Лекция 9. ВЫЧЕТЫ

1.Определение вычета и основная теорема о вычетах.
2.Вычисление вычетов.
3.Логарифмический вычет.
4.Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

1. Определение вычета и основная теорема о вычетах.

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в каждой точке области E, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и Γ – кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области E и не проходящий через особые точки функции $f(z)$. И пусть точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$, причем в кольце $0<|z-z_0|<R$ эта функция является аналитической. Разложение функции $f(z)$ в кольце $0<|z-z_0|<R$ в ряд Лорана имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

О п р е д е л е н и е 1. ***Вычетом*** аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Обозначается: $\operatorname{Res} f(z_0)$.

Таким образом,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}f(z)dz.$$

Если в выражении $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ положить $n=-1$, то получим $c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}f(z)dz$. Видно, что $c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z_0)$, т.е. вычет функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 равен коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Теорема 1 (Коши). *Пусть $f(z)$ есть функция, аналитическая в замкнутой области $\overline{E}$, ограниченной контуром Γ, за исключением конечного числа особых точек z_k, $k=1,2,\cdots n$, лежащих внутри области. Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma}f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z_k)$$

► Вокруг точек $z_1,z_2,\ldots,z_n$ опишем окружности $c_{\rho_1},c_{\rho_2},\ldots,c_{\rho_n}$ столь малых радиусов $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$, чтобы эти окружности попарно не пересекались и целиком лежали в области, ограниченной Γ (рис.1).

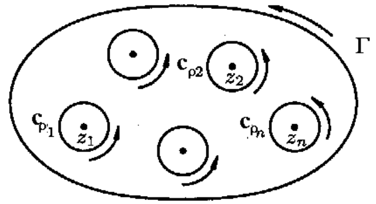

Рис.1.

Обозначим через Γ^* систему контуров, состоящую из контура Γ, проходимого в положительном направлении, и окружностей $c_{\rho_1},c_{\rho_2},\ldots,c_{\rho_n}$, проходимых в отрицательном направлении, т. е. $\Gamma^*=\Gamma^+ + c_{\rho_1}^- + c_{\rho_2}^- +\cdots+ c_{\rho_n}^-$. Согласно основной теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^{*+}} f(z)dz = 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\rho_1}^-} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\rho_2}^-} f(z)dz \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\rho_n}^-} f(z)dz = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\rho_1}^+} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\rho_2}^+} f(z)dz \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\rho_n}^+} f(z)dz.$$

Так как

$$\oint_{c_{\rho_1}^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z_1),$$

$$\oint_{c_{\rho_2}^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z_2), \ldots,$$

$$\oint_{c_{\rho_n}^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z_n),$$

то

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z_1) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z_2) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z_n). \blacktriangleleft$$

2. Вычисление вычетов функции.

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$. Вычет $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ в точке z_0 можно найти либо по формуле $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz$, либо по формуле $c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z_0)$. В первом случае нахождение вычета функции $f(z)$ сводится к вычислению интеграла, во втором случае – к разложению функции $f(z)$в ряд Лорана. Рассмотрим вычисление вычетов в различных особых точках.

В ы ч и с л е н и е в ы ч е т о в ф у н к ц и и о т н о с и т е л ь н о у с т р а н и м о й о с о б о й т о ч к и. Пусть z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$. В этом случае в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть. Поэтому $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

В ы ч и с л е н и е в ы ч е т о в ф у н к ц и и о т н о с и т е л ь н о п о л ю с а.

Случай 1. **Простой полюс.**

Пусть точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда в окрестности точки z_0 имеет место разложение в ряд Лорана функции $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Умножая обе части этого равенства на $z - z_0$, получим

$$(z - z_0) \cdot f(z) = c_{-1} + (z - z_0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Так как в правой части равенства находится обыкновенный степенной ряд, то его сумма является непрерывной функцией в точке z_0. Переходя к пределу при $z \to z_0$ получим

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \cdot f(z)\right].$$

Замечание. Пусть функция $f(z)$ есть частное двух аналитических в точке z_0 функций $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$. где $g(z_0) \neq 0$, $h(z)$ имеет простой нуль в точке z_0, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Тогда точка z_0 является простым полюсом функции $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) \cdot g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Случай 2. **Полюс порядка m.**

Пусть точка z_0 является m-кратным полюсом функции $f(z)$. Тогда в окрестности точки z_0 имеет место разложение в ряд Лорана функции $f(z)$

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k .$$

Умножая обе части равенства на $(z-z_0)^m$, получим

$$(z-z_0)^m\cdot f(z)=$$

$$=c_{-m}+c_{-m+1}\cdot(z-z_0)+\cdots+c_{-1}\cdot(z-z_0)^{m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^{k+m} .$$

В правой части равенства находится степенной ряд, который равномерно сходится в любом круге, целиком лежащим в его круге сходимости. Поэтому возможно почленное дифференцирование этого ряда любое число раз в круге его сходимости. Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз, имеем

$$\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}}=$$

$$=(m-1)!\cdot c_{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot(k+m)\cdot(k+m-1)\cdots(k+2)\cdot(z-z_0)^{k+1}$$

Переходя к пределу при $z\to z_0$, получим

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}} .$$

Пример. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-4}{z^3-z}$.

Решение. Особыми точками данной функции являются $z_1=0$ – полюс второго порядка и $z_2=1$ – простой полюс. Тогда имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z-4}{z^3-z}=\left.\frac{z-4}{(z^3-z)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{z-4}{3z^2-1}\right|_{z=1}=\frac{1-4}{3\cdot1-1}=-\frac{3}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z-4}{z^3-z}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2\cdot(z-4)}{z^3-z}\right)''=\lim_{z\to0}\left(\frac{z-4}{z-1}\right)''=\lim_{z\to0}\left(\frac{3}{(z-1)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-6}{(z-1)^3}=6 .$$

Вычисление вычетов функции относительно существенно особой точки. Пусть точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда для вычисления вычета функции $f(z)$ в этой точке непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Пример. Вычислить вычет функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Точка $z=0$ является для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ существенно особой точкой. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots .$$

Отсюда находим $\operatorname*{Res}_{z=0}e^{\frac{1}{z}}=1$.

3. Логарифмический вычет.

Пусть в области E задана однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду в E, за исключением конечного числа изолированных особых точек.

Определение 2. ***Логарифмической производной*** функции $f(z)$ называется функция

$$(\ln f(z))'=\frac{f'(z)}{f(z)} .$$

Определение 3. Логарифмическим вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется вычет в этой точке логарифмической производной функции $f(z)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(\ln f(z))' = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Теорема 2. *В нулях и полюсах функции $f(z)$, аналитической в области E, логарифмическая производная $(\ln f(z))'$ имеет полюсы первого порядка. При этом в нуле функции $f(z)$ логарифмический вычет равен порядку нуля функции $f(z)$. а в полюсе – порядку полюса функции $f(z)$, взятому со знаком минус.*

Без доказательства.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в области E, Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области E и не проходящий через полюсы и нули функции $f(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\Gamma - P_\Gamma,$$

где N_Γ – сумма кратностей нулей функции $f(z)$, лежащих внутри Γ, P_Γ – сумма кратностей полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри Γ.

► Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области E и Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области E и не проходящий через нули и полюсы функции $f(z)$.

Пусть в области $E' \subseteq E$, ограниченной контуром Γ, нулями функции $f(z)$ являются точки $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ кратности $m_1, m_2, \ldots, m_k$, полюсами функции $f(z)$ являются точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t$ кратности $n_1, n_2, \ldots, n_t$.

Применяя к функции $(\ln f(z))'$ основную теорему о вычетах и учитывая теорему 2, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz =$$

$$= \sum \operatorname{Res}\frac{f'(z)}{f(z)} = (m_1 + m_2 + \cdots + m_k) - (n_1 + n_2 + \cdots + n_t) = N_l - P_l. ◄$$

Определение 4. ***Логарифмическим вычетом*** функции $f(z)$ относительно контура Γ называется интеграл

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[\ln f(z)]' = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

4. Вычет функции относительно точки $z = \infty$.

Предположим, что бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, т. е. функция $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Определение 5. ***Вычетом*** функции $f(z)$ ***относительно бесконечно удаленной точки*** $z = \infty$ называется интеграл

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-} f(z)dz,$$

где Γ — замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в той окрестности бесконечно удаленной точки, в которой функция $f(z)$ является аналитической.

Здесь интегрирование по контуру Γ совершается в отрицательном направлении, т. е. так, чтобы при обходе контура бесконечно удаленная точка оставалась слева.

В окрестности бесконечно удаленной точки, не содержащей других особых точек функции $f(z)$, кроме самой бесконечно удаленной точки, разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot z^k.$$

Так как ряд Лорана функции $f(z)$ сходится равномерно на контуре Γ, то этот ряд можно интегрировать почленно вдоль контура Γ.

Учитывая, что для $k = 0, 1, \pm 2, \cdots$ $\oint_{\Gamma^-} z^k dz = 0$ и $\oint_{\Gamma^-}\frac{dz}{z} = -2\pi i$, то после интегрирования вдоль контура Γ равенства

$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot z^k$, получим $\oint_{l^-} f(z)dz=-2\pi i\, c_{-1}$. Отсюда $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}$.

Таким образом, вычет функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки равен взятому с противоположным знаком коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки функции.

Теорема 4. *Если $f(z)$ – функция, аналитическая в каждой точке расширенной плоскости* $\mathbf{C}$, *за исключением конечного числа изолированных особых точек, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0.$$

► Опишем из точки $z=0$ окружность такого радиуса R, чтобы все особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ функции $f(z)$, за исключением бесконечно удаленной точки $z=\infty$, лежали внутри этой окружности. Тогда по основной теореме о вычетах имеем

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz=2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z_k).$$

Отсюда $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z_k)$.

По определению вычета относительно бесконечно удаленной точки имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot \oint_{\Gamma^-} f(z)dz.$$

Тогда $\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$.◄

Пример. Найти сумму вычетов функции $f(z)=\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}$ относительно всех ее особых точек, расположенных в комплексной плоскости.

Решение. Особыми точками данной функции являются: $z_{1,2}=\pm 2i$ – полюсы второго порядка, $z_{3,4}=\pm i$ – полюсы третьего порядка.

Применение основной теоремы теории вычетов связано с большими вычислениями. Для решения этого примера удобнее воспользоваться теоремой 4. Видно, что в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет нуль первого порядка. Правильная часть ее разложения в ряд Лорана начинается с члена $\frac{1}{z}$.

Следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}=-1$.

Тогда $\sum_{k=1}^{4}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}=1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется вычетом функции?
2. Сформулируйте и докажите основную теорему о вычетах.
3. Как вычисляется вычет относительно устранимой точки?
4. Как вычисляется вычет относительно простого полюса?
5. Как вычисляется вычет относительно полюса порядка m?
6. Как вычисляется вычет относительно существенно особой точки?
7. Что называется логарифмическим вычетом?
8. Как вычисляется вычет относительно бесконечно удаленной точки?