Лекция 7. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
2. Теорема о равенстве смешанных производных.
3. Дифференциалы высших порядков.

1. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $P(x; y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются ***частными производными первого порядка***. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$.

Обозначаются:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, z''_{xx} – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f''_{xy}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, z''_{xy} – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, z''_{yx} – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, z''_{yy} – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим восемь ***частных производных третьего порядка***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***частной производной** n**-го порядка*** и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ называются ***смешанными производными***.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Р е ш е н и е. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y^2),\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x^2 + y^2).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\boldsymbol{R}^2$.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin(x^2 + y^2),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\sin(x^2 + y^2).$$

Видно, что смешанные частные производные второго порядка этой функции равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4^2 x\sin(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2 \sin\left(x^2 + y^2\right).$$

2. Теорема о равенстве смешанных производных.

Среди частных производных второго порядка функции $z = f(x, y)$ имеются две смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Возникает вопрос: зависит ли результат дифференцирования функций нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным.

Теорема 1. *Если функция* $z = f(x, y)$ *и ее частные производные* f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} *определены и непрерывны в точке* $P_0(x_0; y_0)$ *и в некоторой ее окрестности, то*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

► Пусть смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} определены в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x; y) \mid |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \delta\}$$

и непрерывны в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Рассмотрим в прямоугольнике Π функцию

$$g(x; y) = f(x; y) - f(x_0; y) - f(x; y_0) + f(x_0; y_0).$$

При фиксированном $y \in (y_0 - \delta; y_0 + \delta)$ на интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(t; y) - f(t; y_0),$$

которая дифференцируема на этом интервале и

$$\varphi'(t) = f'_x(t; y) - f'_x(t; y_0).$$

Функцию $g(x; y)$ можно записать в виде

$$g(x; y) = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа по переменной x, получим

$$g(x; y) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x =$$
$$= \left[f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0)\right] \cdot \Delta x,$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Применяя еще раз формулу конечных приращений Лагранжа, но уже по переменной y, имеем

$$g(x; y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta x \Delta y,$$

где $0 < \theta_2 < 1$.

При фиксированном $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ на интервале $(y_0 - \delta; y_0 + \delta)$ рассмотрим функцию

$$\psi(\tau) = f(x; \tau) - f(x_0; \tau).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, получим

$$g(x; y) = \psi(y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y =$$
$$= \left[f'_y(x; y_0 + \theta_3 \Delta y) - f'_y(x_0; y_0 + \theta_3 \Delta y)\right] \cdot \Delta y =$$
$$= f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) \cdot \Delta y \Delta x,$$

где $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$.

Переходя к пределу при $(\Delta x; \Delta y) \to (0; 0)$ и пользуясь непрерывностью смешанных производных в точке $P_0(x_0; y_0)$, получаем равенство

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \blacktriangleleft$$

Замечание. Все приведенные выше рассуждения, а также теорема 1 имеют место и для функции любого числа переменных.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $u = xyz - e^{x+y}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3. Дифференциалы высших порядков.

Случай 1. Функция $z = f(x;y)$**.** Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Придавая x и y приращения $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ можно вычислить полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$

который называют ***дифференциалом первого порядка*** функции $z = f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ если он существует, называется ***дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2 z = d(dz).$$

Найдем аналитическое выражение для $d^2 z$, считая dx и dy постоянными:

$$d^2 z = d\left(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right) = d\left(f'_x(x,y)\right)dx + d\left(f'_y(x,y)\right)dy =$$
$$= \left(f''_{xx}(x,y)dx + f''_{yx}(x,y)dy\right)dx + \left(f''_{yx}(x,y)dx + f''_{yy}(x,y)dy\right)dy =$$
$$= f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Поступая аналогично, получаем аналитическое выражение для ***дифференциала третьего порядка*** $d^3 z$**:**

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right) =$$
$$= f'''_{xxx}(x,y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)dx^2 dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2 + 3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Определение 1. Функция f называется k ***раз непрерывно дифференцируемой*** в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Обозначается: $f \in \mathrm{C}_G^k$.

Замечания. 1. Аналитические выражения для dz, $d^2 z$ и $d^3 z$ кратко записывают в виде следующих символических формул:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Тогда и для любого n справедливо соотношение

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

2. Если $z = f(x,y)$ – дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, можно получить новые выражения для $d^2 z = d(dz)$, $d^3 z = d\left(d^2 z\right)$, …. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Пример. Найти dz и $d^2 z$, если $z = \ln(x-y) + \sqrt{xy}$.

Решение. Используем формулу $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Так как

$$z'_x = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y = \frac{-1}{x-y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y},$$

то

$$dz = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Для определения d^2z вычислим предварительно частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда

$$d^2z = \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2 + 2\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy -$$

$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

Случай 2. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть задана функция многих переменных $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$. Производные порядка выше первого определяются по формуле

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}\right).$$

Дифференциал

$$du(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n, \ x \in G,$$

есть функция $2n$ переменных, а именно $x_1, x_2, ..., x_n$ и dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Если фиксировать переменные dx_1, dx_2, ..., dx_n, то дифференциал $du(x)$ является функцией x, имеющей в области G непрерывные частные производные. Следовательно, $du(x)$ как функция x имеет в каждой точке $x \in G$ дифференциал $d(du)$.

Обозначим приращения независимых переменных δx_1, δx_2, ..., δx_n. Тогда

$$d(du) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(du)}{\partial x_k}\delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}dx_i \delta x_k.$$

Выражение $d(du)$ есть билинейная форма относительно приращений δx_1, δx_2, ..., δx_n. Полагая

$$dx_1 = \delta x_1, \ dx_2 = \delta x_2, \ ..., \ dx_n = \delta x_n$$

получаем квадратичную форму, которая называется ***вторым дифференциалом*** функции $u = f(x)$ в точке x.

Обозначается: $d^2u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}dx_i dx_k$.

Аналогично, предполагая, что все частные производные третьего порядка непрерывны, определяется третий дифференциал функции $u = f(x)$:

$$d^3u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}dx_i dx_k dx_j.$$

По индукции определяется дифференциал m-го порядка в предположении, что все частные производные m-го порядка непрерывны в точке x. Если дифференциал $d^{m-1}u$ вычислен как однородная форма порядка $m-1$ относительно dx_1, dx_2, ..., dx_n с коэффициентами, являющимися функциями x, то вычисляя первый дифференциал от $d^{m-1}u$ и полагая затем $dx_i = \delta x_i$, $i = 1,2,...,n$, получим:

$$d^m u = \sum_{k=1}^{n}...\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}}dx_{i_1}...dx_{i_m}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как находятся частные производные высших порядков?
2. Что называется смешанной производной? Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.
3. Докажите формулу для дифференциала второго порядка.