Лекция 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Потенциальное векторное поле.
2. Соленоидальное векторное поле.
3. Гармоническое поле.
4. Операторы Гамильтона и Лапласа.

1. Потенциальное векторное поле.

Определение 1. Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, называется ***потенциальным (безвихревым)***, если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$ такая, что

$$\vec{a}=\operatorname{grad}U(M),\ \forall M\in Q. \qquad (1)$$

Функция $U(M)$ называется в этом случае ***потенциалом*** векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

Пример. Потенциальными полями являются магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, поле притяжения данной массы к неподвижному центру (гравитационное поле), электрическое поле напряженности точечного заряда и др.

Потенциальное поле является наиболее простым среди векторных полей, ибо оно определяется одной скалярной функцией $U=U(M)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле. Например, в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ в случае произвольного векторного поля

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X(x,y,z)\cdot\vec{i}+Y(x,y,z)\cdot\vec{j}+Z(x,y,z)\cdot\vec{k},$$

в случае потенциального векторного поля

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (2)$$

Ниже приведены **свойства** потенциальных векторных полей.

1. *Если векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, потенциально, то его потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

►Допустим, что для поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ существует два потенциала $U_1(M)$ и $U_2(M)$, т.е. $\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U_1(M)$ и $\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U_2(M)$.

Тогда

$$\operatorname{grad}(U_1-U_2)=\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial z}\vec{k}\equiv 0.$$

Так как вектор $\operatorname{grad}(U_1-U_2)$ тождественно равен нулю, то все его проекции тоже равны нулю. Следовательно, функция U_1-U_2 не зависит ни от одной из переменных, т.е. $U_1-U_2=\text{const}$, откуда и $U_1=U_2+\text{const}$. ◄

2. *Если векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ задано в односвязной области Q, то необходимым и достаточным условием его потенциальности является обращение в нуль ротора поля в любой точке $M\in Q$:*

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0,\ \forall M\in Q. \qquad (3)$$

► *Необходимость.*

Если $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, – потенциальное векторное поле, то по определению существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)=U(x,y,z)$ такая, что

$$\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial U}{\partial x}&\dfrac{\partial U}{\partial y}&\dfrac{\partial U}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2U}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2U}{\partial z\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2U}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2U}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}\equiv 0.$$

Достаточность.

Если для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)=\vec{a}(X,Y,Z)$ выполнено условие (3), то, на основании формулы Стокса, имеем

$$\oint_\Gamma \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint_\Gamma Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

для любой замкнутой кривой $\Gamma \subset Q$.

Согласно теореме о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, существует скалярная функция $U = U(x, y, z)$, полный дифференциал которой стоит под знаком интеграла, т.е.

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = dU(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz .$$

Следовательно,

$$X(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x},\ Y(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial y},\ Z(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial z}, \text{ т.е.}$$

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} U(M).$$

По определению поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ является потенциальным. ◄

Пример. Установить потенциальность векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(P) = 2xyz\cdot\vec{i} + +x^2z\cdot\vec{j} + x^2y\cdot\vec{k}$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2 - x^2)\vec{i} + (2xy - 2xy)\vec{j} + (2xz - 2xz)\vec{k} \equiv 0 .$$

Значит, заданное поле потенциально.

2. Соленоидальное векторное поле.

Определение 2. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$, $M \in Q$, называется ***соленоидальным (трубчатым),*** если

$$\operatorname{div}\vec{a}(\mathrm{M}) = 0 \quad \forall M \in Q. \qquad (4)$$

Пример. Соленоидальными полями являются магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого проходит электрический ток, поле линейных скоростей вращающегося твердого тела, поле линейных скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, не имеющее источников и стоков, и др.

Согласно определению, соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков.

Ниже приведены **свойства** соленоидальных полей.

1. Из формулы Остроградского – Гаусса следует, что если векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность Ω равен нулю.

2 (*принцип сохранения интенсивности векторной трубки*). Потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой.

3. В соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

4. В односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность Ω, опирающуюся на замкнутый контур Γ, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура Γ.

Пример. Установить, являются ли соленоидальными следующие поля:

1) $\vec{a}_1(P) = x(z^2 - y^2)\cdot\vec{i} + y(x^2 - z^2)\cdot\vec{j} + z(y^2 - x^2)\cdot\vec{k}$;

2) $\vec{a}_2(P) = y^2\cdot\vec{i} - (x^2 + y^2)\cdot\vec{j} + z(3y^2 + 1)\cdot\vec{k}$.

***Решение*. 1**. Имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_1(M) = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 \equiv 0,$$

Следовательно, поле $\vec{a}_1(M)$ соленоидально.

2. Имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_2(M) = -2y + 3y^2 + 1 \not\equiv 0 .$$

Значит, поле $\vec{a}_2(M)$ не является соленоидальным.

3. Гармоническое поле.

Определение 3. Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M \in Q$, называется ***гармоническим (лапласовым)***, если оно является как потенциальным, так и соленоидальным, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0\,,\ \operatorname{div}\vec{a}(M)=0\,. \qquad (5)$$

Если вектор $\vec{a}(M)$ удовлетворяет первому из условий, то существует скалярная функция $U=U(M)$, такая, что $\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U(M)$, и тогда второе из условий приводит к уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\operatorname{div}\operatorname{grad}U(M)=0$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0\,. \qquad (6)$$

Таким образом, гармоническое векторное поле описывается скалярной функцией $U=U(M)$, которая является в области Q решением уравнения Лапласа и называется ***гармонической функцией***.

Пример. Гармоническими функциями являются

1) $U(x,y,z)=Ax+By+C$ (задана в любой конечной области);

2) $U(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (задана в любой области, не содержащей начала координат).

4. Операторы Гамильтона и Лапласа.

Определение 4. ***Оператором Гамильтона*** или оператором «набла» называется символический вектор

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,, \qquad (7)$$

проекции которого на оси прямоугольной декартовой системы координат представляют собой символы частного дифференцирования по соответствующим переменным:

$$\nabla_x=\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \nabla_y=\frac{\partial}{\partial y}\,,\ \nabla_z=\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Оператор ∇ не является вектором в классическом понимании этого слова, но с его помощью могут быть наглядно представлены основные операции векторного анализа: градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля. Для этого определяется «произведение» оператора ∇ и скалярной функции $U(x,y,z)$ как сумму произведений соответствующих его проекций ∇_x, ∇_y, ∇_z и этой функции.

Под ***«произведениями»*** $\nabla_x U$, $\nabla_y U$, $\nabla_z U$ понимают нахождение соответствующих частных производных от функции $U(x,y,z)$, т.е.

$$\nabla_x U=\frac{\partial U}{\partial x}\,,\ \nabla_y U=\frac{\partial U}{\partial y}\,,\ \nabla_z U=\frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

В этом случае произведение ∇U определяет вектор

$$\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\operatorname{grad}U\,.$$

Скалярное произведение символического вектора (оператора ∇) и вектора $\vec{a}(M)=X(x,y,z)\cdot\vec{i}+Y(x,y,z)\cdot\vec{j}+Z(x,y,z)\cdot\vec{k}$ задается формулой

$$\nabla\cdot\vec{a}=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right),\left(X\cdot\vec{i}+Y\cdot\vec{j}+Z\cdot\vec{k}\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{a}\,.$$

Векторное произведение символического вектора ∇ и вектора $\vec{a}(M)$ определяется как

$$\nabla\times a=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}=\operatorname{rot}\vec{a}\,.$$

Таким образом, с помощью оператора Гамильтона основные понятия векторного анализа, получаемые с помощью операции дифференцирования, можно выразить в виде операций, применяемых в векторной алгебре.

Отметим, что при использовании оператора ∇ надо учитывать следующие его свойства.

1. Линейность оператора ∇ .

2. Действие оператора ∇ на произведение двух функций (векторных или скалярных) осуществляется аналогично правилу дифференцирования произведения двух сомножителей.

3. Оператор ∇ действует на все функции, стоящие после него, и не действует на функции, записанные перед ним.

Свойства операций векторного анализа, полученные с помощью оператора ∇ следующие.

Пусть $U_1(x,y,z)$, $U_2(x,y,z)$ – скалярные функции, $\vec{a}(M)$, $\vec{b}(M)$ – векторные функции, α , β – постоянные.

1. $\nabla(\alpha U_1 \pm \beta U_2) = \alpha\nabla U_1 \pm \beta\nabla U_2$, или

$\mathrm{grad}(\alpha U_2 \pm \beta U_2) = \alpha \cdot \mathrm{grad} U_1 \pm \beta \cdot \mathrm{grad} U_2$.

2. $\nabla \cdot (\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}) = (\alpha\nabla\vec{a}) \pm (\beta\nabla\vec{b}) = \alpha(\nabla\vec{a}) \pm \beta(\nabla\vec{b})$, или

$\mathrm{div}(\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}) = \alpha \cdot \mathrm{div}\vec{a} \pm \beta \cdot \mathrm{div}\vec{b}$.

3. $\nabla \times (\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}) = \alpha \cdot \nabla \times \vec{a} \pm \beta \cdot \nabla \times \vec{b} = \alpha(\nabla \times \vec{a}) \pm \beta(\nabla \times \vec{b})$, или

$\mathrm{rot}(\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}) = \alpha \mathrm{rot}\vec{a} \pm \beta \mathrm{rot}\vec{b}$.

4. $\nabla(U_1 \cdot U_2) = U_1 \cdot \nabla U_2 + U_2 \cdot \nabla U_1$, или

$\mathrm{grad}(U_1 \cdot U_2) = U_1 \cdot \mathrm{grad} U_2 + U_2 \cdot \mathrm{grad} U_1$.

5. $\nabla \cdot (U \cdot \vec{a}) = U \cdot (\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla U \cdot \vec{a}$, или

$\mathrm{div}(U\vec{a}) = U \mathrm{div}\vec{a} + (\vec{a}, \mathrm{grad} U)$.

6. $\nabla \times (U\vec{a}) = U(\nabla \times \vec{a}) + \nabla U \times \vec{a}$, или $\mathrm{rot}(U\vec{a}) = U \mathrm{rot}\vec{a} + \mathrm{grad} U \times \vec{a}$.

7. $(\nabla \cdot \vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b})$, или

$\mathrm{div}\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{b} \cdot \mathrm{rot}\vec{a}) - (\vec{a} \cdot \mathrm{rot}\vec{b})$.

Операции grad, div, rot называются ***дифференциальными операциями первого порядка***. В приложениях векторного анализа используются также ***дифференциальные операции второго порядка***. Так, $\mathrm{grad} U$, $\mathrm{rot}\vec{a}$ – векторные величины, поэтому к

ним можно применить операции div и rot , а к числовой величине $\mathrm{div}\vec{a}$ – операцию grad и т.д. Существует пять дифференциальных операций второго порядка

1) $\mathrm{div}(\mathrm{grad} U) = \nabla \cdot \nabla \vec{a}$;

2) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} U) = \nabla \cdot \nabla U$;

3) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{a}) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{a}$;

4) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{a}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{a})$;

5) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{a}) = \nabla(\nabla, \vec{a})$.

Результаты второй и третьей из приведенных выше операций тождественно равны нулю (как векторное произведение коллинеарных векторов и смешанное произведение, содержащее в качестве сомножителей два равных вектора).

Наиболее широкое применение имеет первая из дифференциальных операций второго порядка: скалярный квадрат символического вектора ∇ , т.е. выражение

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (8)$$

Оператор (19.8) называется ***оператором Лапласа*** *(*или ***лапласианом)*** и обозначают Δ . Уравнение Лапласа (8) с помощью оператора Лапласа запишется в виде

$$\Delta U = 0 . \qquad (9)$$

Отметим, что оператор Лапласа Δ может быть применен и к векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(X, Y, Z)$:

$$\Delta\vec{a} = \Delta X \cdot \vec{i} + \Delta Y \cdot \vec{j} + \Delta Z \cdot \vec{k} .$$

Приведенные операции векторного анализа изложены для случая декартовой прямоугольной системы координат как наиболее часто применяемой. В приложениях используются и другие системы координат.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое поле называется потенциальным? Приведите примеры потенциальных полей.

2. Перечислите свойства потенциальных полей.

3. Какое поле называется соленоидальным (трубчатым)? Приведите примеры соленоидальных полей.

4. Какое поле называется гармоническим?

5. Что такое оператор Гамильтона? Запишите с помощью оператора Гамильтона а) градиент скалярного поля; б) дивергенцию векторного поля; в) ротор векторного поля.

6. Перечислите повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях.

7. Результаты каких повторных дифференциальных операций равны нулю?

8. Что такое оператор Лапласа и как он связан с оператором ∇ ?

9. Приведите примеры функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Как называются такие функции.