Лекция 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений.
2. Применение операционного исчисления к решению систем дифференциальных уравнений.
3. Использование операционного исчисления в электротехнике.

1 Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

Постановка задачи*:* Требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где c_0, $c_1, \ldots$, c_{n-1} – заданные числа, функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$, $f(t) \doteq F(p)$. Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем от оригиналов к изображениям:

$$a_0\left(p^n Y - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \ldots - c_{n-1}\right) + a_1\left(p^{n-1}Y - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F$$

Разрешая это операторное уравнение относительно $Y(p)$, получим:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)Y =$$
$$= c_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ c_{n-1}a_0 + F.$$

Положим

$$Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$R_{n-1}(p) = c_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) +$$
$$+ \ldots + c_{n-1}a_0.$$

Тогда $Y(p) = \dfrac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q(n)}$.

Полученное решение называется ***операторным решением*** искомого дифференциального уравнения.

Определяя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению $Y(p)$, получаем искомое решение.

Замечания. **1.**Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех $t \in \mathrm{R}$, а не только при $t \ge 0$.

2. При нулевых начальных условиях решение операторного уравнения примет вид

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q(n)}.$$

Пример. Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 15$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 56$.

Решение. Имеем $y(t) \doteq Y(p)$. Тогда

$$y(t) \doteq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - 15,$$
$$y'(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 15p - 2,$$
$$y'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - f''(0) =$$
$$= p^3 F(p) - 15p^2 - 2p - 56.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение и преобразовывая, получим

$$Y(p) = \frac{15\left(p^2 - p - 6\right) + 2(p-1) + 56}{p^3 - p^2 - 6p} = \frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)} =$$
$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3}.$$

По таблице оригиналов находим

$$\frac{1}{p} \doteq 1,\ \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t},\ \frac{1}{p-3} \doteq e^{3t}.$$

Тогда получаем

$$y(t) = 6 + 5\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{3t}.$$

2. Применение операционного исчисления к решению систем дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Требуется найти решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y_1' + a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1(t),$$
$$y_2' + a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n = f_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n' + a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = f_n(t).$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y_1(0)=c_1,\ y_2(0)=c_2,\ \ldots,\ y_n(0)=c_n,$$

где c_0, $c_1,\ldots$, c_{n-1} – заданные числа, функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t)$ вместе со своими первыми производными и функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ являются оригиналами.

Решение. Пусть $y_k(t) \doteq Y_k(p)$, $f_k(t) \doteq F_k(p)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы и учитывая правила дифференцирования оригинала, получим

$$pY_1 - c_1 + a_{11}Y_1 + \ldots + a_{1n}Y_n = F_1(t),$$
$$pY_2 - c_2 + a_{21}Y_1 + \ldots + a_{2n}Y_n = F_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$pY_n - c_n + a_{n1}Y_1 + \ldots + a_{nn}Y_n = F_n(t),$$

или

$$(p + a_{11})Y_1 + a_{12}Y_2 \ldots + a_{1n}Y_n = c_1 + F_1(t),$$
$$a_{21}Y_1 + (p + a_{21})Y_1 + \ldots + a_{2n}Y_n = c_2 + F_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \ldots + (p + a_{nn})Y_n = c_n + F_n(t).$$

Данная система называется ***системой операторных*** уравнений.

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+p & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть определитель системы операторных уравнений и Δ_{km} – алгебраические дополнения элементов, находящихся на пересечении k-1 строки и m-го столбца. Если определитель $\Delta \neq 0$, то применяя правило Крамера, получим

$$Y_k(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i(p) + c_i)\Delta_{km}}{\Delta},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Для нахождения решения исходной системы определяются оригиналы, соответствующие полученным оригиналам.

Если определитель $\Delta = 0$, то система операторных уравнений решения не имеет, следовательно и исходная система не имеет решения.

Пример. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$y' - 2y - 4z = \cos t,$$
$$z' + y + 2z = \sin t,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$ и $z(0) = 0$.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$ и $z(t) \doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к данной системе, получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (-2+p)Y - 4Z = \dfrac{p}{p^2+1}, \\ Y + (2+p)Z = \dfrac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2+p & -4 \\ 1 & 2+p \end{vmatrix} = p^2.$$

Тогда решение относительно изображений есть

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2\left(p^2+1\right)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p^2\left(p^2+1\right)}=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Переходя от найденных изображений к оригиналам, получим при $t>0$

$$y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,$$

$$z(t)=-2t+2\sin t.$$

При помощи операционного исчисления можно находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнениями в частных производных, уравнений в конечных разностях, проводить суммирование рядов. Вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

3. Использование операционного исчисления в электротехнике.

Наибольшее применение в электротехнике операционное исчисление получило при исследовании переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами r, L и C, поскольку явления, происходящие в таких цепях, описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями и их системами, которые легко решаются с помощью операционного исчисления.

Переходным процессом называется явление, наблюдающееся в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

Переходные процессы возникают в электрических цепях в результате коммутаций (включения или выключения э. д. с, различных переключений, короткого замыкания в цепи, внезапного изменения параметров в цепи и т. д.). Эти процессы в электрических цепях всегда являются ***электромагнитными***. Они протекают обычно с очень большой скоростью и, как правило, заканчиваются по истечении долей секунды. При этом возможны случаи, когда напряжения и токи цепи или на отдельных ее элементах при переходном процессе значительно превосходят их значения в установившемся режиме. Последнее может привести к выходу из строя некоторых элементов цепи.

При протекании переходных процессов в электрических цепях всегда выполняются законы коммутации (законы переходных процессов).

А) Ток в индуктивности L не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) он сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=i_L(0).$$

Б) Напряжение на емкости C не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) оно сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_C(0).$$

Значения токов в индуктивностях и напряжений на обкладках конденсаторов в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации в цепи, $i_L(0)$ и $u_C(0)$, определяют начальные условия переходного процесса. При расчете переходного процесса в электрической цепи эти условия необходимо выявить до выполнения всех остальных вычислений. Если все $i_L(0)$ и $u_C(0)$ равны нулю, то в цепи имеют место нулевые начальные условия, а токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от нулевых значений. При ненулевых начальных условиях для определения знаков $i_L(0)$ и $u_C(0)$ надо задаться направлениями обхода контуров цепи, в которых будет происходить переходный процесс. Положительные знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ сохранятся, если их направления совпадают с направлением обхода контура. В противном случае знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ изменятся на противоположные. Здесь токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от тех значений, которые они имели в момент, непосредственно предшествующий коммутации (с учетом установленных знаков соответствующих величин).

Пусть в электрической цепи, изображенной на рис. 56, рубильник P переключается из положения 1 в положение 2. Тогда в контуре r, L и C возникнет переходный процесс. Примем, что его начальные условия ненулевые: $i_L(0)\neq 0$ и $u_C(0)\neq 0$. При направлениях тока в индуктивности и напряжения на обкладках конденсатора в начальный момент переходного процесса, показанных на рис. 56, выбранном направлении обхода контура имеем $i_L(0)>0$ и $u_C(0)>0$.

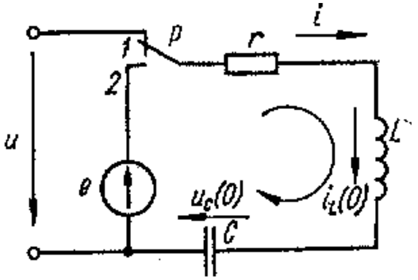

Рис.1.

Возьмем направление мгновенного значения тока переходного процесса $i=i(t)$, совпадающим с направлением обхода контура. Так как направление источника э. д. с. $e=e(t)$, действующего в контуре r, L и C во время переходного процесса, совпадает с направлением обхода этого контура, то по второму закону Кирхгофа получаем уравнение

$$ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt+u_C(0)=e.$$

Обозначим

$i(p)=i \doteq I(p)$ - изображение тока переходного процесса в контуре;

$e(p)=e \doteq E(p)$ – изображение внешней э. д. с, действующей в контуре.

Тогда уравнение цепи r, L и C в операторной форме примет вид

$$rI(p)+L(pI(p)-i_L(0))+\frac{1}{pC}I(p)+\frac{u_C(0)}{p}=E(p).$$

Это уравнение можно записать так:

$$\left(r+Lp+\frac{1}{pC}\right)I(p)=E(p)+Li_L(0)-\frac{u_C(0)}{p}.$$

Откуда находится выражение для изображения тока переходного процесса в виде

$$I(p)=\frac{E(p)+Li_L(0)-\dfrac{u_C(0)}{p}}{r+Lp+\dfrac{1}{pC}}.$$

Полученная зависимость представляет собой закон Ома в операторной форме. Его можно записать так:

$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)},$$

где $F(p)=E(p)+Li_L(0)-\dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение всех (внешних и внутренних) э. д. с, действующих в контуре; $Z(p)=r+Lp+\dfrac{1}{pC}$ – операторное сопротивление контура r, L и C; $-\dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение начальной э. д. с. емкости (включая знак «минус»), уравновешивающей начальное напряжение на обкладках конденсатора и направленной навстречу $u_C(0)$.

Операторное сопротивление $Z(p)=r+Lp+\dfrac{1}{pC}$ контура r, L и C получено из выражения комплекса полного сопротивления этого контура

$$Z=r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}$$

путем замены $i\omega$ на p, $i^2=-1$.

Закон Ома в операторной форме позволяет, непосредственно исследовать переходные процессы только в неразветвленных электрических цепях. При рассмотрении переходных процессов в разветвленных и сложных электрических цепях необходимо использовать первый и второй законы Кирхгофа, которые имеют в операторной форме следующий вид:

первый закон – $\sum_{k=1}^{n} I_k(p) = 0$,

второй закон – $\sum_{k=1}^{m} Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^{l} F_k(p)$

При составлении уравнений цепи по этим законам «правила знаков» остаются такими же, как и при расчете установившихся режимов в электрических цепях постоянного и переменного тока. В частности, если мгновенное значение тока переходного процесса $i_n(t)$ протекающего в ветви n, принято направленным к заданному узлу (для которого составляется уравнение по первому закону Кирхгофа), то изображение этого тока $I_n(p)$ берется с одним знаком (например, со знаком «плюс»). Если же ток $i_m(p)$ направлен от узла, то его изображение $I_m(p)$ берется с другим знаком (со знаком «минус»).

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, необходимо учитывать, что кроме внешних э. д. с. $e_k(t) = e_k$ в контурах, содержащих индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях, действуют еще и внутренние э. д. с. (начальные э. д. с.: самоиндукции и емкости). Причем, если направление $i_{L_k}(0)$ совпадает с направлением обхода контура, то слагаемое $L_k i_{L_k}(0)$ следует брать со знаком «плюс», если же и $u_{C_k}(0)$ направлено по обходу контура, то результирующий знак слагаемого $\frac{u_{C_k}(0)}{p}$ должен быть «минус», так как начальная э. д. с. емкости всегда направлена навстречу начальному напряжению на обкладках конденсатора $u_C(0)$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме имеют тот же вид, что и при установившихся режимах в цепях постоянного и переменного тока. Поэтому, применяя операционное исчисление для расчета переходных процессов, в принципе можно использовать все методы расчета сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами. При исследовании переходных процессов в сложных и разветвленных электрических цепях (в последнем случае при ненулевых начальных условиях) наибольшее применение получили метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов и метод наложения. При расчете переходных процессов в неразветвленных цепях, также в простых разветвленных цепях при нулевых начальных условиях применяется закон Ома в операторной форме. При этом в разветвленной цепи непосредственно определяется только ток переходного режима в ветви, содержащей источник э. д. с. (вся цепь нереально сводится к простой неразветвленной цепи).

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом сохраняется такая последовательность операций: сначала определяются начальные условия, затем записывается уравнение или система уравнений для заданной цепи в операторной форме, что позволяет найти изображения искомых токов или напряжений. По полученным изображениям отыскиваются оригиналы – мгновенные значения токов или напряжений переходного режима.

Применение операционного исчисления к расчету переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными постоянными параметрами покажем на примерах.

Пример. Найти переходные значения тока и напряжений (i, u_r, u_C) в цепи, изображенной на рис.2., при переключении рубильника P из положения 1 в положение 2, если $U = 100$ В, $r = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ (рис.2).

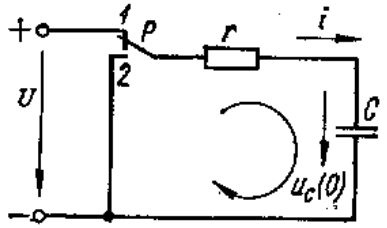

Рис.2.

Решение. Будем считать, что до переключения рубильника из положения 1 в положение 2 конденсатор C был заряжен до напряжения источника U. Если обход контура взять совпадающим с ходом стрелки часов, то начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ считается положительным: $u_C(0)=U=100$ В. Операторное сопротивление контура

$$Z(p)=r+\frac{1}{pC}.$$

Внешних источников э. д. с. в контуре нет.

Изображение внутренней э. д. с. (начальной э. д. с. емкости) есть

$$\frac{-u_C(0)}{p}=\frac{-U}{p}=F(p).$$

По закону Ома в операторной форме имеем

$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{\frac{-U}{p}}{r+\frac{1}{pC}}=\frac{-UC}{rCp+1}.$$

Изображение тока переходного процесса удовлетворяет условиям применения второй теоремы разложения. Поэтому можно записать

$$I(p)=\frac{-UC}{rCp+1}=\frac{P(p)}{Q(p)}$$

где $P(p)=-UC=-100\cdot 10\cdot 10^{-6}=-10^{-3}$,

$Q(p)=rCp+1$,

$$\alpha_1=-\frac{1}{rC}=-\frac{1}{100\cdot 10\cdot 10^{-6}}=-10^3,$$

$P(\alpha_1)=-10^{-3}$,

$Q'(p)=rC=100\cdot 10\cdot 10^{-6}=10^{-3}$,

$Q'(\alpha_1)=10^{-3}$.

В результате получаем мгновенное значение тока переходного процесса в виде

$$i=i(t)=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t}=\frac{-10^{-3}}{10^{-3}}e^{-10^3 t}=-e^{-1000t}\ \text{А.}$$

Отрицательный знак тока означает, что при разряде конденсатора C через явное сопротивление r ток $i(t)$ направлен в сторону, противоположную направлению обхода контура, выбранного раньше, Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении в переходном процессе также отрицательно:

$u_r=ri=-100e^{1000t}$ В.

Мгновенное значение переходного напряжения на конденсаторе, определяемое по второму закону Кирхгофа $u_C+ri=0$ есть

$u_C=-ri=-u_r=100e^{-1000t}$ В.

Характер изменения i и u_C в переходном режиме показан на рисунке 3.

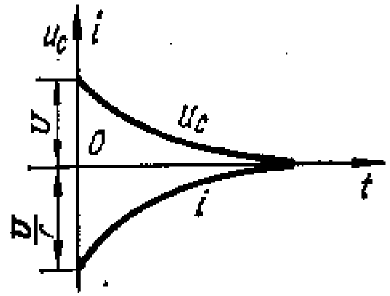

Рис.3.

Вопросы для самоконтроля

1. Как используется преобразование Лапласа при решении линейных дифференциальных уравнений?

2. Как используется преобразование Лапласа при решении систем линейных дифференциальных уравнений?

3. При исследовании каких процессов используется операционное исчисление в электротехнике?

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика. Специальные главы: Пособие для студентов вузов. – Чинаев П.И., Минин Н.А., Перевозников А.Ю., Черенков А.А. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.:Наука, 1985.
3. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 ч. – Мн.: БГУ, 2003.
4. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1, Ч.2. – М.: Наука, 1981, 1984.
5. Кудрявцев. Л.Д. Курс математического анализа. Т.1, Т.2, Т.3. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988, 1989.
6. Математический анализ в вопросах и задачах: учебн. Пособие для вузов. – Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1, Т.2. – М.: Наука, 1990, 1991.
8. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая математика, 1973.
9. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.