Лекция 3. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Непрерывность несобственного интеграла по параметру.
2. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру.
3. Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

1. Непрерывность несобственного интеграла по параметру.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике*

$$\Pi_\infty = \{(x;y) | -\infty < a \le x \le b \le +\infty, c \le y \le d\},$$

а интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ является непрерывной функцией переменной y на отрезке $[c;d]$ и справедлива формула

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x;y)dx = \int_a^b f(x;y_0)dx. \qquad (1)$$

► Возьмем любое $\varepsilon > 0$.

Так как $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$, то $\exists b' \in [a;b)$ такое, что $\forall\ y \in [c;d]$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{b'}^b f(x;y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как интеграл $\int_a^{b'} f(x;y)dx$ является собственным, то этот интеграл есть непрерывная функция параметра y на $[c;d]$.

Пусть $y_0 \in [c;d]$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall\ y \in [c;d]$ и такого, что $|y - y_0| < \delta$ имеет место

$$\left| \int_a^{b'} f(x;y)dx - \int_a^{b'} f(x;y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для любого $y \in [c;d]$ такого, что $|y - y_0| < \delta$, имеем

$$\left| \int_a^b f(x;y)dx - \int_a^b f(x;y_0)dx \right| < \left| \int_a^{b'} f(x;y)dx - \int_a^{b'} f(x;y_0)dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{b'}^b f(x;y)dx \right| + \left| \int_{b'}^b f(x;y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ есть непрерывная функция параметра y в произвольной точке $y_0 \in [c;d]$. ◄

2. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру.

Теорема 2 (о перестановке порядка интегрирования). *Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике*

$$\Pi_\infty = \{(x;y) | -\infty < a \le x \le b \le +\infty, c \le y \le d\},$$

а интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy. \qquad (2)$$

► Так как интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$, то он будет на отрезке $[c;d]$ непрерывной, а поэтому и интегрируемой функцией. Повторный интеграл в левой части формулы (2) существует. Кроме того, в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ на $[c;d]$ для любого $\varepsilon > 0$ $\exists b' \in [a;b)$ такое, что $\forall\ \eta \in (b';b)$ и $\forall\ y \in Y$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Применяя теорему о перестановке порядка интегрирования в собственных интегралах, получаем равенство

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\eta f(x;y)dx = \int\limits_a^\eta dx \int\limits_c^d f(x;y)dy. \qquad (3)$$

Покажем, что интеграл, стоящий в левой части равенства (3), при $\eta \to b-0$ стремится к интегралу в левой части равенства (2). Действительно,

$$\left|\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx - \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\eta f(x;y)dx\right| = \left|\int\limits_c^d dy \int\limits_\eta^b f(x;y)dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_c^d \left(\left|\int\limits_a^\eta f(x;y)dx\right|\right)dy < \frac{\varepsilon}{d-c}\int\limits_c^d dy = \varepsilon.$$

Итак, левая часть равенства (3) имеет предел при $\eta \to b-0$. Поэтому, правая часть этого равенства имеет предел при $\eta \to b-0$. Переходя в равенстве (3) к пределу, получаем (2). ◄

В теореме 2 была обоснована перестановка порядка интегрирования, когда внутренний интеграл несобственный, а внешний – собственный. В теореме 3 обоснована перестановка порядка интегрирования, когда оба интеграла несобственные.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на множестве $\Pi = \{(x;y) | a \le x < b, c \le y < d\}$ и выполнены следующие условия:*

1) несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x;y)|dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c';d'] \subset (c;d)$;

2) несобственный интеграл $\int\limits_c^d |f(x;y)|dy$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[a';b'] \subset (a;b)$;

3) один из двух повторных интегралов

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b |f(x;y)|dx, \quad \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x;y)|dy$$

сходится.

Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$, $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx.$$

Без доказательства.

Пример. Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона (интеграл вероятностей)

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Решение. Имеем

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \begin{bmatrix} t = xy, y > 0, \\ dt = ydx \end{bmatrix} = y\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2y^2}dx.$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$ по y, получаем

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} I \cdot e^{-y^2}dy = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}dx \qquad (4)$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c;d] \subset (0;+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}\right| \le de^{-c^2\left(1+x^2\right)}$$

и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left(de^{-c^2\left(1+x^2\right)}\right)dx$ сходится.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится равномерно по параметру на x любом отрезке $[a;b]\subset(0;+\infty)$. Повторный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится в силу равенства (4).

Переставляя порядок интегрирования в равенстве (4), получаем

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy = -\int\limits_0^{+\infty}\left(\left.\frac{e^{-y^2\left(1+x^2\right)}}{2\left(1+x^2\right)}\right|_0^{+\infty}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3. Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

Теорема 4 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть функции $f(x;y)$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \left\{(x;y)\middle| -\infty < a \le x \le b \le +\infty, c \le y \le d\right\}$, а интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ равномерно сходится на отрезке $[c;d]$. Тогда функция $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$ дифференцируема на отрезке $[c;d]$ и справедливо равенство

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x;y)dx\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx. \qquad (5)$$

►Пусть $c \le y \le d$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y}dx$ при $\eta\in[c;d]$ По условию теоремы этот интеграл сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$. В силу теоремы 2 законна перестановка порядка интегрирования

$$\int\limits_c^y d\eta\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y}dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^y \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y}d\eta = \qquad (6)$$

$$= \int\limits_a^b f(x;y)dx + c_0,$$

где $c_0 = -\int\limits_a^b f(x;c)dx$.

Так как интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y}dx$ сходится равномерно по параметру η на $[c;d]$, то этот интеграл будет непрерывной функцией η на этом отрезке. Поэтому интеграл, стоящий в левой части равенства (6), будет непрерывно дифференцируемой функцией параметра y на отрезке $[c;d]$. Но тогда и $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ есть непрерывно дифференцируемая функция на $[c;d]$. Дифференцируя обе части равенства (6) по y, получаем формулу (5). ◄

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x;y)=\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$. Интеграл $\Phi(y)=\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ является несобственным, так как функция $f(x;y)$ неопределенна в точках $x=0$ и $x=1$. При $x\to 0$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=o(1)$, при $x\to 1$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ равномерно сходится. По свойству 3 имеем

$$\Phi'(y)=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix} x=\sin t, \\ dx=\cos t \end{bmatrix}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}=$$

$$=\begin{bmatrix} \operatorname{tg} t=z, \\ t=\operatorname{arctg} z \end{bmatrix}=\int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(1+y^2\right)z^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности несобственного интеграла по параметру.
2. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости несобственного интеграла по параметру.
3. Какие условия должны выполняться при перестановке порядка интегрирования в случае двух несобственных интегралов.
4. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.