Лекция 2. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

1. Первая квадратичная форма поверхности.
2. Длина кривых на поверхности.
3. Площадь поверхности.

1. Первая квадратичная форма поверхности.

Пусть на непрерывно дифференцируемой простой поверхности $\Omega = \left\{\vec{r}(u;v) \middle| (u;v) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}$ задана кривая в векторной форме $\Gamma = \left\{\vec{r}(u(t);v(t)) \middle| a \le t \le b\right\}$. В точке $M(u;v)$ кривой Γ рассмотрим вектор

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

являющийся касательным вектором к рассматриваемой кривой. Данный вектор лежит в касательной плоскости к поверхности Ω в этой точке. Здесь $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$.

Найдем квадрат длины вектора $d\vec{r}$.

$$(d\vec{r})^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v\, dudv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2.$$

Обозначим $a_{11} = \vec{r}_u^{\,2}$, $a_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $a_{22} = \vec{r}_v^{\,2}$.

Тогда

$$(d\vec{r})^2 = a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2. \qquad (1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Квадратичная форма (1) называется ***первой квадратичной формой поверхности***.

Лемма 1. *Первая квадратичная форма простой поверхности является квазиопределенной, а во всякой неособой точке является положительно определенной.*

► Квазиопределенность формы (1) очевидна, так как $(d\vec{r})^2 \ge 0$. Докажем ее положительную определенность в неособой точке.

Поскольку в неособой точке $\vec{r}_u \ne 0$,то $a_{11} = \vec{r}_u^{\,2} \ge 0$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right),$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Возводя эти равенства в квадрат, и сложив, получим тождество Лагранжа:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Подставляя в это равенство $\vec{a} = \vec{r}_u$ и $\vec{b} = \vec{r}_v$, получим:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = |\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

В неособой точке поверхности векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны. Следовательно, $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 \ne 0$. Поэтому $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$.

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма (1) положительно определенная. ◄

Пример. Пусть непрерывно дифференцируемая поверхность имеет явное представление $\Omega = \left\{z = z(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy}\right\}$. Тогда в векторной форме $\vec{r} = (x;y;z(x;y))$, $\vec{r}_x = (1;0;f_x(x;y))$, $\vec{r}_y = (0;1;z_y(x;y))$.

Найдем коэффициенты квадратичной формы:

$$a_{11} = \vec{r}_x^{\,2} = 1 + z_x^2,$$

$$a_{12} = \vec{r}_x^{\,2} \cdot \vec{r}_y^{\,2} = z_x z_y,$$

$$a_{22} = \vec{r}_y^{\,2} = 1 + z_y^{2'}.$$

Тогда первая квадратичная форма примет вид:

$$d\vec{r}^{\,2} = (1 + z_x^2)^2 dx^2 + 2z_x z_y dxdy + (1 + z_y^2)^2 dy^2.$$

2. Длина кривых на поверхности.

Пусть на непрерывно дифференцируемой поверхности $\Omega = \left\{\vec{r}(u;v) \middle| (u;v) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}$ задана непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \left\{\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t);v(t)) \middle| a \le t \le b\right\}$. И пусть $l = l(t)$ – переменная длина дуги этой кривой. Известно, что $\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1$. Поэтому $|d\vec{r}| = |dl|$. Тогда

$$(dl)^2 = (d\vec{r})^2 = a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 .$$

где $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$.

Таким образом, первая квадратичная форма поверхности равна квадрату дифференциала длины кривой на поверхности.

Дифференциалы дуг координатных кривых, проходящих через точку $M(u;v)$ поверхности, имеем

$$dl_1 = \sqrt{a_{11}} \cdot |du|,\ dl_2 = \sqrt{a_{22}} \cdot |dv| .$$

Если длина дуги dl отсчитывается от начала рассматриваемой кривой, т.е. $\frac{dl}{dt} > 0$, то

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} .$$

Отсюда длина L_Γ кривой Γ вычисляется по формуле:

$$L_\Gamma = \int_a^b \frac{dl}{dt}dt = \int_a^b \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt .$$

3. Площадь поверхности.

Пусть задана простая поверхность $\Omega = \left\{\vec{r}(u;v) \middle| (u;v) \in G \subset \boldsymbol{R}_{uv}^2\right\}$. Рассмотрим на поверхности S криволинейный параллелограмм, ограниченный координатными линиями u, $u+\Delta u$, v, $v+\Delta v$. Векторы $\vec{r}_u\Delta u$ и $\vec{r}_v\Delta v$ являются касательными к координатным линиям, проходящим через точку $M(u;v)$ поверхности (рис.1).

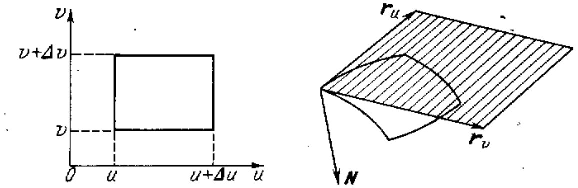

Рис.1.

Длины этих векторов отличаются от длин сторон криволинейного параллелограмма на $o(\Delta u)$ и $o(\Delta v)$ соответственно при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$. Поэтому можно считать, что площадь криволинейного параллелограмма приближенно равна площади dS параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_u\Delta u$ и $\vec{r}_v\Delta v$ при $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$:

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \cdot \Delta u\Delta v = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, dudv .$$

Определение 2. ***Элементом поверхности*** Ω называется выражение вида

$$dS = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, dudv .$$

Формально будем считать, что площадь простой поверхности S равна двойному интегралу

$$S = \iint_G dS = \iint_G \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\, dudv ,$$

где область G – измерима по Жордану.

Ниже приведены **свойства** площади поверхности.

1. Если поверхность Ω есть плоская измеримая по Жордану область G, заданная уравнениями $x = u$, $y = v$, $z = 0$, $(u;v) \in G$, то ее площадь S совпадает с плоской мерой Жордана области G:

$$S = \iint_G dS = \iint_G dudv = m(G) .$$

2 (аддитивность). Если область G гладкой перегородкой разбита на области G_1 и G_2 то и поверхность Ω разобьется на простые поверхности Ω_1 и Ω_2, при этом площадь

$$S = S_1 + S_2 .$$

3. ДЛЯ поверхности, являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции на замкнутой измеримой по Жордану области G, т.е. $\Omega = \{z = z(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy}\}$, то площадь поверхности Ω вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy .$$

При этом элемент поверхности есть $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$.

4. Ориентация поверхности.

Пусть каждой точке $M(x;y;z) \in G \subset \mathbf{R}^3$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(M) = (x(M);y(M);z(M))$, где $x(M)$, $y(M)$, $z(M)$ – координаты вектора. В этом случае говорят, что на множестве G задано ***векторное поле***.

Определение 3. Векторное поле $\vec{r}(M) = (x(M);y(M);z(M))$ называется ***непрерывным*** в области G, если его координаты $x(M)$, $y(M)$, $z(M)$ – непрерывные функции в области G.

Пусть гладкая поверхность Ω является границей некоторой области $G \subset \mathbf{R}^3$.

Определение 4. Единичная нормаль $\vec{n}$, направленная наружу от поверхности Ω, называется ***внешней*** нормалью поверхности Ω, а противоположная ей нормаль $(-\vec{n})$, направленная внутрь поверхности Ω, называется ***внутренней нормалью***.

Определение 5. Поверхность Ω называется ***двухсторонней***, если на ней можно задать непрерывное векторное поле нормалей. Поверхность, на которой не существует непрерывного векторного поля нормалей, называется ***односторонней***.

Основное свойство двусторонних поверхностей: для любой точки $M(x;y;z) \in \Omega$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности Ω и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке M направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления при возвращении в исходную точку M.

Для **односторонней** поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

Пример. Двусторонней поверхностью является сфера, параболоид вращения. Односторонней поверхностью является лист Мёбиуса.

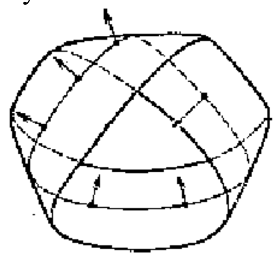

Рис.2.

На каждой двусторонней поверхности можно задать два непрерывных поля нормалей, противоположных по направлению: $\vec{n}(M)$ и $-\vec{n}(M)$. Значит, двусторонняя поверхность имеет две стороны.

Определение 5. Двусторонняя поверхность Ω называется ***ориентированной***, если для нее определены внешняя $\vec{n}(M)$ и внутренняя $-\vec{n}(M)$ нормали. Выбор определенной стороны называется ***ориентацией поверхности***.

Пример. Пусть гладкая поверхность Ω задана явно

$$\Omega = \{(x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x;y) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy},\ z = z(x;y)\},$$

где функция $z = f(x;y)$ непрерывно дифференцируема $\forall\, x, y \in G \subset Oxy$.

В этом случае

$$\vec{r} = (x;y;z(x;y)),\ \vec{r}_x = (1;0;z_x(x;y)),\ \vec{r}_y = (0;1;z_y(x;y)).$$

Вектор единичной нормали

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_y|}$$

является ориентацией поверхности Ω.

Поскольку

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -z_x \cdot \vec{i} - z_y \cdot \vec{j} + \vec{k},$$

то координаты вектора $\vec{n}$ есть:

$$\vec{n} = \left(-\frac{z_x^{'}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; -\frac{z_y^{'}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right)$$

При этом

$$\cos\left(\vec{n}, \hat{\ } \vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > 0 .$$

Это значит, что ориентация $\vec{n}$ образует острый угол с осью z. Поэтому поверхность Ω, ориентированная единичной нормалью $\vec{n}$, называется ***верхней стороной*** поверхности Ω, а ориентированная противоположной нормалью $(-\vec{n})$ (направленной вниз) – ее ***нижней стороной***.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое выражение называется первой квадратичной формы поверхности?

2. Как определяется площадь поверхности через двойной интеграл?

3. Дайте определение внешней и внутренней нормалей к поверхности, односторонней и двусторонней поверхности. Приведите примеры двусторонних и односторонних поверхностей.

4. Какой угол образует вектор единичной нормали с внешней стороной поверхности?