Лекция 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Замена переменных в двойном интеграле.
2. Криволинейные координаты. Переход к полярным координатам.

1. Замена переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным по формулам

$$x = x(u;v),\quad y = y(u;v), \tag{1}$$

где $(u;v)\in G^*$.

При этом каждая точка $(x;y)\in G$ соответствует некоторой точке $(u;v)\in G^*$, т.е. когда точка $(u;v)$ «пробегает» область G^*, соответствующая ей точка $(x;y)=(x(u;v);y(u;v))$ «пробегает» область G.

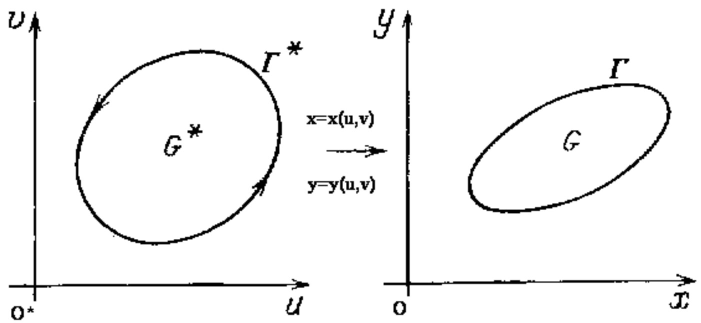

Рис.1.

Функции (1) осуществляют отображение области $G^*\subset \boldsymbol{R}^2_{uv}$ на область $G\subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$. Область G называется ***образом*** области, а область G^* – ***прообразом*** области G при отображении (1).

Теорема 1. *Пусть 1) отображение $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ переводит замкнутую ограниченную область G^* в замкнутую ограниченную область G и является взаимно однозначным;*

2) функции $x(u;v)$ и $y(u;v)$ имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка;

3) якобиан отображения $J=\dfrac{D(x;y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$ во всех области G^*;

4) функция $f(x;y)$ непрерывна в области G.

Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(x(u;v);y(u;v))|J|dudv. \tag{2}$$

► Интегралы в обеих частях существуют, поскольку являются интегралами от непрерывных на компактах функций.

Пусть

$$\Gamma^* = \{u(t),v(t)|\ \ a\le t\le b\}$$

– положительно ориентированный контур, ограничивающий область G^*.

И пусть

$$\Gamma = \{x(u(t);v(t));y(u(t);v(t))|\ \ a\le t\le b\}$$

– ориентированный контур, являющийся границей области G, ориентация которого порождается ориентацией контура Γ^* при помощи отображения $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, $(u;v)\in G^*$.

Положим

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{если контур } \Gamma \text{ ориентирован положительно},\\ -1, & \text{если контур } \Gamma \text{ ориентирован отрицательно}.\end{cases}$$

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$P(x;y)=\int\limits_{\varphi(x)}^{y} f(x;t)dt,$$

где $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$.

Очевидно, что $f(x;y) = \dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}$, $(x;y) \in \overline{G}$, и функции $P(x;y)$, $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G}$.

Тогда с учетом формулы Грина, получим:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_G \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}dxdy = -\varepsilon\oint\limits_\Gamma Pdx = .$$

$$= -\varepsilon\int\limits_a^b P \cdot x'(t)dt = -\varepsilon\int\limits_a^b P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt =$$

$$= -\varepsilon\oint\limits_{\Gamma^*} P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}du + P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}dv = [\text{формула Грина}]=$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]dudv =$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right]dudv =$$

$$= \varepsilon\iint\limits_{G^*}\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}dudv = \varepsilon\iint\limits_{G^*} f\big(x(u;v);y(u;v)\big)J\,dudv.$$

Получили равенство:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \varepsilon\iint\limits_{G^*} f\big(x(u;v);y(u;v)\big)J\,dudv,$$

которое верно для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции f.

Поскольку $\iint\limits_G dxdy = S$, то для функции $f \equiv 1$ получим $S = \varepsilon\iint\limits_{G^*} J\,dudv$, где S – площадь области G. Левая часть этого

равенства положительна, следовательно, и правая положительна. Так как якобиан отображения J сохраняет на G^* постоянный знак, то это возможно, когда $\varepsilon J > 0$. Отсюда следует, что $\varepsilon J = |J|$. Тогда

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f\big(x(u;v);y(u;v)\big)|J|\,dudv. \blacktriangleleft$$

Формула (2) называется ***формулой замены переменных в двойном интеграле*** и является важнейшим способом приведения двойного интеграла к виду, удобному для вычисления.

Замечание. Если условие 1) или условие 3) нарушается на множестве точек площади нуль (в отдельных точках или на отдельных кривых), то формула (2) остается в силе.

Геометрический смысл знака якобиана. Из формулы $\varepsilon J = |J|$ и выбора числа ε следует, что если $J > 0$, то $\varepsilon = 1$, т.е. положительной ориентации контура Γ^* при отображении $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ соответствует положительная ориентация контура Γ. Если $J < 0$, то $\varepsilon = -1$, т.е. положительной ориентации контура Γ^* соответствует отрицательная положительная ориентация контура Γ.

Таким образом, отображения с положительным якобианом сохраняют ориентации контуров, а отображения с отрицательным якобианом меняют их на противоположные.

2. Криволинейные координаты.

Взаимно однозначное отображение

$$u = u(x;y),\quad v = v(x;y), \tag{3}$$

открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$ на множество $G^* \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x;y) \in G$ пару чисел $(u;v) \in G^*$. Поэтому данное отображение можно рассматривать как переход к новым координатам u и v точки $(x;y)$ одной и той же плоскости G. В этом случае множество G^* представляет собой множество пар новых координат точек множества G.

Обратный переход от координат u и v к координатам x и y осуществляется с помощью отображения

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v), \qquad (4)$$

обратного отображению (3).

О п р е д е л е н и е 1. Множество точек плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется ***координатной линией***.

При $u = u_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u_0;v), \; y = y(u_0;v);$$

при $v = v_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u;v_0), \; y = y(u;v_0).$$

В двух случаях получаются уравнения, являющиеся параметрическими уравнениями некоторых кривых. Поэтому координаты u и v называются ***криволинейными координатами***.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_G y^3 dxdy$ по области (рис.2)

$$G = \{(x;y) \mid \; y \ge x^2, y \le 2x^2, xy \ge 1, xy \le 2\}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при $x \ge 0$ отображение вида:

$$u = \frac{y}{x^2}, \; v = xy. \qquad (5)$$

Образом области $\overline{G}$ является квадрат

$$G^* = \{(u;v) \mid \; 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}.$$

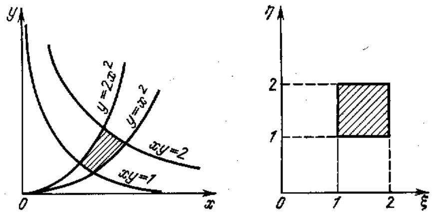

Рис.2.

Данное отображение является взаимно однозначным, поскольку уравнения (5) разрешимы относительно x и y:

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \; y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

Якобиан отображения

$$J = \frac{D(x;y)}{D(u;v)} == \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Отсюда $|J| = \dfrac{1}{3|u|}$.

Тогда

$$\iint\limits_G y^3 dxdy = \left[\begin{array}{l} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}, y^3 = uv^2 \end{array} \right] = \iint\limits_{G^*} uv^2 \frac{1}{3|u|} dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \iint\limits_{G^*} v^2 dudv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{1}{3} u\Big|_1^2 \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2-1)\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}.$$

Переход к полярным координатам. Если область G ограничена дугами окружности, то удобно переходить к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad (6)$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобиан перехода к полярным координатам имеет вид:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(\rho;\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Очевидно, что $J > 0$. Поэтому формула замены переменных запишется как

$$\iint\limits_G f(x;y) dxdy = \iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r\, dr d\varphi. \qquad (7)$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где $G=\left\{(x;y)\middle| x^2+y^2\le 1, \text{первая четверть}\right\}$.

Решение. Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам по формулам (3).

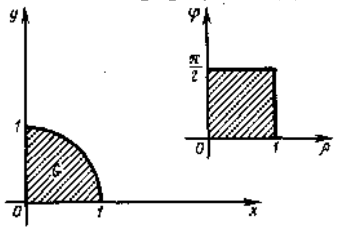

Рис.2.

Из рисунка 2 видно, что область G преобразуется в прямоугольник

$$G^*=\left\{(r;\varphi)\middle| 0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

По формуле (7) имеем

$$\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{G^*} e^{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin\varphi}r\,drd\varphi=\iint\limits_{G^*} e^{r^2}r\,drd\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{r^2}d\left(r^2\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{2}e\Big|_0^1\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.
2. В чем состоит геометрический смысл знака якобиана?
3. Какие координаты называются криволинейными?
4. Чему равен якобиан в случае перехода к полярным координатам?