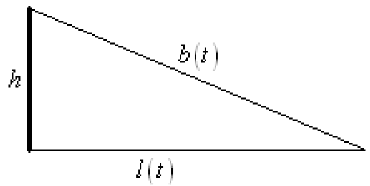

Рисунок 3. 2 – Геометрическая интерпретация задачи 5

Тогда длина каната представляет собой функцию

$$b(t)=\sqrt{l^2(t)+h^2},$$

производная которой имеет вид

$$b^{'}(t)=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Поскольку канат подтягивают, то по условию задачи $b^{'}(t)=-2$.

Отсюда

$$-2=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Разрешая относительно $l^{'}(t)$, получим скорость движения баржи

$$l^{'}(t)=\frac{-2\sqrt{l^2(t)+h^2}}{l(t)}=-2\frac{b(t)}{l(t)}.$$

Ускорение движения баржи есть вторая производная от функции $l(t)$:

$$a(t)=-l^{''}(t)=2\frac{b'(t)\cdot l(t)-b(t)\cdot l'(t)}{l^2(t)}.$$

Если t_0 – тот момент времени, когда $l(t_0)$=8, то

$$b(t_0)=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5},$$

$$l'(t_0)=\frac{-2\cdot 4\sqrt{5}}{8}=-\sqrt{5},$$

$$a(t_0)=2\frac{b'(t_0)\cdot l(t_0)-b(t_0)\cdot l'(t_0)}{l^2(t_0)}=\frac{1}{8}\ (\text{м/с}^2).$$

6 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

Применяя правило дифференцирования суммы, получим:

$$y'=\left(3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{2}{3}}\right)'=\left(3x^{-\frac{1}{3}}\right)'-\left(6x^{-\frac{2}{3}}\right)'=3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'-6\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}-6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

б) по правилу дифференцирования дроби имеем:

$$y'=\left(\frac{3x-2}{4x+5}\right)'=\frac{(3x-2)'\cdot(4x+5)-(4x+5)'\cdot(3x-2)}{(4x+5)^2}=$$

$$=\frac{3\cdot(4x+5)-4\cdot(3x-2)}{(4x+5)^2}=\frac{23}{(4x+5)^2}.$$

в) используя правила дифференцирования суммы и произведения, получим:

$$y'=\left(x\cos x-x^2\sin x\right)'=$$

$$=(x)'\cdot\cos x+x\cdot(\cos x)'-\left(\left(x^2\right)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'\right)=$$

$$=\cos x-x\cdot\sin x-\left(2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x\right)=$$

$$=\cos x-3x\cdot\sin x-x^2\cdot\cos x.$$

Тема 2 Производная обратной и сложной функции

1 Определить области существования обратных функций $x=x(y)$ и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y=\operatorname{arctg}x$; в) $y=\arccos x$; д) $y=x+\ln x$ $(x>0)$;

б) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; г) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; е) $y=e^{\arcsin x}$.

2 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y=\cos^3 x^2$; л) $y=\sqrt[4]{(5-8x)^3}$;

б) $y=\sin\sqrt{x^2+4x-5}$; м) $y=e^{\cos 2x}$;

в) $y=\ln\sqrt{x^2+4x+5}$; н) $y=\operatorname{arctg}5x$;

г) $y = 2^{\sin 5x}$; о) $y = \ln\cos 4x$;

д) $y = \ln\arccos 2x$; п) $y = \log_{x^2} 2$;

е) $y = \sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x) - \ln\dfrac{1}{x}$; р) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$;

ж) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; с) $y = \dfrac{1+\operatorname{ch} 2x}{1-\operatorname{sh} 2x}$;

и) $y = e^{\operatorname{th}^2 x}$; т) $y = \log_2(\sin^2 x)$;

к) $y = \arccos^2 \sin(2x-1)$; у) $y = 5^{\operatorname{sh}^2(x+3)}$.

3 Вычислить значение производной функции

$$y = 2\sin^4 x\cdot\operatorname{tg} x + \cos^3 x \text{ в точке } x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

4 Используя логарифмическую производную, найти производные следующих функций:

а) $y = (\sin x)^{\cos x}$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

б) $y = (\operatorname{tg} x)^x$; д) $y = \sqrt[x]{x}$;

в) $y = \dfrac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}$; е) $y = \dfrac{(x^2-4)^3(x^3-x+5)^6}{\sqrt[5]{x^3+5x^2-x+4}}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти производную и дифференциал функции $y = \arcsin x$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$. В интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ она монотонна, ее производная $x'_y = \cos y$ не обращается в нуль. Следовательно, используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(перед квадратным корнем выбран знак «+», так как на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\cos y > 0$).

Тогда дифференциал равен $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 Найдите производные следующих сложных функций:

Так как при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$, при $1 < x < 3$ имеем $y' < 0$, то $x_1 = 1$ является точкой максимума. Так как при $1 < x < 3$ имеем $y' < 0$ и при $3 < x < 4$ имеем $y' > 0$, то $x_2 = 3$ является точкой минимума.

Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка $[-1;4]$ и в стационарных точках, принадлежащих отрезку:

$$f(-1) = -16,\ f(4) = 4,\ f(1) = 4,\ f(3) = 0.$$

Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x) = \min\{-16,4,4,0\} = -16,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x) = \max\{-16,4,4,0\} = 4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x = -1$, наибольшее – в точке $x = 1$ и на правом конце отрезка в точке $x = 4$. График данной функции изображен на рисунке 3. 1.

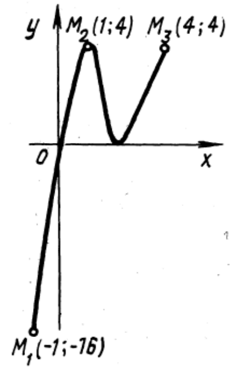

Рисунок 3. 1 – График функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-1;4]$

5 Баржу, палуба которой на $h = 4$ м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v = 2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние l=8м (по горизонтали)?

Р е ш е н и е. Пусть через t секунд после начала движения баржа (рисунок 3. 2) находится на расстоянии $l(t)$ м от пристани (по горизонтали).

Решая уравнение $y' = 0$, найдем

$$\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 1-2x^2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При этом функция y' не существует при $x = \pm 1$.

Значит, точками возможного экстремума являются $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. В точках $x = \pm 1$ экстремума нет, так как по определению производной точками экстремума могут быть лишь внутренние точки области определения.

Вторая производная функции имеет вид

$$y'' = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как $y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$, то функция имеет в точке $x_1 = -1/\sqrt{2}$ минимум, и $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$.

В точке $x_2 = 1/\sqrt{2}$ получим $y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$.

Значит, в точке $x_2 = 1/\sqrt{2}$ функция имеет максимум, и

$$y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

4 Найти на отрезке $[-1;4]$ глобальные экстремумы функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Решение. Определяем точки возможного экстремума (стационарные точки) функции $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9,\ 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Значит, $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

а) $y = \cos 4x$;

б) $y = (5x^3+8)^4$;

в) $y = \mathrm{tg}^5\, x$;

г) $y = \ln(\sin 2x)$;

д) $y = \mathrm{sh}\, x$.

Решение. а) аргументом функции является $4x$, поэтому эту функцию можно представить как

$$y = \cos u,$$

где $u = 4x$.

Так как $y' = -\sin u$, а $u' = 4$, то по формуле $y' = y_u{}' \cdot u_x{}'$ получаем: $y' = -4\sin 4x$.

б) обозначим $5x^3 + 8 = u$, тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y' = (u^4)' \cdot (5x^3+8)' = 4u^3 \cdot (15x^2) = 60x^2(5x^3+8)^3.$$

в) имеем:

$$y' = (\mathrm{tg}^5\, x)' = 5\,\mathrm{tg}^4\, x \cdot (\mathrm{tg}\, x)' = 5\,\mathrm{tg}^4\, x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\,\mathrm{tg}^4\, x}{\cos^2 x}.$$

г) используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y' = (\ln(\sin 2x))' = \frac{1}{\sin 2x} \cdot (\sin 2x)' = \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = .$$
$$= \mathrm{tg}\, 2x \cdot 2 = 2\,\mathrm{tg}\, 2x.$$

д) имеем

$$y' = (\mathrm{sh}\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x)' - \frac{1}{2}(e^{-x})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x.$$

3 Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Решение. Логарифмируя степенно-показательную функцию $y = x^x$, получим

$$\ln y = x \cdot \ln x.$$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

Тема 3 Производные и дифференциалы высших порядков

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y=y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

а) $x=3\cos t$, $y=3\sin t$; в) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$;

б) $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$; г) $x=-5t^2+2t^5$, $y=-3t^2+2t^3$

2 Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функций, заданных неявно уравнением:

а) $y^2+x^2+xy-3=0$; г) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

б) $x^2+2xy+y^2-8x+8y+16=0$; д) $\sin y-e^y-e^{-x}=0$;

в) $y+2x-\operatorname{arcctg} y=0$; е) $\operatorname{sh}(xy)+\operatorname{cth} x=0$.

Вычислить дифференциалы 2-го порядка в точке $M(1,1)$.

3 Найти производные 2-го порядка:

а) $y=4x^2-2x+3$; в) $y=x+\sqrt{4-x}$;

б) $y=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$; г) $y=\ln\dfrac{x+3}{x-3}$.

4 Найти производные 3-го порядка:

а) $y=3x^3-4x^2+5x-7$; в) $y=\sin 2x$;

б) $y=e^{3x}$; г) $y=x^4-5x^3+6x^2-2x+9$.

5. Найти производные n-го порядка:

а) $y=\ln x$; б) $y=2^x$; в) $y=\dfrac{1}{2x+5}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y=y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases}$$

где $0<t<\pi$.

Р е ш е н и е. Находим первую производную:

$$y'=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x\in(-\infty;0)\cup(0;1), \\ \dfrac{2-x}{x^3} & \text{при } x\in(1;+\infty). \end{cases}$$

и обращается в нуль в точке $x=2$. При этом производная не существует в точках $x=0$ и $x=1$. Поэтому точками возможного экстремума являются $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Они разбивают область определения на четыре интервала монотонности: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Видно, что $y'(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$, $y'(x)<0$ при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$, и монотонно убывает при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. Согласно первому достаточному условию локального экстремума, в точке $x_3=2$ функция достигает максимума, $y_{\max}=y(2)=\dfrac{1}{4}$, а в точке $x_2=1$ функция имеет минимум, $y_{\max}=y(1)=0$.

2 Найти экстремумы функции $y=1-(x-2)^{\frac{4}{5}}$.

Р е ш е н и е. Данная функция определена при всех $x\in\mathbf{R}$. Производная данной функции имеет вид

$$y'=-\frac{4}{5}(x-2)^{-\frac{1}{5}}=-\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}.$$

Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует при $x=2$. Поэтому точка $x=2$ является точкой возможного экстремума функции.

При $x<2$ имеем $y'>0$, при $x>2$ имеем $y'<0$. Согласно первому достаточному условию точка $x=2$ является точкой максимума, $y_{\max}=1$.

3 Найти экстремумы функции $y=x\sqrt{1-x^2}$.

Р е ш е н и е. Данная функция определена при $x\in[-1;1]$.

Найдем первую производную

$$y'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тема 6 Локальные и глобальные экстремумы функции

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$; г) $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$;

б) $y = \mathrm{ch}^2 x$; д) $y = \ln\left(x^2+1\right)$;

в) $y = x + \sqrt{x-3}$; е) $y = \dfrac{|x+1|}{(x-1)^2}$.

2 Найти глобальные экстремумы функции на отрезке:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-3;2]$;

б) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $[-2;2]$;

в) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0;1]$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции в ее области определения.

а) $y = \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$; б) $y = x\ln x$; в) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

4 Разложить число 80 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

5 Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

6 Проволока длиной l согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если площадь его наибольшая?

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Областью определения данной функции является множество $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Производная этой функции имеет вид

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{R}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Итак,

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\mathrm{ctg}\,t, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = \dfrac{(-\mathrm{ctg}\,t)'}{(R\cos t)'}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{r}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^3\left(\arccos\frac{x}{R}\right)} = -\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R^3}{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2 Найти производную функции заданной неявно

$$x^3 + x^2y^2 - xy - y^3 = 0$$

Р е ш е н и е. Продифференцируем данное уравнение по переменной x, считая, что y есть функция от x:

$$3x^2 + 2xy^2 + 2x^2yy' - y - xy' - 3y^2y' = 0.$$

Отсюда

$$y' = \frac{y-3x^2-2xy^2}{2x^2y-x-3y^2}.$$

3 Найти производную n-го порядка от функции $y=\sin x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, получаем:

$$y' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

……………………………………,

$$y^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

4 Найти производную второго порядка функции $y=\sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную данной функции:

$$y = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

Дифференцируя полученное выражение, получаем:

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x.$$

5 Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной уравнением: $x^2+y^2=R^2$.

Решение. Найдем первую производную $2x+2yy'=0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Дифференцируя данное уравнение вторично, получим:

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y-y'x}{y^2}.$$

Учитывая, что $y' = -\frac{x}{y}$, имеем:

$$y'' = -\frac{y-\left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}.$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{по свойствам бесконечно}\\ \text{малых функций}\end{array}\right] =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x^2+\ldots+\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n\cdot 6}\right)\cdot x^n\right)+o(x^n).$$

5 Вычислить число e с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Разложение функции $y=\mathrm{e}^x$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Заменив функцию $y=e^x$ многочленом Тейлора степени n, получим приближенное равенство

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

абсолютная погрешность которого

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1\le x\le 1$, то

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \le \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Полагая $x=1$, получаем приближенное значение числа e

$$\mathrm{e}^1 \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Чтобы определить, сколько нужно взять первых членов этой формулы для получения заданной точности, оценим величину остаточного члена $|R_{n+1}(x)|\le\varepsilon$.

Имеем $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$. Отсюда $(n+1)!>3000$ или $n>6$.

Следовательно, при $n=6$ получим вычисленное значение числа e с заданной точностью

$$e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = 2{,}718.$$

$f(x)=e^x$ заменим x на $\left(-x^3\right)$:

$$e^{-x^3}=1-\frac{x^3}{1!}+\frac{x^6}{2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!}+\frac{\left(-x^3\right)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x^3},\ 0<\theta<1$$

4 Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$.

Решение. Поскольку

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(-x)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

В разложение 5 с остаточным членом в форме Пеано при $m=-1$ имеем

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right).$$

При замене переменной x на $(-x)$, получаем

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left((-x)^n\right),$$

а при замене x на $\dfrac{x}{2}$:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$$

Тогда

$$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(-x)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left((-x)^n\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x^2+\ldots+\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n\cdot 6}\right)\cdot x^n\right)-\frac{1}{3}o\left((-x)^n\right)-\frac{1}{6}o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)=$$

Тема 4 Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

1 Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_k\in\mathbf{R}\ \ (k=0,1,\ldots,n),$$

вещественны, то производные $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, …, $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь действительные корни.

2 Найти точку ξ в формуле конечных приращений для функции

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(3-x^2\right) & \text{при } 0\le x\le 1,\\ \frac{1}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$$

на отрезке $[0;2]$.

3 Используя формулу Лагранжа, доказать справедливость неравенств:

а) $\left|\operatorname{arctg}x_1-\operatorname{arctg}x_2\right|\le\left|x_1-x_2\right|$, $\forall x_1,x_2\ \in$ □ ;

б) $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$ при $x>0$.

4 Справедлива ли формула Коши для функций $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^3$ на $[-1;1]$.

5 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$;

б) $\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\frac{x}{3}}{1-\cos3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2-3x-6}{x-2}$;

и) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$;

к) $\lim\limits_{x\to0+0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

л) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.

Примеры оформления решения

1 Проверить, удовлетворяет ли условиям теоремы Ролля функция:

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6\ ?$$

Решение. Преобразуем данную функцию к виду

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Отсюда $f(1)=f(2)=f(3)=0$. Поэтому теорема Ролля применима на отрезках $[2;3]$, $[1;2]$ и $[1;3]$. Поскольку данная функция представляет собой многочлен, то она определена и непрерывна на каждом из отрезков. Найдем производную:

$$f'(x)=3x^2-12x+11.$$

Очевидно, что для любых x функция $f'(x)$ дифференцируема на соответствующих интервалах. Таким образом, теорема Ролля справедлива на отрезках $[2;3]$, $[1;2]$ и $[1;3]$.

2 Доказать, что уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь два различных действительных корня на интервале $(0;1)$.

Решение. Предположим, что уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 на данном интервале.

Рассмотрим функцию $f(x)=16x^4-64x+31$.

Тогда $f(x_1)=f(x_2)=0$. При этом данная функция определена, непрерывна (как элементарная) на $[x_1;x_2]$ и дифференцируема на $(x_1;x_2)$. Следовательно, по теореме Ролля существует точка $\xi\in(x_1;x_2)\subset(0;1)$ такая, что $f'(\xi)=0$.

С другой стороны, $f'(x)=64x^3-64$. Отсюда уравнение $f'(\xi)=0$ имеет единственный корень в точке $\xi=1$, которая не принадлежит интервалу $(x_1;x_2)$. Получили противоречие. Значит, уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь два различных действительных корня на $(0;1)$.

3 Доказать, что $|\cos x_1-\cos x_2|\le|x_1-x_2|\quad\forall x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$ на отрезке $[x_1;x_2]$.

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому по формуле Лагранжа

$$f^{(4)}(x)=-\frac{1\cdot2\cdot3}{x^4},\qquad f^{(4)}(x)=-3!,$$

……………………………………………,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},\qquad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Тогда формула Тейлора для функции $y=\ln x$ в окрестности точки $x_0=1$ примет вид

$$\ln x=0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{2!}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, $\xi\in U(\delta;1)$.

Преобразуя полученное выражение, имеем

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1^2)}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Многочлен Тейлора функции $y=\ln x$ имеет вид

$$\ln x\approx(x-1)-\frac{(x-1^2)}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность вычислений составит

$$R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1},\ \xi=1+\theta(x-1),\ 0<\theta<1.$$

<u>2 способ</u>. Воспользуемся основным разложением в ряд Маклорена функции $f(x)=\ln x$. Заменим в разложении x на $(x-1)$:

$$\ln x=\ln(1+(x-1))=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x-1))^{n+1}}$, $0<\theta<1$.

3 Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=e^{-x^3}$ в окрестности точки $x_0=0$.

Решение. В основном разложении в ряд Маклорена функции

Тема 5 Формула Тейлора

1 Многочлен $P(x)=x^3-4x^2+5x-1$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x-2)$.

2 Представить многочленом 5-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность следующие функции

а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=\cos(2x-1)$.

3 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

а) $\sin 6^\circ$; б) $\ln 11$; в) $\sqrt[3]{9}$.

4 Разложить по формуле Маклорена функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$;

б) $f(x)=\sin^2 x$;

в) $f(x)=\ln(x^2-3x-4)$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Многочлен $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x+1)$.

Р е ш е н и е. Введем новую переменную $t=x+1$. Тогда

$$P(t)=1+3(t-1)+5(t-1)^2-2(t-1)^3=5-13t+11t^2-2t^3.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

2 Представить функцию $y=\ln x$ многочленом n-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность.

Р е ш е н и е. 1 способ. Находим последовательно $n+1$ производную для данной функции:

$f(x)=\ln x$, $f(1)=\ln 1=0$,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(1)=1$,

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(1)=-1$,

$f^{(3)}(x)=\dfrac{1\cdot 2}{x^3}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{1\cdot 2}{1^3}=2!$,

$$\cos x_1-\cos x_2=\sin\xi\cdot(x_1-x_2),$$

где $\xi\in(x_1;x_2)$.

Поскольку $|\sin\xi|\le 1$, то $|\cos x_1-\cos x_2|\le|x_1-x_2|$.

4 Записав формулу Коши для функций $f(x)=2x^3+5x+1$ и $g(x)=x^2+4$ на отрезке $[0;2]$, найти значение ξ.

Р е ш е н и е. Данные функции определены и непрерывны на отрезке $[0;2]$, а также дифференцируемы на интервале $(0;2)$:

$$f'(x)=6x^2+5,\ g'(x)=2x$$

при этом $g'(x)\ne 0\ \ \forall x\in(0;2)$.

Тогда по теореме Коши существует такая точка $\xi\in(0;2)$, что имеет место формула Коши

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Подставляя, получим $\dfrac{13}{2}=\dfrac{6\xi^2+5}{2\xi}$.

Решая данное уравнение относительно ξ, находим

$$\xi_1=\frac{1}{2},\ \xi_2=\frac{5}{3}.$$

5 Используя правило Лопиталя, вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}$; ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; и) $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; к) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$.

Р е ш е н и е. а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

б) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x-2}{6x-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^x\cos 2x-3e^x\sin 2x}{6-6x}=\frac{e}{3}.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}.$$

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0+0}\sin x=-1\cdot 0=0.$$

д) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^0=1.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{заменим знаменатель дроби}\\ \text{эквивалентной бесконечно}\\ \text{малой функцией}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin 2x}{x^4}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(nx^{n-1})'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{e^x}=0.$$

и) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+0}x=0.$$

к) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0+0}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x}=e^0=1.$$