Лекция 8. РЯД ЛОРАНА И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1. Ряд Лорана.
2.Классификация изолированных особых точек аналитической функции.
3. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

1. Ряд Лорана.

Определение 1. Ряд вида $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$, где k – принимает все целые значения, z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости; z – переменная точка; c_k — некоторые комплексные числа (коэффициенты ряда), называется ***рядом Лорана***.

Этот ряд понимается как сумма двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\left(z-z_0\right)^{-k} .$$

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$ называется ***правильной частью*** ряда Лорана, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k}\left(z-z_0\right)^{-k}$ называется ***главной частью*** ряда Лорана.

Определение 3. ***Областью сходимости*** ряда Лорана называется общая часть сходимости его главной части, и области сходимости его правильной части.

Областью сходимости правильной части ряда Лорана является круг радиуса $R_1 = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|c_k\right|}}$ с центром в точке z_0. Внутри этого круга ряд сходится к некоторой аналитической функции $f_1(z)$ – сумме ряда.

Определим область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k}\left(z-z_0\right)^{-k}$. Введем новую переменную $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$. Тогда получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k}\cdot\xi^k$, который является степенным и сходящимся в круге радиуса $\rho = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|c_{-k}\right|}}$ к аналитической функции $\varphi(\xi)$, $|\xi|<\rho$. Возвращаясь к переменной z, имеем

$$\varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\left(z-z_0\right)^{-k} ,$$

для всех z удовлетворяющих неравенству $\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < \rho$ или

$$\left|z-z_0\right| > \frac{1}{\rho} .$$

Введем обозначения $f_2(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)$, $R_2 = \dfrac{1}{\rho}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k}\left(z-z_0\right)^{-k}$ сходится к функции $f_2(z)$ вне круга радиуса R_2 с центром в точке z_0.

Итак, $f_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$ в круге $\left|z-z_0\right| < R_1$,

$f_2(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k}\left(z-z_0\right)^{-k}$ в круге $\left|z-z_0\right| > R_2$.

Если $R_1 > R_2$, то существует общая область сходимости рядов, составляющих ряд Лорана. Внутри этого кольца ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$ сходится к некоторой аналитической функции

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Если $R_1 < R_2$, то ряд Лорана нигде не сходится.

Пусть $f(z)$ аналитическая функция в кольце $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

Теорема 1. *Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $R_1 < |z-z_0| < R_2$, однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, где коэффициенты c_k вычисляются по формуле*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{k'}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$C_{k'}$ – любой замкнутый контур в кольце $R_1 < |z-z_0| < R_2$, содержащий точку z_0 внутри.

Без доказательства.

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в кольце $R_1 < |z-z_0| < R_2$. Если на окружности $|z-z_0| = R$, $R_1 < R < R_2$, модуль функции $f(z)$ не превышает M, т.е. $|f(z)| < M$, то $|c_k| \le \frac{M}{R^k}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.*

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

в круге $|z| < 1$.

Решение. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

В круге $|z| < 1$ полученные дроби разлагаются в сходящиеся геометрические прогрессии:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^n} + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} = -\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots\right).$$

Тогда ряд Лорана для $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ есть

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^n} + \cdots\right) + \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} z + \frac{7}{8} z^2 + \cdots + \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1}} z^n + \cdots.$$

2. Классификация изолированных особых точек аналитической функции.

Определение 4. ***Особой точкой*** функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитичной.

Определение 5. Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется ***изолированной***, если в некоторой ее окрестности не содержится других особых точек функции $f(z)$.

Из определения следует, что если точка z_0 является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, то найдется такое положительное число $R > 0$, что в кольце $0 < |z-z_0| < R$ функция является аналитической и разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}.$$

Классификация особых точек аналитической функции $f(z)$ производится в зависимости от вида ряда Лорана

Определение 6. Особая точка z_0 называется ***устранимой особой*** точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (ряд Лорана не содержит главной части $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$).

Определение 7. Особая точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (в главной части ряда содержится конечное число членов $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$). Если $m=1$, то полюс z_0 называется ***простым***, если $m\geq 2$,то кратным; число m называется ***порядком*** полюса,

Определение 8. Точка z_0 называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (в главной части ряда содержится бесконечно много членов с отрицательными показателями).

Теорема 2. *Если точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ ограничена, и ее можно представить в виде*

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z),$$

где m – некоторое натуральное число; $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки z_0, $\varphi(z)\neq 0$.

►*Шаг 1. Ограниченность.* Пусть z_0 – устранимая особая точка аналитической функции $f(z)$. В этом случае разложение $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ во всех точках кольца $0<|z-z_0|<R$.

Так как правая часть равенства $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ является степенным рядом, сходящимся в круге $|z-z_0|<R$, то его сумма аналитична в круге и непрерывна в точке z_0. Поэтому при $z\to z_0$ сумма этого ряда имеет предел, равный c_0, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$. Если функция $f(z)$ не была определена в точке z_0, то доопределим ее, положив $f(z_0)=c_0$. Если первоначальное значение функции $f(z_0)$ не совпадает с c_0, то изменим значение функции $f(z)$ в точке z_0, положив $f(z_0)=c_0$. Определенная таким образом функция $f(z)$ является аналитической всюду в круге $|z-z_0|<R$. Тем самым разрыв функции $f(z)$ в точке z_0 устранен.

Так как $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, $c_0\neq\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует неравенство $|f(z)-c_0|<\varepsilon$. Отсюда следует, что аналитическая функция $f(z)$ является ограниченной в δ-окрестности устранимой особой точкой z_0.

Шаг 2. Представление в виде $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$. Пусть в степенном ряде $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ первый из необращающихся в нуль коэффициентов есть c_m , $m=0,1,2,\ldots$. Тогда ряд перепишется в виде $f(z)=\sum_{k=m}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ или

$$f(z)=(z-z_0)^m\sum_{k=m}^{\infty}c_k(z-z_0)^{k-m}$$

Если положить $\varphi(z)=\sum_{k=m}^{\infty}c_k(z-z_0)^{k-m}$, то ряд Лорана для функции $f(z)$ принимает следующий вид $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$.◄

Замечание. Верно и обратное утверждение: если функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R$, ограничена в этом кольце, то точка z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

Пример. Функция $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ не определена в точке $z=0$. При $z\neq 0$ функцию можно представить в виде ряда

$$\frac{\sin z}{z}=$$

$$=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

Ряд Лорана в точке $z=0$ не содержит членов с отрицательными степенями, т.е. ряд Лорана не содержит главной части. Поэтому точка $z=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

Из найденного разложения также следует, что $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$.

Если доопределить функцию $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, положив $f(0)=1$, то функция $f(z)$ будет аналитической и в точке $z=0$.

Теорема 3. *Для того чтобы точка* z_0 *была полюсом порядка* m *функции* $f(z)$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

► *Необходимость*. Пусть z_0 — полюс функции $f(z)$, аналитической в кольце $0<|z-z_0|<R$. Разложение функции в ряд Лорана в этом кольце есть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m},$$

где $c_{-m}\neq 0$.

Умножая обе части разложения на $(z-z_0)^m$, получим

$$f(z)(z-z_0)^m=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^{k+m}+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}++c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\cdots+c_{-m}.$$

Отсюда следует, что для функции $\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z)$ точка z_0 является устранимой особой точкой. Учитывая, что сумма

степенного ряда, находящегося в правой части равенства, аналитична и поэтому непрерывна в круге $|z-z_0|<R$, находим

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}\text{, где } c_{-m}\neq 0.$$

Тогда $\lim\limits_{z\to z_0}\left(|z-z_0|^m\cdot|f(z)|\right)=|c_{-m}|$, где $|c_{-m}|\neq 0$.

Пусть q – некоторое положительное число, удовлетворяющее условию $q<|c_{-m}|$. Тогда в некотором круге с центром z_0 достаточно малого радиуса выполняется неравенство $|z-z_0|^m\cdot|f(z)|>q$.

Отсюда $|f(z)|>\frac{q}{|z-z_0|^m}$.

Из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

Достаточность. Пусть M – любое положительное число. Тогда, согласно условиям теоремы, можно указать такую δ-окрестность точки z_0, в которой выполняется неравенство $|f(z)|>M$. Рассмотрим функцию $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. В δ-окрестности точки z_0 функция $g(z)$ является аналитической и ограниченной. Поэтому точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $g(z)$. Следовательно, функция $g(z)$ в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде $g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где m – некоторое натуральное число и функция $\varphi(z)$ – аналитическая функция, $\varphi(z_0)\neq 0$. Тогда для функции $f(z)=\frac{1}{g(z)}$ в δ-окрестности точки z_0 имеем $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}$ или $f(z)=\frac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^m}$. Здесь $\varphi_1(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ – аналитическая функция, для которой в δ-окрестности точки z_0 справедливо следующее разложение в ряд Тейлора

$$\varphi_1(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots,\ c_0\neq 0.$$

Тогда в δ-окрестности точки z_0 разложение функции $f(z)$ принимает вид

$$f(z)=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+m}(z-z_0)^k.$$

Отсюда следует, что точка z_0 является полюсом порядка m для аналитической функции $f(z)$.◄

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{z-1}{(z^2+9)(z+1)^4}$ имеет три полюса: $z_1=-1$ четвертого порядка, $z_2=3i$ и $z_3=-3i$ полюсы первого порядка.

Определение 9. Аналитическая функция $f(z)$ называется ***мероморфной***, если она в конечной части комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов.

Теорема 4 (Сохоцкого). *Пусть z_0 существенно особая точка. Каково бы ни было комплексное число W (конечное или нет), существует такая последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся z_0, что $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=W$.*

Без доказательства.

Даная теорема говорит о том, что в достаточно малой окрестности существенно особой точки z_0 функция $f(z)$ становится неопределенной. В такой точке функция не имеет ни конечного ни бесконечного пределов. Выбирая различные последовательности точек $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящихся к точке z_0, можно получать различные последовательности соответствующих значений функций, сходящихся к различным пределам.

Пример. Функция $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$ имеет следующее разложение в ряд Лорана

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots.$$

Видно, что точка $z=0$ является существенно особой точкой.

Если $z\to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

Если $z\to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$.

3. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Точка $z=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** аналитической функции $f(z)$, если вне круга некоторого радиуса R функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от начала координат. Положим $z=\dfrac{1}{w}$. При этом преобразовании точка $z=\infty$ перейдет в точку $w=0$ и окрестность бесконечно удаленной точки, в которой функция $f(z)$ аналитична, перейдет в окрестность точки $w=0$. Функция $g(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ является аналитической в окрестности точки $w=0$. Разложение функции $g(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $w=0$ есть $g(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k^{'}\,w^k$. Возвращаясь к прежней переменной $z=\dfrac{1}{w}$, получим

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,z^k,$$

где $c_k=c_{-k}^{'}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$..

Очевидно, что данное разложение содержит столько членов с положительными степенями z, сколько членов с отрицательными степенями w содержит разложение функции $g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $w=0$.

Итак, 1) если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана нет членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка $z=\infty$ называется ***устранимой особой*** точкой функции $f(z)$;

2) если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана есть лишь конечное число членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка $z=\infty$ называется ***полюсом*** функции $f(z)$;

3) если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана есть бесконечно много членов положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка $z=\infty$ называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$.

Справедливы следующие утверждения:

– если бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то функция стремится к конечному пределу при $z\to\infty$;

– если функция $f(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс, то $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$;

– если бесконечно удаленная точка является существенно особой точкой для функции $f(z)$, то каково бы ни было комплексное число (конечное или бесконечное), существует такая последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, стремящаяся к существенно особой точке $z_n\to\infty$, что $\lim\limits_{z_n\to\infty} f(z_n)=W$.

Если функция $f(z)$ имеет в точке $z=\infty$ устранимую особенность, то говорят, что она аналитична в бесконечно удаленной точке, и принимают $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Пример. Определить какую особенность в бесконечно удаленной точке имеет функция $f(z)=\frac{1}{z-4}$.

Решение. Произведем замену переменного z на переменную w по формуле $z=\frac{1}{w}$. Тогда данная функция принимает следующий вид $f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{w}{1-4w}$. При условии $|4w|<1$ имеет место разложение $f\left(\frac{1}{w}\right)=w\left(1+4w+(4w)^2+\cdots\right)$. Возвращаясь к переменной z, имеем

$$f(z)=\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{4}{z}+\frac{4^2}{z^2}+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+1}},\ |z|<4.$$

Точка $z=\infty$ является устранимо особой точкой.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется рядом Лорана?
2. Как определяется область сходимости правильной и главной частей ряда Лорана?
3. Сформулируйте теорему о разложении аналитической функции в ряд Лорана.
4. Какая точка называется особой точкой функции?
5. Какой вид имеет ряд Лорана функции в окрестности устранимой особой точки?
6. Какому условию удовлетворяет функция в полюсе?
7. В чем суть теоремы Сохоцкого?
8. Как разлагается функция в ряд Лорана окрестности бесконечно удаленной точки?
9. В чем особенность поведения аналитической функции в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$?