Тема 2
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

1. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла первого рода.
2. Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
4. Приложения криволинейного интеграла первого рода.

1. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла первого рода.

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной плотностью $\rho = \rho(x;y)$. Требуется определить массу m дуги AB.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n.

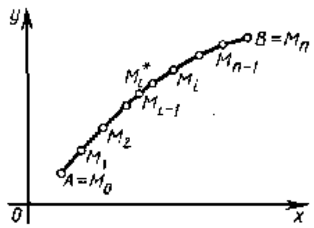

Рис.1.

Будем считать, что на каждой частичной дуге плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка частичной области. Тогда масса части l_i приблизительно равна

$$m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i,$$

а масса всей дуги AB

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i . \qquad (1)$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Сумма (1) тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением массы всей дуги AB можно считать

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i . \qquad (2)$$

Задача о площади цилиндрической поверхности. Пусть в плоскости Oxy задана некоторая гладкая кривая AB, которая является областью определения некоторой функции $z = f(x;y)$, причем $\forall\, M(x;y)\ \ f(M) \ge 0$. Тогда точки $(x;y;f(M))$ в совокупности представляют собой некоторую пространственную кривую. Требуется найти площадь цилиндрической поверхности, для которой AB – образующая, направляющие параллельны оси Oz, ограниченной сверху $z = f(x;y)$, снизу кривой AB, с боков прямыми.

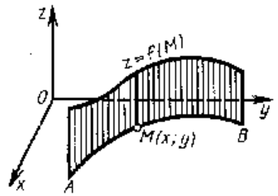

Рис.2.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Из каждой точки разбиения M_0, M_1, ..., M_n проведем перпендикуляры к плоскости Oxy высотой $f(M_i)$, $i = 1,2,...,n$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок. На каждой частичной дуге l_i возьмем точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Каждую полоску заменим прямоугольником, у которого Δl_i – основание, $f(\xi_i;\eta_i)$ – высота. Тогда площадь каждой полоски приблизительно будет равна

$$S_i \approx f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i ,$$

а площадь всей цилиндрической поверхности

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i . \qquad (3)$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Сумма (3) тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением площади всей цилиндрической поверхности можно считать

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta l_i . \qquad (4)$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

Напоминание: Кривая, заданная уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$, называется ***гладкой***, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $x'(t)$ и $y'(t)$, не обращающиеся одновременно в нуль, $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$. Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кривых, называется ***кусочно-гладкой***.

Рассмотрим на плоскости Oxy гладкую или кусочно-гладкую кривую AB, и предположим, что функция $z = f(x;y)$ определена и ограничена на кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_i, $i = 1,2,...,n$ точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

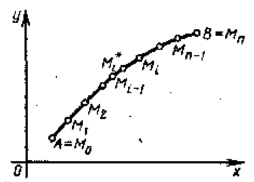

Рис.3.

Определение 1. Сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;)\cdot \Delta l_i \qquad (5)$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x;y)$, определенной на дуге AB.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$

Определение 2. *Криволинейным интегралом первого рода* называется предел (если он существует) интегральной суммы (5) при $\lambda \to 0$:

$$I = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;)\cdot \Delta l_i$$

Обозначается: $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$.

Подынтегральная функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой*** вдоль кривой AB, сама кривая AB – ***контуром интегрирования***, A и B – ***начальной*** и ***конечной*** точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода). *Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части, и выбора точек в них.*

Без доказательства.

Криволинейный интеграла 1-го рода обладает следующими **свойствами**.

1. $\int\limits_{AB} dl = L$, где L – длина дуги AB.

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на дуге AB, то функция $\alpha\cdot f(x;y) + \beta\cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на дуге AB и справедливо равенство

$$\int_{AB}(\alpha f(x;y)+\beta g(x;y))dl=\alpha\int_{AB}f(x;y)dl+\beta\int_{AB}g(x;y)dl\ .$$

3 (аддитивность). Если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB=AC\cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на дуге AB и справедлива формула

$$\int_{AB}f(x;y)dl=\int_{AC}f(x;y)dl+\int_{CB}f(x;y)dl\ .$$

4 (оценка интеграла). Если на дуге AB имеет место неравенство $|f(x;y)|\le M$, то

$$\left|\int_{AB}f(x;y)dl\right|\le M\cdot L\ ,$$

где L – длина дуги AB.

5 (монотонность.) Если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y)\ge g(x;y)$,

$$\int_{AB}f(x;y)dl\ge\int_{AB}g(x;y)dl\ .$$

6. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода дуги AB, т.е.

$$\int_{AB}f(x;y)dl=\int_{BA}f(x;y)dl\ .$$

3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ t\in[\alpha,\beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t=\alpha$, точке B – значение $t=\beta$.

Известно, что переменная длина дуги $l=l(t)$, отсчитываемая от начала кривой AB, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t и

$$\frac{dl}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ .$$

При этом дифференциал длины дуги равен:

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Тогда криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{AB}f(x;y)dl=\int_{\alpha}^{\beta}f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\ .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB}y^2dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их параметрические представления, имеем

$$y^2=a^2\sin^2t\ ,\ \ x'=-a\sin t\ ,\ \ y'=a\cos t\ ,$$

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}=a\,dt\ .$$

Тогда

$$\int_{AB}y^2dl=\int_0^{\pi/2}a^2\sin^2t\cdot a\,dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{a^3\pi}{4}.$$

Полярное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r=r(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta\ ,$$

и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны между собой соотношениями

$$\left.\begin{array}{l} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{array}\right\}, \ \forall\varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой и для вычисления дифференциала дуги можно применить формулу $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$. Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$\left.\begin{array}{l} x_\varphi' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y_\varphi' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{array}\right\}$$

Отсюда $(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 = r^2 + (r')^2$

Следовательно, $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$.

Тогда существуют интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi; r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)dl$, где

$$AB = \left\{(x;y)\middle| x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{\sin 2\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их представления в полярных координатах, имеем

$$dl = \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{d\varphi}{r}.$$

Тогда

$$\int\limits_{AB}(x+y)dl = \int\limits_{0}^{\pi/2}(r\sin\varphi + r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi = 2.$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением

$$y = y(x),\ a \le x \le b,$$

и $y(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a;b]$.

Рассматривая переменную x как параметр, дифференциал дуги примет вид $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$. Тогда существует интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где

$AB = \left\{(x;y)\middle| y^2 = 2x \text{ от точки } O(0;0) \text{ до точки } M(2;2)\right\}$.

Решение. Имеем

$$y = \sqrt{2x},\ y' = \frac{1}{\sqrt{2x}},\ dl = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx.$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} ydl = \int\limits_{0}^{2}\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx = \int\limits_{0}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

Замечание. Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной дуге AB:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl.$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $u = f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))\cdot\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

4. Приложения криволинейного интеграла первого рода.

1. Длина кривой. Длина L кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$L = \int_{AB} dl .$$

2. Площадь цилиндрической поверхности. Пусть направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz. Тогда площадь поверхности, задаваемой функцией $z = f(x;y)$, находится по формуле

$$S = \int_{AB} f(x;y)dl .$$

3. Масса материальной кривой. Масса материальной кривой AB переменной плотности $\rho = \rho(x;y)$ определяется формулой

$$m = \int_{AB} \rho(x;y)dl .$$

4. Статические моменты. Статические моменты материальной кривой AB относительно осей Ox и Oy определяются по формулам

$$M_x = \int_{AB} y\rho(x;y)dl , \qquad M_y = \int_{AB} x\rho(x;y)dl .$$

5 .Координаты центра тяжести. Координаты центра тяжести материальной кривой AB определяются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{m} .$$

6. Моменты инерции. Для материальной кривой AB моменты инерции относительно осей Ox и Oy определяются по формулам

$$I_x = \int_{AB} y^2\rho(x;y)dl , \qquad I_y = \int_{AB} x^2\rho(x;y)dl ,$$

а момент инерции относительно начала координат $O(0;0)$

$$I_0 = \int_{AB} \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)dl .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу о массе плоской кривой?
2. Сформулируйте задачу о площади цилиндрической поверхности?
3. Какая кривая называется гладкой и кусочно-гладкой?
4. Что называется интегральной суммой для функции $f(x;y)$, определенной на дуге AB?
5. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода.
6. Перечислите свойства криволинейного интеграла первого рода. Что общего и какие различия между свойствами криволинейного интеграла 1-го рода и определенного интеграла?
7. Как вычисляется криволинейного интеграла первого рода с помощью определенного в случае задания плоской кривой 1) в параметрическом виде; 2) в полярных координатах; 3) в явном виде?
8. Какие геометрические и физические приложения криволинейного интеграла первого рода?