Лекция 11. n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определение кратного интеграла Римана.
2. Классы интегрируемых функций.
3. Сведение n-кратных интегралов к повторным.
4. Формула замены переменной в кратном интеграле.

1. Определение и свойства кратного интеграла Римана..

Пусть множество G измеримо по Жордану в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ определена на измеримом по Жордану множестве G, а τ есть разбиение множества G: $\tau=\{G_i\}$, $i=1,2,...,m$. Возьмем в каждом из множеств G_i по точке $C_i(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$, $i=1,2,...,m$.

Определение 1. Выражение

$$\sigma_m(\tau,C_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot m(G_i) \qquad (1)$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $f(x)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выборке точек $C_i\in G_i$, $C_i(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$, $i=1,2,...,m$. Здесь $m(G_i)$ – мера множества G_i.

Если функция $f(x)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau=\{G_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа

$$m_i=\inf_{x\in G_i} f(x),\ M_i=\sup_{x\in G_i} f(x).$$

Числа $s_\tau=\sum_{i=1}^{m} m_i\cdot m(G_i)$ и $S_\tau=\sum_{i=1}^{m} M_i\cdot m(G_i)$ называются ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу***, соответствующими разбиению τ.

Определение 2. Число I называется ***пределом интегральной суммы*** σ_m при мелкости разбиения $\lambda(\tau)\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого разбиения τ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ и для любой выборки точек $C_i(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$, $i=1,2,...,m$, выполняется неравенство:

$$|I-\delta_m|<\varepsilon.$$

Обозначается: $I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\cdot m(G_i)$.

Число I называется n ***-кратным интегралом Римана*** от функции $f(x)$ по множеству G, функция $f(x)$ – ***интегрируемой*** на множестве G.

Обозначается: $\iint\limits_G ...\int f(x_1;x_2;...;x_n)dx_1dx_2...dx_n$.

В случае $n=2$ получаем двойной интеграл, в случае $n=3$ – тройной.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***существенно неограниченной*** на измеримом по Жордану множестве $G\in\boldsymbol{R}^n$, если она неограничена на любом подмножестве $G'\subset G$, таком, что $m(G\setminus G')=0$.

Теорема 1 (критерий интегрируемости). *Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на измеримом по Жордану множестве $G\in\boldsymbol{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось $\delta>0$ такое, что для любого разбиения τ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ разность верхней и нижней сумм Дарбу выполняется неравенство:*

$$S_\tau-s_\tau<\varepsilon.$$

Доказательство теоремы 1 аналогично соответствующему доказательству для определенного интеграла.

2. Классы интегрируемых функций.

Напоминание: Компакт в $\boldsymbol{R}^n$ – это ограниченное и замкнутое множество. Функция $f(x)$, непрерывная на компакте, равномерно непрерывной на этом компакте (теорема Кантора).

Теорема 2. *Непрерывная на измеримом по Жордану компакте функция $f(x)$ интегрируема на этом компакте.*

Доказательство теоремы 2 ничем не отличается от соответствующего доказательства теоремы об интегрируемости функции одной переменной, непрерывной на отрезке.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x)$ *ограничена на измеримом компакте* $G \in \boldsymbol{R}^n$ *и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль. Тогда функция* $f(x)$ *интегрируема на* G.

► Пусть E есть множество точек разрыва функции $f(x)$ и $m(E)=0$. По определению множества жордановой меры нуль для любого $\varepsilon>0$ найдется такое открытое клеточное множество A, что $A \subset E$ и $m(A)<\dfrac{\varepsilon}{4M}$, где $M=\sup\limits_{x\in G} f(x)$.

На замкнутом ограниченном множестве $G \setminus A$ функция $f(x)$ непрерывна, а поэтому интегрируема (теорема 2).

Для любого $\varepsilon>0$ найдется разбиение $\tau' = \{G_2; G_3; ...; G_N\}$ множества $G \setminus A$ такое, что

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = \sum_{k=2}^{N} (M_k - m_k) m(G_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $G_1 = A \bigcap G$. Тогда множества $\{G_1; G_2; G_3; ...; G_N\}$ образует разбиение τ множества G, причем

$$m(G_1) \le m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Тогда

$$S_\tau - s_\tau = (M_1 - m_1) m(G_1) + \sum_{k=2}^{N} (M_k - m_k) m(G_k) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как ε произвольное положительное число, то в силу теоремы 1 функция $f(x)$ интегрируема на множестве G. ◄

Все перечисленные свойства доказываются так же, как и соответствующие свойства определенного интеграла.

1. Если $f(x)\equiv 1$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, то справедливо равенство

$$\iint\limits_G \cdots \int 1 dx_1 dx_2 ... dx_n = m(G).$$

2. Если $f(x)\ge 0$ и $f(x)$ – интегрируемая на измеримом по Жордану множестве G функция, то

$$\iint\limits_G \cdots \int f(x_1;x_2;...;x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \ge 0.$$

3 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x)$ и $g(x)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, интегрируемы на измеримом по Жордану множестве G, то функция $\alpha \cdot f(x;y;z) + \beta \cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство

$$\iint\limits_G \cdots \int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$= \alpha \iint\limits_G \cdots \int f\, dx_1 dx_2 ... dx_n + \beta \iint\limits_G \cdots \int g\, dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

4 (монотонность). Если $f(x)$ и $g(x)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, интегрируемые на множестве G и $f(x)\le g(x)$, то

$$\iint\limits_G \cdots \int f\, dx_1 dx_2 ... dx_n \le \iint\limits_G \cdots \int g\, dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

5 (о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на измеримом связном компакте $G \in \boldsymbol{R}^n$, то найдется точка $\xi = (\xi_1; \xi_2; ...; \xi_n) \in G$ такая, что

$$\iint\limits_G \cdots \int f\, dx_1 dx_2 ... dx_n = f(\xi) m(G).$$

6 (аддитивность). Если $\{G_k\}$, $k=1,2,...,m$, есть разбиение множества G, то функция $f(x)$ интегрируема на множестве G в том и только в том случае, когда она интегрируема на каждом из множеств G_k причем

$$\iint\limits_G \cdots \int f\, dx_1 dx_2 ... dx_n = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{G_k} \cdots \int f\, dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

7. Произведение интегрируемых на измеримом множестве G функций есть интегрируемая на множестве G функция,

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве G, то функция $|f(x)|$ также интегрируема и

$$\left|\iint\limits_{G}\ldots\int f\,dx_1dx_2\ldots dx_n\right| = \iint\limits_{G}\ldots\int |f|\,dx_1dx_2\ldots dx_n .$$

3. Сведение n-кратных интегралов к повторным.

Определение 4. Область $\Omega \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ называется ***элементарной относительно оси*** x_{n+1}, если

$$\Omega = \{x = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in G \mid \varphi_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) \le x_{n+1} \le \varphi_2(x_1; x_2; \ldots; x_n)\},$$

где G – замкнутая ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$ и φ_1 и φ_2 – непрерывные на G функции.

Теорема 4. *Если $\Omega \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ – область, элементарная относительно оси x_{n+1} а $f(x_1; x_2; \ldots; x_{n+1})$ – непрерывная функция на Ω, то справедлива следующая формула:*

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1; x_2; \ldots; x_{n+1})dx_1dx_2\ldots dx_{n+1} =$$

$$= \iint\limits_{G} dx_1dx_2\ldots dx_n \int\limits_{\varphi_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)}^{\varphi_2(x_1;x_2;\ldots;x_n)} f(x_1; x_2; \ldots; x_{n+1})dx_{n+1} .$$

Без доказательства.

4. Формула замены переменной в кратном интеграле.

Пусть G – ограниченная область $\boldsymbol{R}^n$, отображение $F : G \to \boldsymbol{R}^n$ есть взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение.

Аналитически отображение $F : G \to \boldsymbol{R}^n$ задается с помощью непрерывно дифференцируемых функций:

$x_1 = \varphi_1(u_1; u_2; \ldots; u_n)$,

..........................,

$x_n = \varphi_n(u_1; u_2; \ldots; u_n)$.

Теорема 5. *Пусть взаимно однозначное отображение $F : G \to \boldsymbol{R}^n$ удовлетворяет условиям*

а) производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, ограничены в области G,

б) производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, равномерно непрерывны в G,

в) якобиан отображения

$$J = \frac{D(\varphi_1; \varphi_2; \ldots; \varphi_m)}{D(u_1; u_2; \ldots; u_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} > 0 .$$

И пусть области G и $G' = F(G)$ измеримы и функция $f(x)$ непрерывна в замкнутой области G'. Тогда справедлива формула замены переменной в кратном интеграле:

$$\iint\limits_{G'}\ldots\int f(x_1; x_2; \ldots; x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{G}\ldots\int f(\varphi_1(u); \varphi_2(u); \ldots; \varphi_n(u))|J|\,du_1du_2\ldots du_n ,$$

где $u = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$.

Без доказательства.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение интегральной суммы Римана.

2. Что называется n-кратным интегралом Римана?

3. Сформулируйте достаточное условие интегрируемости функций.

4. Перечислите свойства кратного интеграла.

5. Сформулируйте теорему о сведение n-кратных интегралов к повторным.

6. Сформулируйте теорему о формуле замены переменной в кратном интеграле.