Лекция 2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

1. Определение векторного поля.
2. Векторные линии.
3. Поток векторного поля.
4. Дивергенция векторного поля.

1. Определение векторного поля.

О п р е д е л е н и е 1. ***Стационарным векторным полем*** называется пространство $\boldsymbol{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке M которого определена векторная функция

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=\vec{a}(\vec{r}),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M.

Другими словами, каждой точке M поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

Пример. Векторными полями могут служить поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное поле, электростатическое поле, поле градиентов некоторого скалярного поля, магнитное поле и др.

В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ в случае декартовой прямоугольной системы координат векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M(x;y;z)$, определяется тремя скалярными функциями – проекциями вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат:

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}$$

или

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X(x;y;z)\vec{i}+Y(x;y;z)\vec{j}+Z(x;y;z)\vec{k}\,. \qquad (1)$$

Будем считать, что $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ непрерывными функциями координат точки M, имеющими непрерывные частные производные первого порядка. Тогда векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется ***непрерывно дифференцируемой в области*** Q.

Основными характеристиками векторного поля являются: векторные линии, поток и дивергенция, циркуляция и вихрь.

2. Векторные линии.

О п р е д е л е н и е 2. ***Векторной (силовой) линией*** векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии.

Пример. Векторными линиями могут служить линии тока движущейся жидкости. В электростатическом поле векторными линиями являются его силовые линии, в магнитном поле – линии, соединяющие северный и южный полюсы, в поле $\operatorname{grad}U$ – линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям скалярного поля $U=U(M)$, и т.д.

Если $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}$ – уравнение векторной линии Γ векторного поля (1), то вектор

$$d\,\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k}$$

в каждой точке направлен по касательной к Γ и потому коллинеарен вектору $\vec{a}(M)$. Поэтому их проекции пропорциональны

$$\frac{dx}{X(x;y;z)}=\frac{dx}{Y(x,y,z)}=\frac{dx}{Z(x,y,z)}\,. \qquad (2)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2) определяет векторные линии поля (1). Она может быть записана в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y,z)}{X(x,y,z)},\ \frac{dz}{dx}=\frac{Z(x,y,z)}{X(x,y,z)}. \qquad (3)$$

Общий интеграл системы (3) имеет вид

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=c_1,\\ \varphi_2(x,y,z)=c_2.\end{cases}$$

С **геометрической** точки зрения, это два семейства поверхностей, которые в совокупности определяют искомые векторные линии. Если в некоторой области Q для системы уравнений (3) выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то через каждую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=\varphi_1(x_0,y_0,z_0),\\ \varphi_2(x,y,z)=\varphi_2(x_0,y_0,z_0).\end{cases}$$

Пример. Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника, по которому проходит ток силой I.

Решение. Выберем направление оси Oz, совпадающее с направлением тока I. В этом случае вектор напряженности магнитного поля $\vec{\mathrm{H}}=\dfrac{2}{\rho^2}\vec{I}\times\vec{r}$, где $\vec{I}=I\cdot\vec{k}$ – вектор тока; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x;y;z)$; ρ – расстояние от оси проводника до точки M. Найдем

$$\vec{I}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ 0 & 0 & I\\ x & y & z\end{vmatrix}=-yI\cdot\vec{\mathrm{i}}+xI\cdot\vec{\mathrm{j}},$$

$$\vec{\mathrm{H}}=-\frac{2I}{\rho^2}y\cdot\vec{\mathrm{i}}+\frac{2I}{\rho^2}x\cdot\vec{\mathrm{j}}.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий (2) имеет вид

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}.$$

Отсюда

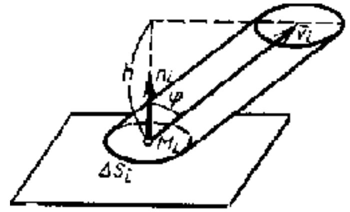
$$\begin{cases}xdx+ydy=0,\\ dz=0,\end{cases}\quad \text{и} \quad \begin{cases}x^2+y^2=c_1,\\ z=c_1,\end{cases}$$

где $c_1\geq 0$. Таким образом, векторными линиями магнитного поля бесконечного проводника являются окружности с центрами на оси Oz.

3. Поток векторного поля.

Пусть вектор $\vec{a}(M)$ в некоторой области Q определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости и $\Omega\subset Q$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность. Вычислим Π – количество жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность Ω в направлении $\vec{n}$ ($\vec{n}$ – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности).

Разобьем поверхность Ω на n достаточно малых частей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n, площади которых обозначим ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n соответственно. Выберем точки $M_i\in\Omega_i$, $i=\overline{1,n}$. В виду малости поверхности Ω_i будем считать ее плоской, а значение $\vec{a}(M_i)$ постоянным для любой точки $M_i\in\Omega_i$. При таких предположениях количество жидкости $\Delta\Pi_i$, протекающей через, поверхность $\Delta\Omega_i$ за единицу времени в направлении $\vec{a}(M_i)$, будет приближенно численно равно объему цилиндра с площадью основания ΔS_i и образующими, равными $|\vec{a}(M_i)|$. Высота этого цилиндра равна проекции вектора $a(M_i)$ на направление нормали $\vec{n}(M_i)$ (рис.1).



Г

Рис.1.

Суммируя соответствующие выражения по всем элементарным поверхностям Ω_i, $i=\overline{1,n}$, получаем приближенное значение количества жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность Ω:

$$\Pi\approx\sum_{i=1}^{n}\text{пр}_{\vec{n}(M_i)}\vec{a}(M_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i)\right)\Delta S_i. \qquad (4)$$

Для определения точного значения этого количества жидкости необходимо увеличивать число поверхностей $\Delta\Omega_i$, уменьшая их диаметры. За точное значение Π принимается предел суммы (4) при условии $\lambda\to 0$, где λ – наибольший из диаметров $\Delta S_i\,, i=\overline{1,n}$.

Выражение (4) является интегральной суммой для функции $\vec{a}=\vec{a}(M)$ по ориентированной поверхности Ω. Предел суммы (4) при $\lambda\to 0$, если он существует, конечен и не зависит от способа построения этой суммы, определяет поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\vec{a}=\vec{a}(M)$, описывающей поле линейных скоростей движущейся жидкости:

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i)\right)\Delta S_i=\iint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

О п р е д е л е н и е 3. ***Потоком*** Π векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность Ω называется число, равное значению поверхностного интеграла второго рода $\iint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS$:

$$\Pi=\iint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\vec{a}(M)$. Поток вектора зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\vec{n}$); ему присущи и другие свойства, которыми обладает поверхностный интеграл второго рода.

Физический смысл потока. Выберем внешнюю сторону замкнутой поверхности Ω (рис.2), помещенной в поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ линейных скоростей движущейся несжимаемой жидкости. Будем считать, что Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, через которые жидкость соответственно втекает и вытекает из объема, ограниченного поверхностью Ω.

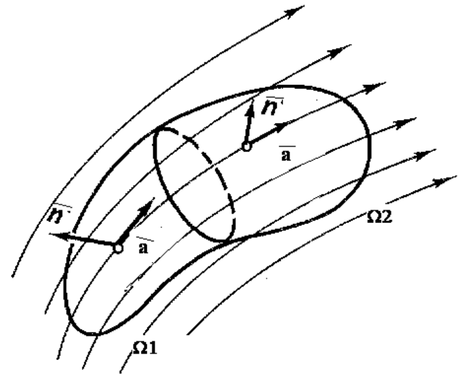


Рис.2.

Поток Π вектора $\vec{a}(M)$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Ω будет равен сумме двух поверхностных интегралов второго рода, т.е. сумме двух потоков

$$\Pi=\oiint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\Pi_1+\Pi_2\,.$$

Поток $\Pi_1<0$, так как угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ на поверхности Ω_1 – тупой. Поток $\Omega_2>0$, так как указанный угол на поверхности Ω_2 – острый. Поток Π_1 выражает количество жидкости, поступающей в часть пространства, ограниченную замкнутой поверхностью Ω, за единицу времени, Π_2 – соответственно количество вытекающей из него жидкости. Суммарный поток $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$ выражает алгебраическую сумму количеств поступающей и вытекающей жидкости. Если $\Pi>0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри поверхности Ω имеются *источники*. Если $\Pi<0$, то внутри поверхности Ω имеются *стоки*, ибо вытекает меньше жидкости, чем поступает.

Пример. Вычислить поток вектора $\vec{a}=y^2\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсеченную плоскостью $z=2$ в направлении внешней нормали (рис.3).

Р е ш е н и е. В данном случае любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает данную поверхность Ω в единственной точке (кроме осей Ox и Oy). Значит, поверхность правильная. Предварительно найдем $U = U(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.

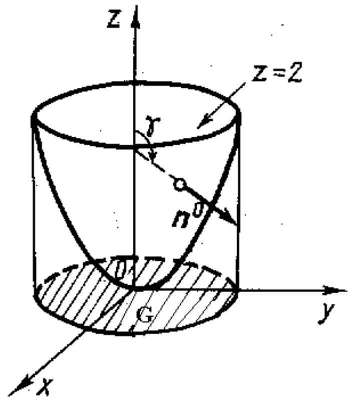


Рис.3.

Тогда единичный нормальный вектор

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \right).$$

(Знак «–» взят потому, что $\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \pi$, и, следовательно, $\cos\gamma < 0$.) Имеем:

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Искомый поток

$$\Pi = \iint_{\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_G \left[\left(2y^3 - z\right)\Big|_{z=x^2+y^2} \right] dxdy = \iint_G \left(2y^3 - x^2 - y^2\right) dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} = \iint_G \left(2r^3\sin^3\gamma - r^2\right) r\,dr\,d\varphi = .$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r^4\sin^3\varphi - r^3\right) dr = -2\pi.$$

4. Дивергенция векторного поля.

В поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$, выберем точку P, принадлежащую области $\Delta Q \subset Q$ объема ΔV, границей которой служит замкнутая поверхность $\Delta\Omega \subset \Omega$. Отношение

$$\frac{\oiint_{\Delta\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS}{\Delta V}, \tag{5}$$

называется ***средним расходом*** жидкости через поверхность $\Delta\Omega$. Когда ΔV будет стремиться к нулю (при этом поверхность $\Delta\Omega$ стягивается в точку P), средний расход жидкости будет характеризовать расход жидкости в точке $M \in Q$ в единицу времени.

Определение 4. ***Дивергенцией*** (***расходимостью***) $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в точке P называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность $\Delta\Omega$ к величине ΔV объема, ограниченного этой поверхностью, при $\Delta V \to 0$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_{\Delta\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS}{\Delta V}, \tag{6}$$

С учетом **физического** смысла потока векторного поля дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока, «исходящего» из точки P, т.е. мощность находящегося в точке P источника: при $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$ или стока при $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то в точке P нет ни источника, ни стока.

В случае декартовой системы координат дивергенция векторного поля

$$\vec{a}(M)=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$$

определяется формулой

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X(M)}{\partial x}+\frac{\partial Y(M)}{\partial y}+\frac{\partial Z(M)}{\partial z}, \qquad (7)$$

Пример. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x,y,z)=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}++z\left(3y^2+x\right)\cdot\vec{k}$ в точках $M_1(-2;1;-2)$, $M_2(7;0;1)$, $M_3(0;0;0)$.

Решение. Заданное поле определено на всем пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Для решения задачи воспользуемся формулой (5). Найдем частные производные от функций, являющихся координатами вектора $\vec{a}(M)$, и их значения в точках M_1, M_2 и M_3:

$$X(x,y,z)=y^2,\ Y(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right),\ Z(x,y,z)=z\left(3y^2+x\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial Y(M_1)}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial Y(M_2)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Y(M_3)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}=3y^2+x,\ \frac{\partial Z(M_1)}{\partial z}=1,\ \frac{\partial Z(M_2)}{\partial z}=7,\ \frac{\partial Z(M_3)}{\partial z}=0.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=0-2+1=-1,\ \operatorname{div}\vec{a}(M_2)=0+0+7=7,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_3)=0+0+0=0.$$

Таким образом, данное поле в точке M_1 имеет сток, в точке M_2 – источник, а в точке M_3 нет ни источника, ни стока.

Теорема 1 (Остроградского–Гаусса). *Если векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируема в области Q, ограниченной замкнутой поверхностью Ω, то поток векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через поверхность Ω в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области Q от дивергенции этого векторного поля*

$$\oint\!\!\!\oint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{Q}\operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz. \qquad (8)$$

Данная теорема является аналитическим выражением *теоремы Остроградского-Гаусса в векторной форме*. Для практических приложений удобно скалярное представление ее правой части

$$\oint\!\!\!\oint_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{V}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Пример. Используя теорему Остроградского – Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz\right)\cdot\vec{i}+2x\cdot\operatorname{arctg}y\cdot\vec{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\cdot\vec{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z=1-x^2-y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского–Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости Oxy, ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$.

Пусть Q – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Ω, состоящей из параболоида вращения $\Omega_1=\left\{(x;y;z)\,\middle|\,z=1-x^2-y^2\right\}$ и круга Ω_2 на плоскости Oxy (рис.4).

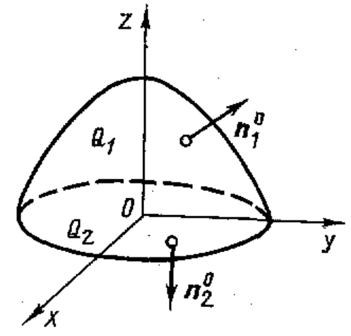


Рис.4.

Найдем $\operatorname{div}\vec{a}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}\equiv 0 .$$

На основании формулы Остроградского Гаусса поток $\prod$ через замкнутую поверхность Ω равен нулю.

С другой стороны, обозначим через $\prod_1$ и $\prod_2$ потоки через поверхности параболоида и круга соответственно. Тогда по свойству аддитивности

$$\prod=\prod_1+\prod_2=\iint_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}_1\,dS+\iint_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}_2\,dS=0 .$$

Следовательно, искомый поток

$$\prod_1=\iint_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}_1\,dS=-\iint_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}_2\,dS .$$

На поверхности Ω_2

$$\vec{a}=\frac{x^2y}{1+y^2}\cdot\vec{i}+2x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot\vec{j}-\vec{k} .$$

Поскольку $\vec{n}_2=-\vec{k}$, то $\vec{a}\cdot\vec{n}_2=1$.

Таким образом, $\prod_1=-\iint_{\Omega_2}dS=-\pi\cdot 1^2=-\pi$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое поле называется стационарным векторным поле?
2. Дайте определение векторных линий.
3. Что называется потоком векторного поля? В чем состоит физический смысл потока?
4. Что называется дивергенцией векторного поля? В чем состоит физический смысл дивергенции?
5. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса в векторной форме.