Из рисунка 1. 2 видно, что модуль $|z|$ совпадает с полярным радиусом r точки $M(x; y)$, главный аргумент $\arg z$ – с полярным углом φ , при этом $0 \leq r < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Очевидно, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Тогда

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Выражение $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X , и множество ее значений Y .

Число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X , если выполняются следующие условия

$$1) \forall x \in X \quad f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m);$$

2) для любого числа $M' < M$ ($m' > m$) найдется такая точка $x' \in X$, что $f(x') > M'$ ($f(x') < m'$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y = f(x)$ на множестве X , условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут $\sup_X f(x) = +\infty$, если снизу, то $\inf_X f(x) = -\infty$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A$ и $f(x_0) \neq A$.

Вводя новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq x_0, \\ A, & \text{если } x = x_0, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f_1(x) = A = f_1(x_0),$$

т. е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет *непрерывной слева*, если $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ – *непрерывной справа*.

равен $f(x_0)$:

$$f(x) \text{ непрерывна справа в точке } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x) \text{ непрерывна слева в точке } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

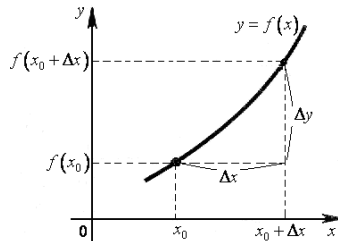


Рисунок 2. 1 – Определение непрерывности функции

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ -окрестности точки x_0 , непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 (по Гейне)*, если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0 , последовательность соответствующих значений функции ($f(x_n)$) сходится к $f(x_0)$:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in U(\delta; x_0): \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех точках некоторого множества X , называется *непрерывной на множестве X* .

Если $X = [a; b]$, то для непрерывности функции на $[a; b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a , и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b . Класс непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций обозначается $C[a; b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x) \neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Показательная форма комплексного числа. Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, получаем

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Выражение $z = r e^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа.

Здесь $r = |z|$; $\varphi = \arg z + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Если $n \in \mathbb{Z}$, $z = r e^{i\varphi}$, то

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Вопросы для самоконтроля

Определения

- 1 Какие множества называются равными?
- 2 Что называется подмножеством множества?
- 3 Какое подмножество называется собственным подмножеством множества?
- 4 Что называется декартовым произведением множеств?
- 5 Что называется функцией?
- 6 Дайте определение области определения, области значения функции.
- 7 Какие множества называются эквивалентными?
- 8 Какое множество называется счетным?
- 9 Какие множества называются ограниченными?
- 10 В чем заключается метод математической индукции?
- 11 Дайте определение точной верхней (нижней) грани множества.
- 12 Какое число называется комплексным?
- 13 Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными?
- 14 Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

Формулировки теорем и формулы

- 1 Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения множеств.
- 2 Как изображаются комплексные числа на плоскости?
- 3 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме. Запишите соответствующие формулы.
- 4 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Запишите соответствующие формулы.
- 5 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме. Запишите соответствующие формулы.
- 6 Перечислите арифметические действия над последовательностями.
- 7 Перечислите свойства сходящихся последовательностей.
- 8 Сформулируйте с помощью логических символов определение расходящейся последовательности, бесконечно большой последовательности.
- 9 Перечислите способы задания функций.
- 10 Какими элементарными свойствами обладают функции?

Доказательство теорем

- 1 Сформулируйте и докажите теорему о существовании точной верхней (нижней) грани.
- 2 Сформулируйте и докажите лемму о вложенных отрезках.

Тема 5 Непрерывность функции

- 5.1 Определение непрерывности функции
- 5.2 Точки разрыва и их классификация
- 5.3 Свойства непрерывных функций
- 5.4 Равномерная непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если выполняются следующие три условия:

- 1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 , т. е. $x_0 \in D(f)$;
- 2) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется *разрывной в точке* x_0 , а точка x_0 – *точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (по Коши), если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x , для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ приращение функции в точке x_0 . При фиксированном x_0 переменной x приращение Δy является функцией аргумента Δx . Геометрический смысл приращений виден на рисунке 2. 1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy , т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0 , если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он

$$\sim \ln(1 + \alpha(x)) \sim e^{\alpha(x)} - 1, \quad \sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n} \alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x \rightarrow x_0$ $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$ и обозначается: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x) \in o(1)$ при $x \rightarrow x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \neq 0$, $k > 0$, то $\alpha(x)$ называется функцией *k-го порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \quad \alpha(x) = o(\beta(x)), \quad \alpha(x) \sim \beta(x) \quad \text{при } x \rightarrow x_0$$

называются *асимптотическими оценками*.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Вопросы и задачи на понимание

- 1 Приведите примеры множеств, ограниченных сверху, снизу.
- 2 Приведите примеры числовых множеств X , у которых: а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$. Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольшее, а в случаях в) и г) наименьшее число?
- 3 Что означает запись $\sup X = +\infty$ и $\inf X = -\infty$?

Раздел 2 Теория пределов

Тема 1 Числовые последовательности

- 1.1 Определение числовой последовательности
- 1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности
- 1.3 Монотонные последовательности
- 1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

В курсе школьной математики кратко излагались элементы теории последовательности при изучении арифметической и геометрической прогрессий, при последовательных приближениях иррациональных чисел.

Числовой последовательностью (x_n) называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел \mathbb{N} и принимающая свои значения из множества действительных чисел $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и обозначается:

$$x_n = (x(1); x(2); \dots; x(n); \dots) \quad \text{или} \quad (x_n) = (x_1; x_2; \dots; x_n; \dots).$$

Числа x_1, x_2, x_3, \dots называются *элементами (членами)* последовательности (x_n) , x_n – *формула* общего члена последовательности, n – *номер* общего члена последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Основными *способами задания* последовательности являются: формула n -го члена, рекуррентный, словесный, графический.

Пусть даны две последовательности (x_n) , (y_n) .

Суммой последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $(x_n + y_n)$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей.

Произведением последовательности (x_n) на число m называется последовательность $(m \cdot x_n)$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m .

Произведением последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $(x_n \cdot y_n)$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей.

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля, то частным последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$). Числа M и m называются *верхней и нижней гранями* числовой последовательности (x_n) :

$$(x_n) - \text{ограничена сверху} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M.$$

$$(x_n) - \text{ограничена снизу} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m.$$

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m \leq x_n \leq M$:

$$(x_n) - \text{ограничена} \Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq x_n \leq M.$$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n| \leq A$.

Последовательность (x_n) называется *неограниченной*, если для любого действительного числа $A > 0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \geq A$, т.е. либо $x_n \geq A$ или $x_n \leq -A$:

$$(x_n) - \text{неограниченна} \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}_+ \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq A.$$

– если функция $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ – бесконечно малая, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ – бесконечно большая. Если функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ – бесконечно большая, то функция $\frac{1}{f(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ – бесконечно малая.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = e.$$

Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0 \in \mathbb{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0 , в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0,$$

то они называются *бесконечно малыми одного порядка малости*.

Обозначается: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x) \in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ *ограничена*.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,

то они называются *эквивалентными (асимптотически равными)* при $x \rightarrow x_0$.

Обозначается: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ или $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то при $x \rightarrow x_0$

справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \operatorname{arcsin} \alpha(x) \sim \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim$$

и они равны между собой $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Критерий Коши существования предела функции: для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0 такая, что для любых $\forall x', x'' \in U(\delta; x_0)$ имеет место неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Тема 4 Бесконечно малые функции

- 4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций
- 4.2 Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций
- 4.3 Первый и второй замечательные пределы
- 4.4 Сравнение асимптотического поведения функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или бесконечно малой) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

- конечная сумма бесконечно малых функций есть функция, бесконечно малая;
- произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция;
- произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция;
- произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;
- частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция;

Последовательность (x_n) называется *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$.

Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$.

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$.

Последовательность (x_n) называется *убывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$.

Последовательность (x_n) называется *монотонной*, если является одной из выше перечисленных. Последовательность (x_n) называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$:

$$(\alpha_n) - \text{б.м.п.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- бесконечно малая последовательность (α_n) ограничена;
- сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
- произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
- произведение бесконечно малой последовательности (α_n) на ограниченную (x_n) есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность (x_n) называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа $c > 0$ существует такой номер $N(k)$ такой, что для всех номеров $n > N(k)$ выполняется неравенство $|x_n| > c$:

$$(x_n) - \text{б.б.п.} \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists N(k): \forall n \geq N(k) |x_n| > c.$$

Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обяза-

тельно бесконечно большая. Если (x_n) бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ является бесконечно малой последовательностью. Если (α_n) бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ является бесконечно большой последовательностью.

Тема 2 Предел последовательности

- 2.1 Определение предела последовательности
- 2.2 Свойства предела последовательности
- 2.3 Критерий Коши сходимости последовательности
- 2.4 Замечательные пределы

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности (x_n) , если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ и обозначается: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся* (к числу a), а последовательности, не имеющие конечного предела, – *расходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n - a)$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где (α_n) – бесконечно малая последовательность, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Бесконечно большая последовательность (x_n) имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \exists N(A) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(A) \quad |x_n| > A.$$

$f(x) \leq \varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$;

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$, то существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$;

– если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y = f(u(x))$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ ($u(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$), $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u) = A$, то существует предел сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Левой δ -окрестностью точки x_0 называется множество всех x , удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \leq 0$:

$$U(\delta; x_0 - 0) = \{x \mid -\delta < x - x_0 \leq 0\}.$$

Правой δ -окрестностью точки x_0 называется множество всех x , удовлетворяющих неравенству $0 \leq x - x_0 < \delta$:

$$U(\delta; x_0 + 0) = \{0 \leq x - x_0 < \delta\}.$$

Число A называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы

($f(x)$ неограничена снизу на $X \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists x \in X : f(x) < M$).

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(\delta; x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Число A называется *пределом (по Гейне)* функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любой последовательности точек $x_n \in \mathring{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0 , последовательность соответствующих значений функции ($f(x_n)$) сходится к A :

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in \mathring{U}(\delta; x_0) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Число A называется *пределом (по Коши)* функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Предел функции обладает следующими *свойствами*.

– функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела;

– если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности $\mathring{U}(\delta; x_0)$;

– если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, ($b \neq 0$);
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

– если в $\mathring{U}(\delta; x_0)$ справедливо функциональное неравенство

Сходящиеся последовательности обладают следующими *свойствами*:

- сходящаяся последовательность имеет только один предел;
- если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |x_n| \leq M;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

– частное двух сходящихся последовательностей (x_n) и (y_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n};$$

– если все элементы сходящейся последовательности (x_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$);

– пусть последовательности (x_n) , (y_n) , (z_n) таковы, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Тогда последовательность (y_n) сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$;

– каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для любого малого действительного числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n , больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$:

(x_n) – фундаментальна \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Из определения следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+p} - x_n| = 0$.

Критерий Коши сходимости последовательности: Для того чтобы последовательность (x_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пределы, к которым сводятся вычисления многих пределов условно называются замечательными пределами. Ниже приводятся некоторые из них:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \quad (a \in \mathbb{R}); & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} &= 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \quad (a \in \mathbb{R}); & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} &= 0. \end{aligned}$$

Тема 3 Предел функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции

3.2 Способы задания функции

3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши

3.4 Односторонние пределы функции

Под функциями понимается отображение числовых множеств.

Пусть X – произвольное подмножество действительных чисел, $X \subseteq \mathbb{R}$.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция* f . Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, y – *зависимой переменной*, множество X называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$, а множество $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ – *множеством значений* функции и обозначается $E(f)$.

Если о функции говорить как об отображении $f: X \rightarrow Y$, то $f(x)$ называется *образом элемента* x , а x – *прообразом элемента* $f(x)$. При этом множество Y называется *образом множества* X ,

функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\frac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x) = c$, $c = \text{const}$, $D(f) = \mathbb{R}$. Любое число $T \in \mathbb{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода T функция не имеет.

Монотонность функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ возрастает на } X &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2); \\ f(x) \text{ убывает на } X &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве X , если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ не убывает на } X &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2); \\ f(x) \text{ не возрастает на } X &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2). \end{aligned}$$

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а неубывающие и невозрастающие – *монотонными*.

Ограниченность функции. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$):

$$\begin{aligned} f(x) \text{ ограничена сверху на } X &\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad f(x) \leq M; \\ (f(x) \text{ ограничена снизу на } X &\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad f(x) \geq M). \end{aligned}$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M , что для любого $x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \leq M$:

$$f(x) \text{ ограничена на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subseteq D(f)$ если условия ограниченности не выполняются:

$$f(x) \text{ неограничена сверху на } X \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists x \in X : f(x) > M;$$

ются корнями уравнения $f(x)=0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox , а в интервале, на котором она отрицательна, – ниже оси Ox ; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox .

Четность и нечетность функции. Числовая функция $y=f(x)$ называется *четной (нечетной)*, если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O , т. е. для каждой точки $x \in D(f)$ существует точка $-x \in D(f)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=f(x) \quad (f(-x)=-f(x)).$$

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями *общего* вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны.

При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x > 0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x < 0$.

Периодичность функции. Функция $y=f(x)$, определенная на множестве $D(f)$, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $\forall x \in D(f)$ выполняются следующие условия:

1) $x-T, x+T \in D(f)$;

2) $f(x)=f(x-T)=f(x+T)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если число T является периодом функции $y=f(x)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется *основным периодом*. Если T – период функции $y=f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной T , а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in \mathbb{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T , то

множество X – *прообразом* множества Y .

Чтобы определить функцию $y=f(x)$, нужно задать множество X и закон (правило, соответствие) f , переводящий элементы x множества X в элементы y множества Y .

Пусть функции $u=\varphi(x)$ и $y=f(u)$ определены на множествах X и U соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f . Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u , а функция f переводит элементы u в элементы y : $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y$.

Таким образом, каждому значению x ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y=f(\varphi(x))$. В этом случае y называется *сложной* функцией (*композицией* функций f и φ) аргумента x . При этом функция $u=\varphi(x)$ называется *промежуточным* аргументом, x – *независимым* аргументом. *Обозначается:* $y=f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Обратная функция. Пусть функция $y=f(x)$ такова, что каждое значение y она принимает только при одном значении x . Такая функция называется *обратимой*. Тогда уравнение $y=f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x , т.е. каждому y соответствует единственное значение x . Это соответствие определяет функцию, которая называется *обратной* к функции f .

Обозначается: $x=f^{-1}(y)$ или f^{-1} .

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f , то функция f является обратной по отношению к f^{-1} , т.е. $(f^{-1})^{-1}=f$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*, т.е. $f(f^{-1}(y))=y$ и $f^{-1}(f(x))=x$.

Если числовая функция $y=f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x , а зависимую переменную через y , то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy , т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

Функция задается одним из следующих способов.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x , при которых данная формула имеет смысл.

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ может быть *неявно* задана уравнением $F(x; y) = 0$, если $\forall x \in [a; b] F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x; y) = 0$ относительно y , удастся получить явное задание функции $y = f(x)$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в *параметрическом* виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на T , то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$$

задана *параметрическими уравнениями* и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t , *параметр*, $t \in T$.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрическими уравнениями.

Действительно,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t , оказываются простыми.

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; \dots; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; \dots; y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Графиком Γ функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x; y)$ плоскости \square^2 , координаты которых связаны данной функциональной зависимостью:

$$\Gamma = \{ M(x; y) \in \square^2 \mid y = f(x) x \in D(f) \}.$$

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т.е. нули функции явля-