Лекция 4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

1. Задача о потоке жидкости.
2. Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода.
3. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.
4. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

1. Задача о потоке жидкости.

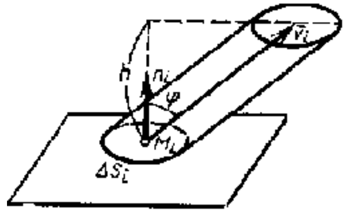
Пусть пространство $Oxyz$ заполнено движущейся однородной жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x;y;z)$ задана вектором

$$\vec{V} = P(x;y;z)\cdot\vec{i} + Q(x;y;z)\cdot\vec{j} + R(x;y;z)\cdot\vec{k},$$

где непрерывные функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ – проекции вектора $\vec{V}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно. Требуется найти количество жидкости Π, протекающей за единицу времени t через некоторую ориентированную поверхность Ω.

Будем предполагать, что 1) поверхность Ω не препятствует движению и ограничена контуром Γ, 2) плотность жидкости $\rho(x;y;z)=1$.

Пусть $\vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$ – единичный нормальный вектор поверхности Ω в текущей точке $M(x;y;z)$, $|\vec{n}|=1$, и его направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ являются непрерывными функциями координат x, y, z точек данной поверхности.



Г

Рис.1.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$. В каждой части Ω_i выберем точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности Ω скорость $\vec{V}$ во всех точках элементарной части Ω_i постоянна и равна $\vec{V_i} = \vec{V}(M_i) = \vec{V}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, а частичные поверхности Ω_i – плоские. Тогда количество жидкости $\Delta\Pi_i$, протекающей через частичную поверхность Ω_i за единицу времени в направлении вектора $\vec{V_i} = \vec{V}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, приблизительно равна объему цилиндра с основанием ΔS_i и высотой h_i

$$\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot h_i,$$

где h_i – проекция вектора $\vec{V_i}$ на $\vec{n}_i$.

По свойству проекции имеем $h_i = \left|\vec{V_i}\right|\cdot\cos\varphi_i$. Здесь φ_i – угол между $\vec{V_i}$ и $\vec{n}_i$. Тогда

$$h_i = \left|\vec{V_i}\right|\cdot\cos\varphi_i = \left|\vec{V_i}\right|\cdot 1\cdot\cos\varphi_i = \vec{V_i}\cdot\vec{n}.$$

где $\vec{V_i}\cdot\vec{n}$ – скалярное произведение векторов $\vec{V_i}$ и $\vec{n}_i$.

Поэтому

$$\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot \left(\vec{V_i}\cdot\vec{n}\right).$$

Количество жидкости через всю поверхность Ω равно

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \left(\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i\right).$$

В координатной форме поток жидкости Π равен

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i\right) \cdot \Delta S_i, \qquad (1)$$

где $P_i = P\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)$, $Q_i = Q\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)$, $R_i = R\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)$.

Точное значение потока получим, переходя в выражении (1) к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\Pi = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i\right) \cdot \Delta S_i .$$

Поскольку площадь проекции равна произведению площади поверхности на косинус угла между проекцией и поверхностью:

$$\left(\Delta S_i\right)_{yz} = \Delta S_i \cdot \cos\alpha_i ,$$

$$\left(\Delta S_i\right)_{zx} = \Delta S_i \cdot \cos\beta_i ,$$

$$\left(\Delta S_i\right)_{xy} = \Delta S_i \cdot \cos\gamma_i ,$$

то поток можно записать в виде

$$\Pi = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \left(\Delta S_i\right)_{yz} + Q_i \cdot \left(\Delta S_i\right)_{zx} + R_i \cdot \left(\Delta S_i\right)_{xy} .$$

2. Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода.

Пусть задана двусторонняя поверхность $\Omega = \left\{z = z(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy}\right\}$ с выбранным направлением единичного вектора нормали $\vec{n}$. Здесь функции $z(x;y)$, z_x, z_y – непрерывно дифференцируемые в некоторой области $G \subset Oxy$. В точках поверхности Ω определена непрерывная функция $R(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности Ω разобьем на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n. Обозначим σ_1, σ_2, ..., σ_n проекции этих частей на плоскость Oxy. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i = \left(\Omega_i\right)_{xy}$, берется со знаком «$+$», если

выбрана внешняя сторона Ω^+ поверхности (нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне составляет с осью Oz острый угол), со знаком «-», если выбрана внутренняя сторона Ω^- поверхности.

О п р е д е л е н и е 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} R\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \Delta\sigma_i \qquad (2)$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d\left(\Omega_i\right)$.

О п р е д е л е н и е 2. ***Поверхностным интегралом второго рода*** от функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности называется предел (если он существует) интегральной суммы (2) при $\lambda \to 0$ и обозначается

$$\iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} R\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \Delta\sigma_i . \qquad (3)$$

В этом случае функция $R(x;y;z)$ называется ***интегрируемой по поверхности*** Ω по переменным x и y.

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода по выбранной стороне поверхности Ω по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности Ω, соответственно:

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \left(\Omega_i\right)_{yz} , \qquad (4)$$

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)\,dzdx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \left(\Omega_i\right)_{zx} . \qquad (5)$$

О п р е д е л е н и е 3. ***Общим поверхностным интегралом второго рода*** называется интеграл вида

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz + Q(x;y;z)\,dzdx + R(x;y;z)\,dxdz . \qquad (6)$$

Замечание. Если Ω – замкнутая двусторонняя поверхность, то поверхностный интеграл второго рода по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_{\Omega^+}$, по внутренней – $\oiint\limits_{\Omega^-}$.

Поверхностный интеграл второго рода обладает следующими **свойствами**.

1. Для общего поверхностного интеграла второго рода справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz + \iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx + \iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)dxdy.$$

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y;z)$ и $P_2(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне поверхности Ω, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y;z) \pm \beta \cdot P_2(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha P_1(x;y;z) \pm \beta P_2(x;y;z))dydz = \alpha \iint\limits_{\Omega} P_1(x;y;z)dydz \pm \beta \iint\limits_{\Omega} P_2(x;y;z)dydz$$

.

3 (аддитивность). Если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $P(x;y;z)$ интегрируема по выбранным сторонам Ω_1 и Ω_2, то функция $P(x;y;z)$ также интегрируем по выбранной стороне поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz = \iint\limits_{\Omega_1} P(x;y;z)dydz + \iint\limits_{\Omega_2} P(x;y;z)dydz.$$

4 (оценка интеграла). Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне двусторонней поверхности Ω и $\sqrt{P^2+Q^2+R^2} \le M$ во всех точках поверхности, то

$$\left| \iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz \right| \le M \cdot \mathbf{S},$$

где $\mathbf{S}$ – площадь поверхности.

5 (ориентированность). Если Ω^- противоположная сторона к стороне Ω^+ поверхности Ω, то

$$\iint\limits_{\Omega^+} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz =$$

$$= -\iint\limits_{\Omega^-} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz.$$

3. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Пусть функция $R(x;y;z)$ непрерывна во всех точках поверхности

$$\Omega = \left\{ z = z(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy} \right\},$$

где функция $z(x;y)$ – непрерывно дифференцируема в некоторой области G_{xy} – проекции поверхности Ω на плоскость Oxy. Выберем внешнюю сторону поверхности, т.е. где ее внешняя нормаль образует с осью Oz острый угол. Тогда (из п. 2) площадь проекции частичной области $\Delta\sigma_i = (S_i)_{xy} > 0$, $i = 1,2,...,n$. Так как $\forall (x_i; y_i) \in \Delta\sigma_i$ имеем $z_i = z(x_i; y_i)$, то интегральная сумма (3) для функции $R(x;y;z)$ может быть записана в виде

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;z(\xi_i;\eta_i)) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (7)$$

В правой части данного равенства стоит интегральная сумма двойного интеграла от непрерывной в области G_{xy} функции $R(x;y;z(x;y))$. Переходя к пределу в равенстве (7) при $\lambda \to 0$, получим

$$\iint\limits_{\Omega^+} R(x;y;z)dxdy = \iint\limits_{G_{xy}} R(x;y;z(x;y))dxdy\,. \qquad (8)$$

Данная формула выражает поверхностный интеграл второго рода по переменным x и y через двойной интеграл. Если выбрать нижнюю сторону поверхности, то полученный интеграл берется со знаком «-». Поэтому

$$\iint\limits_{S} R(x;y;z)dxdy = \pm\iint\limits_{G_{xy}} R(x;y;z(x;y))dxdy\,. \qquad (9)$$

Аналогично, если поверхность Ω задана уравнениями $y = y(x;z)$ или $x = x(y;z)$, то для поверхностных интегралов второго рода по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности S соответственно имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx = \pm\iint\limits_{G_{zx}} Q(x;y(x;z);z)dzdx\,, \qquad (10)$$

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz = \pm\iint\limits_{G_{yz}} P(x(y;z);y;z)dydz\,. \qquad (11)$$

При вычислении общего поверхностного интеграла второго рода используются формулы (9), (10), (11), проектируя поверхность Ω на все три координатные плоскости:

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz =$$

$$= \pm\iint\limits_{G_{yz}} P(x(y;z);y;z)dydz \pm \iint\limits_{G_{zx}} Q(x;y(x;z);z)dzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} R(x;y;z(x;y))dxdy$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x + z - 1 = 0$, отсеченная плоскостями $y = 0$ и $y = 4$ и лежащая в первом октанте (рис.2).

Решение. По определению

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} xdydz \pm \iint\limits_{G_{zx}} ydzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} zdxdy\,.$$

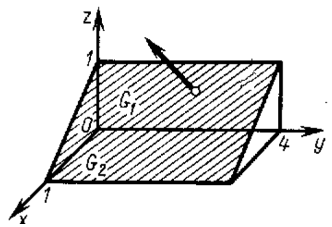


Рис. 2.

Найдем значения направляющих косинусов

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0\,,$$

$$\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = 0\,,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0\,.$$

Интеграл $\iint\limits_{G_{zx}} ydzdx = 0$, так как плоскость S параллельна оси Oy (нормаль и ось Oy перпендикулярны), первый и третий интегралы нужно взять со знаком «+».

По формулам (9) и (11) соответственно находим

$$\iint\limits_{\Omega^+} zdxdy = \iint\limits_{G_{xy}} (1 - x)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1 - x)dx = 2\,,$$

$$\iint\limits_{\Omega^+} xdydz = \iint\limits_{G_{yz}} (1 - z)dydz = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1 - z)dz = 2\,.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = 4\,.$$

4. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали $\vec{n}$ ориентированной поверхности в произвольной ее точке. Так как площадь проекции равна произведению площади поверхности на косинус угла между проекцией и поверхностью, то интегральную сумму (3) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i\ .$$

Тогда поверхностный интеграл второго рода можно записать так

$$\iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i=$$

$$=\iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)\cos\gamma\, dS\ .$$

Аналогично

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx=\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)\cos\beta\, dS\ ,$$

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dxdy=\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\cos\alpha\, dS\ .$$

Общий поверхностный интеграл второго рода и поверхностный интеграл первого рода связаны соотношением

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dzdx+R(x;y;z)dxdz=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\big(P(x;y;z)\cos\alpha+Q(x;y;z)\cos\beta+R(x;y;z)\cos\gamma\big)dS\ . \qquad (12)$$

Замечание. Если рассматривать функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ как проекции некоторой векторной функции $\vec{a}(x;y;z)$ на координатные оси:

$$\vec{a}(x;y;z)=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;'y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}\ ,$$

то выражение (12) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dzdx+R(x;y;z)dxdz=\iint\limits_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\, dS\ , \qquad (13)$$

где $\vec{a}\cdot\vec{n}$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$ в каждой точке поверхности Ω.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу, которая приводит к понятию поверхностного интеграла второго рода.
2. Дайте определение интегральной суммы и поверхностного интеграла второго рода.
3. Перечислите свойства поверхностного интеграла второго рода.
4. Как вычисляется поверхностный интеграл первого рода?
5. Какой формулой выражается связь между поверхностными интегралами первого и второго рода?