Тема 4
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Понятие поверхности. Способы задания поверхности.
2. Особые точки поверхности.
3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1. Понятие поверхности. Способы задания поверхности.

Пусть функция $f(x;y)$ непрерывно дифференцируема на замкнутом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$, т.е. она определена и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на $\overline{G}$.

Определение 1. Непрерывное отображение $f:\overline{G} \to \boldsymbol{R}^3$ замыкания $\overline{G}$ плоской области $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$ в пространство $\boldsymbol{R}^3$ называется ***поверхностью***.

Обозначается: $\Omega = \left\{ z = f(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy} \right\}$.

Образ множества $\overline{G}$ при отображении f называется носителем поверхности Ω.

Поверхности в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ можно задавать следующими способами.

1. Явное задание поверхности. В этом случае поверхность Ω задается одним из уравнений $z = f(x;y)$, $y = g(x;z)$, $x = h(y;z)$ и является графиком функции.

Обозначается: $\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy},\ z = f(x;y) \right\}$

Пример. Поверхность $z = x^2 + y^2$ представляет собой параболоид вращения.

2. Неявное задание поверхности. В этом случае уравнение поверхности Ω имеет вид $F(x;y;z) = 0$.

Обозначается:
$\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy},\ F(x;y;z) = 0 \right\}$

Пример. Уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3. Параметрическое задание поверхности. В этом случае поверхность Ω задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u;v), \\ y = y(u;v), \\ z = z(u;v), \end{cases} \qquad (1)$$

где $(u;v) \in G$ – ***криволинейные координаты*** или ***параметры*** поверхности.

Обозначается: $\Omega = \left\{ x(u;v), y(u;v), z(u;v) \,\middle|\, (u;v) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{uv} \right\}$

Пример. Параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в начале координат имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v, \end{cases}$$

где $0 \le u < 2\pi$, $0 \le v \le \pi$.

4. Векторный способ задания поверхности. Пусть поверхность Ω задана параметрическими уравнениями (1). Обозначим $r = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки $M(x;y;z)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, разложение которого по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеет вид

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Подставляя вместо x, y, z выражения (1), получим векторное уравнение поверхности

$$\vec{r}(u;v) = x(u;v) \cdot \vec{i} + y(u;v) \cdot \vec{j} + z(u;v) \cdot \vec{k}. \qquad (2)$$

Обозначается: $\Omega = \left\{ \vec{r}(u;v) \,\middle|\, (u;v) \in G^* \subset \boldsymbol{R}^2_{uv} \right\}$

Зафиксируем точку v_0. Множество точек поверхности Ω

$$\begin{cases} x = x(u;v_0), \\ y = y(u;v_0), \\ z = z(u;v_0) \end{cases} \quad \text{или} \quad \vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$$

называется ***координатными линиями*** на этой поверхности.

Аналогично при фиксированной переменной $u = u_0$ множество линий $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$ является координатными линиями поверхности Ω.

Определение 2. Поверхность Ω называется ***простой***, если через каждую ее точку проходит ровно по одной координатной линии из каждого семейства, т.е. отображение $f:\overline{G} \to \boldsymbol{R}^3$ является взаимно однозначным. Поверхность Ω называется ***замкнутой***, если через каждую ее точку проходит более одной координатной линии из каждого семейства

Пример. Сфера не является простой поверхностью, полусфера является простой поверхностью.

Любая поверхность, заданная явно, является простой.

Для простых поверхностей различным внутренним точкам $(u;v)$ области G соответствуют различные точки $(x;y;z)$ поверхности Ω.

Определение 3. Множество точек поверхности Ω соответствующих граничным точкам области G, образуют ***границу*** (***край***) поверхности. Точки поверхности Ω, не принадлежащие краю, называются ее ***внутренними*** точками. Замкнутые поверхности – это те поверхности, которые не имеют края.

Определение 4. Говорят, что поверхность Ω является ***непрерывно дифференцируемой***, если функции $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, $z = z(u;v)$ непрерывно дифференцируемы.

2. Особые точки поверхности .

Пусть задана непрерывно дифференцируемая поверхность Ω векторным уравнением (2). И пусть $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ – частные производные вектор функций $\vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$ и $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$, т.е. $\vec{r}_u$ – касательный вектор к координатной линии $\vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$, $\vec{r}_v$ – касательный вектор к координатной линии $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$.

Под ***кривыми на поверхности*** Ω понимают кривые, задаваемые в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t);v(t)), \qquad (3)$$

где $t \in [a;b]$, функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемые функции. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции двух переменных, имеем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Отсюда следует, что касательная к любой кривой на поверхности Ω лежит в плоскости векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

Определение 5. Точка $M_0 = \vec{r}(u_0;v_0)$ поверхности Ω называется ***особой***, если в ней векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ коллинеарны. Точка $M_0 = \vec{r}(u_0;v_0)$ поверхности Ω называется ***неособой***, если в ней векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны.

В случае коллинеарности векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ векторное произведение равно 0, т.е. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0$. В случае неколлинеаности – $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$.

Пример. Вершина конуса – особая точка. Сфера не имеет особых точек.

Определение 6. Поверхность Ω называется ***гладкой***, если она непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Поверхность называется ***кусочно-гладкой***, если ее можно разбить на конечное число простых гладких частей.

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательная плоскость. Пусть поверхность задана векторным уравнением (2). В силу неколлинеарности векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в неособой точке $M_0(u_0;v_0)$, в ней однозначно определена плоскость, содержащая эти векторы. Эта плоскость содержит все касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в данной неособой точке.

Определение 7. Плоскость, проходящая через неособую точку $M_0(u_0;v_0)$ поверхности Ω, параллельно векторам $\vec{r}_u(M_0)$

и $\vec{r}_v(M_0)$ называется ***касательной плоскостью*** к поверхности Ω в этой точке.

Пусть $\vec{r}_u^{\,0} = \vec{r}_u(u_0; v_0)$, $\vec{r}_v^{\,0} = \vec{r}_v(u_0; v_0)$, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор произвольной точки $M_0(u_0; v_0)$ касательной плоскости к поверхности Ω в точке M_0 (рис.1). Уравнение касательной плоскости в векторной форме находится из равенства нулю смешанного произведения векторов, лежащих в этой плоскости:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{r}_u\vec{r}_v = 0.$$

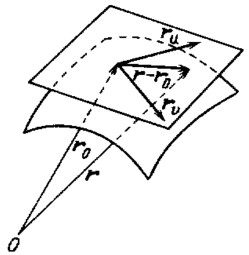

Рис.1.

Переходя к декартовым координатам x, y, z по формулам (1), имеем:

$$\vec{r} = (x; y; z),\ \vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0),\ \vec{r}_u^{\,0} = (x_u^0; y_u^0; z_u^0),\ \vec{r}_v^{\,0} = (x_v^0; y_v^0; z_v^0).$$

Тогда уравнение касательной плоскости в координатной форме запишется в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если поверхность Ω задана явно уравнением $z = f(x; y)$, то, принимая переменные x и y за координаты поверхности, получим

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$z - z_0 = f_x'(x - x_0) + f_y'(y - y_0),$$

где $z_0 = f(x_0; y_0)$, $f_x' = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0; y_0)}$, $f_y' = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0; y_0)}$.

Ранее было получено такое же уравнение касательной плоскости, основываясь на локальном приближении дифференцируемой функции линейной функцией.

Определение 8. ***Вектором нормали*** к гладкой поверхности Ω в точке M_0 называется вектор $\vec{N}$, перпендикулярный касательной плоскости в точке M_0. Прямая, проходящая через точку M_0 в направлении нормали, называется ***нормальной прямой***.

Определение 9. Единичной нормалью к поверхности Ω называется вектор $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$.

Пусть поверхность задана векторным уравнением

$$\vec{r}(u; v) = x(u; v) \cdot \vec{i} + y(u; v) \cdot \vec{j} + z(u; v) \cdot \vec{k}.$$

Если $M_0(u_0; v_0)$ неособая точка поверхности, то нормальный вектор $\vec{N}$ есть векторное произведение векторов $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$:

$$\vec{N} = \vec{r}_u(M_0) \times \vec{r}_v(M_0).$$

Согласно определению векторного произведения в координатной форме имеем

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Отсюда вектор нормали имеет вид

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Тогда каноническое уравнение любой прямой, перпендикулярной поверхности Ω в точке M_0 есть

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}. \qquad (4)$$

Обозначим $A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $B=-\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$.

Тогда разложение нормального вектора $\vec{N}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ запишется в виде

$$\vec{N} = A\cdot\vec{i} + B\cdot\vec{j} + C\cdot\vec{k}.$$

Единичный вектор нормали $\vec{n}$ запишется как

$$\vec{n} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\vec{j} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\vec{k}.$$

Пусть поверхность Ω задана уравнением $z=f(x;y)$, где $(x;y)\in G\subset \boldsymbol{R}^2$. Тогда параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x;y). \end{cases}$$

Вектор нормали примет вид

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} y'_x & f'_x \\ y'_y & f'_y \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x'_x & f'_x \\ x'_y & f'_y \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x'_x & y'_x \\ x'_y & y'_y \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & f'_x \\ 0 & f'_y \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Отсюда $\vec{N} = -f'_x\cdot\vec{i} - f'_y\cdot\vec{j} + \vec{k}$.

Для единичного нормального вектора $\vec{n}$ в точке $M(x_0;y_0)$ имеем

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(\frac{-f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}; \frac{-f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}\right).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется поверхностью?
2. Назовите способы задания поверхности. Для каждого способа задания приведите пример.
3. Какие поверхности называются простыми? Что называется границе поверхности, внутренней точкой поверхности?
4. Какие поверхности называются замкнутыми? Приведите пример замкнутой поверхности.
6. Дайте определение особых и неособых точек поверхности. Приведите примеры. Какая поверхность называется гладкой, кусочно-гладкой?
7. Дайте определение нормального вектора к поверхности. Какие координаты имеет нормальный вектор при векторном задании поверхности, при явном задании поверхности?
8. Какая плоскость называется касательной к поверхности? Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности.
9. Какая прямая называется нормалью к поверхностью? Запишите уравнение нормали.