Лекция 2. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1.Свертка функций.
2. Теоремы разложения.
3. Обратное преобразование Лапласа.
4.Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье.

1. Свертка функций.

Теорема 1 (умножение изображений). *Если* $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0'$, *и* $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0''$, *то*

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau .$$

► *Шаг 1.* Докажем, что функция $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ является оригиналом.

Условия 1) и 2) очевидны. Возьмем $s_0 = \max\{s_0', s_0''\}$ и $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Тогда

$$|f_1(t)| \le M_1\,\mathrm{e}^{s_0' t} \le M\,\mathrm{e}^{s_0 t} \text{ и } |f_2(t)| \le M_2\,\mathrm{e}^{s_0'' t} \le M\,\mathrm{e}^{s_0 t} .$$

Следовательно,

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau\right| \le \int_0^t |f_1(\tau)|\cdot|f_2(t-\tau)|\,d\tau < M^2\int_0^t e^{s_0 t} e^{s_0(t-\tau)}\,d\tau =$$
$$= M^2 t e^{s_0 t} .$$

Так как при любом малом $\varepsilon > 0$ справедливо $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{\varepsilon t}} = 0$, то функция $g(t) = \dfrac{t}{e^{\varepsilon t}}$ ограничена на интервале $0 \le t < \infty$, т.е. $\dfrac{t}{e^{\varepsilon t}} \le A$. Отсюда $t \le A\cdot e^{\varepsilon t}$.

Тогда $|\varphi(t)| < M^2 t e^{s_0 t} \le AM^2 e^{(s_0+\varepsilon)\cdot t}$. При $\varepsilon \to 0$ имеем, что функция $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ имеет ограниченный рост, показатель которого равен s_0.

Шаг 2. Докажем формулу $F_1(p)\cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$.

Используя преобразование Лапласа, можно записать

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \doteq \int_0^\infty\left(\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau\right)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\,dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau .$$

Область S интегрирования данного двойного интеграла определяется условиями $0 \le t < \infty$ и $0 \le \tau \le t$.

Изменяя порядок интегрирования и полагая $y = t - \tau$ (рис.1),

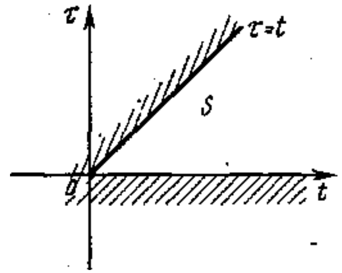

Рис.1.

получим

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \doteq \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau\int_0^\infty f_2(y)\,dy =$$
$$= F_1(p) F_2(p) . ◄$$

Определение 1. Функция вида $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$ называется ***сверткой*** функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Обозначается: $f_1(t)*f_2(t)$, т.е.

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau .$$

Положим $y=t-\tau$. Тогда

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=\begin{bmatrix} y=t-\tau, \\ \tau=t-y. \end{bmatrix}=-\int_t^0 f_1(t-y)\cdot f_2(y)dy=$$

$$=\int_0^t f_2(y)\cdot f_1(t-y)dy .$$

Видно, что свертка обладает свойством коммутативности.

Учитывая понятие свертки, теорему умножения можно записать в виде

$$f_1(t)*f_2(t)\doteq F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Следствие (формула Дюамеля). *Пусть* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *– оригиналы,* $f_1(t)\doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0'$, *и* $f_2(t)\doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0''$, *причем* $f_2'(t)$ *также является оригиналом. Тогда имеет место равенство*

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\doteq\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2'(t-\tau)d\tau+f_1(t)\cdot f_2(0),$$

где $\operatorname{Re} p>\max\{s_0', s_0''\}$.

►Запишем произведение $p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)$ в виде

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)=p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)-f_1(0)\cdot F_2(p)+f_1(0)\cdot F_2(p).$$

Отсюда $p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)=F_2(p)\cdot[p\cdot F_1(p)-f_1(0)]+f_1(0)\cdot F_2(p)$.

Первое слагаемое есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_2(t)$ и $f_1'(t)$. Используя свойства умножения изображений и линейности, можно записать

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\doteq f_1'(t)\cdot f_2(t)+f_1(0)\cdot F_2(p).$$

Тогда $p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\doteq\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2'(t-\tau)d\tau+f_1(t)\cdot f_2(0)$.◄

Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $F(p)=\dfrac{2p^2}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2}=2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p^2+1}\doteq\sin t, \qquad \frac{p}{p^2+1}\doteq\cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\doteq 2\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau+0=t\cos t+\sin t .$$

2. Теоремы разложения.

Теорема 2 (1-я теорема разложения). *Если функция* $F(p)$ *в окрестности точки* $p=\infty$ *может быть представлена в виде ряда Лорана*

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots,$$

то функция $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\dfrac{t^k}{k!}=c_0+c_1t+c_2\cdot\dfrac{t^2}{2!}+\ldots$, $t>0$, *является оригиналом, имеющим изображение* $F(p)$:

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}\doteq\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=f(t).$$

Без доказательства.

Пример. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$.

Решение. Запишем разложение в ряд Лорана функции данной в окрестности точки $p=\infty$:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)^2}=\left[\left|\frac{1}{p^2}\right|<1\Rightarrow|p|>1\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-\ldots .$$

Следовательно,

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots=\cos t \text{ при } t>0 .$$

Теорема 3 (2-я теорема разложения). *Если* $F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ – *рациональная правильная несократимая дробь, знаменатель которой* $Q(p)$ *имеет лишь простые корни* p_1, p_2, …, p_n, *то функция*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

► Разложим правильную рациональную дробь $\frac{P(p)}{Q(p)}$ на простейшие:

$$\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_n}{p-p_n},$$

где c_k, $k=1,2,..,n$, – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициента c_1 умножим обе части этого разложения на $(p-p_1)$:

$$\frac{P(p)}{Q(p)}\cdot(p-p_1)=c_1+\left(\frac{c_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_n}{p-p_n}\right)\cdot(p-p_1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p\to p_1$, получим

$$c_1=\lim_{p\to p_1}\frac{P(p)}{Q(p)}\cdot(p-p_1)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{p\to p_1}\frac{P(p)}{\frac{Q(p)-Q(p_1)}{p-p_1}}=\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)}.$$

Аналогично находятся коэффициенты c_k, $k=2,3..,n$.

Подставляя найденные значения в разложение функции $\frac{P(p)}{Q(p)}$, имеем

$$\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)}\cdot\frac{1}{p-p_1}+\frac{P(p_2)}{Q'(p_2)}\cdot\frac{1}{p-p_2}+\ldots+\frac{P(p_n)}{Q'(p_n)}\cdot\frac{1}{p-p_n}.$$

Известно, что $\frac{1}{p-p_k}\doteq e^{p_k t}$, $k=1,2,..,n$. На основании свойства линейности получим

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}\to\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot \mathrm{e}^{p_k t}=f(t). \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Дробь $\frac{P(p)}{Q(p)}$ должна быть правильной. В противном случае не выполняется необходимый признак существования изображения $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$.

2. Видно, что коэффициенты c_k, $k=1,2,..,n$ определяются как вычеты комплексной функции $F(p)$ в простых полюсах

$$c_k=\lim_{p\to p_k}\frac{P(p)}{Q'(p)}=\operatorname*{Res}_{p=p_k}\frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Вторую теорему разложения можно сформулировать следующим образом:

Теорема 4 (3-я теорема разложения). *Если* $F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ – *рациональная правильная несократимая дробь,* p_1, p_2, …, p_n – *простые или кратные полюсы знаменателя* $Q(p)$, *то оригинал* $f(t)$, *соответствующий изображению* $F(p)$, *определяется формулой*

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}\doteq\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\cdot e^{pt}\right]=f(t).$$

Без доказательства.

Пример. Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}$.

Решение. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь. Корни знаменателя $Q(p)=(p+1)(p^2+4)$ есть $p_1=-1$, $p_2=-2i$, $p_3=2i$. Применим 2-ю теорему разложения. Очевидно, что $Q(p)=3p^2+2p+4$.

Тогда 1) для $p_1=-1$ имеем

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1}=-\frac{2}{5},$$

2) для $p_2=-2i$ имеем

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i}=\frac{-1-2i}{-8-4i}=\frac{1+2i}{8+4i}=\frac{4+3i}{20},$$

3) для $p_3=2i$ имеем

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i}=\frac{-1+2i}{-8+4i}=\frac{1-2i}{8-4i}=\frac{4-3i}{20}.$$

В итоге получим

$$f(t)=\frac{-2}{5}e^{-t}+\frac{4+3i}{20}e^{-2it}+\frac{4-3i}{20}e^{2it}=\frac{-2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t.$$

3. Обратное преобразование Лапласа.

Теорема 5 (формула Римана-Меллина). *Пусть функция $f(t)$ является оригиналом и имеет показатель роста s_0, а $F(p)$ – ее изображением. Тогда в любой точке t, где оригинал $f(t)$ непрерывен, справедлива формула Римана-Меллина*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp,$$

причем интегрирование производится вдоль любой прямой, интеграл понимается в смысле главного значения.

Без доказательства.

О п р е д е л е н и е 2 . Формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

является обратной к формуле $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ и называется ***обратным преобразованием Лапласа***.

Теорема 6. *Пусть $F(p)$ – функция комплексного переменного p, обладающая следующими свойствами:*

1) функция $F(p)$, первоначально заданная в полуплоскости $\operatorname{Re} p=u>s_0$ и удовлетворяющая в ней условиям:

а) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p=u>s_0$,

б) в области $\operatorname{Re} p\ge u>s_0$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p|\to\infty$ равномерно относительно $\arg(p-s_0)$;

в) для всех $\operatorname{Re} p=u$, $u>s_0$, сходится несобственный интеграл

$$\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}|F(p)|dp<M,$$

где M – некоторое положительное число, может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость C_p;

2) аналитическое продолжение функции $F(p)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} p\le s_0$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда имеет место следующее соотношение

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)\cdot e^{pt}\right],$$

где $t>0$ и $p=p_k$ – особые точки (полюсы, существенно особые точки) функции, являющейся аналитическим продолжением $F(p)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} p\le s_0$, $k=1,2,\ldots,n$.

Без доказательства.

Пример. Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Решение. Аналитическим продолжением функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p \le s_0$ является функция $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяющая условиям леммы Жордана и имеющая две особые точки – полюсы первого порядка $p_1 = -i\omega$ и $p_2 = i\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re} p = u \ge 0$ и $t > 0$ имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2} e^{pt}\right] =$$

$$= \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin\omega t\,.$$

4. Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье.

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом и имеет конечное число экстремумов. Тогда для нее можно записать интеграл Фурье. При этом имеет место формула:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,,$$

где $\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

Учитывая, что в интеграле Лапласа параметр $p = u + i\omega$, $\operatorname{Re} p = u$, и для сходимости интеграла выбирается $u > s_0$, а $f(t)\big|_{t<0} = 0$, можно записать

$$F(p) = F(u+i\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ut} e^{-i\omega t} dt\,.$$

Сравнивая полученный интеграл Лапласа с преобразованием Фурье, видно, что изображение $F(u+i\omega) = F(p)$ есть прямое преобразование Фурье для функции $g(t) = f(t)\cdot e^{-ut}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите формулу умножения изображений.
2. Что называется сверткой функций?
3. Запишите формулу Дюамеля.
4. В чем суть первой теоремы разложения?
5. Сформулируйте и докажите вторую теорему разложения.
6. В чем суть третьей теоремы разложения?
7. Запишите формулу Римана-Меллина?
8. Что называется обратным преобразованием Лапласа?
9. Как связаны между собой преобразование Лапласа и преобразование Фурье?