СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Теория рядов» является третьей частью цикла работ по курсу «Математический анализ», которые написаны на основе лекций, проводимых на физическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Их содержание включает материал, соответствующий учебной программе по данной дисциплине, и который изложен в учебниках и учебных пособиях по математическому анализу. Пособие содержит теоретический материал по темам «Числовые и функциональные ряды» и «Ряды Фурье». Пособие основано на педагогических принципах, изложенных в предисловии к первой части данного комплекса.

В начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Лекция 1. **ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ**

1.Определение числового ряда.
2.Необходимый признак сходимости числового ряда.
3.Простейшие свойства числовых рядов.
4.Критерий Коши.

1. Определение числового ряда.

Определение 1. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1+a_2+a_3+...+a_k+...$$

называется ***числовым рядом***, числа a_1, a_2, …, a_k, … – членами ряда, а число a_k – k-м или ***общим членом*** ряда.

В дальнейшем в качестве индекса суммирования в выражении используется любые буквы латинского алфавита, например i, j, k и т.д.

Примеры. Числовыми рядами являются:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}=1+2+4+...$,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+$.

Определение 2. Сумма конечного числа n первых членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-й ***частичной суммой*** данного ряда.

Таким образом,

$S_1=a_1$,
$S_2=a_1+a_2$,
$S_3=a_1+a_2+a_3$,

……………………
$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$
……………………………

Определение 3. Если для последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***сходящимся***, а число S – ***суммой*** данного ряда:

$$S=a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Если предел последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не существует или равен бесконечности, то ряд называют ***расходящимся***.

Примеры. Исследовать на сходимость ряды

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a,\ a\in\mathbf{R},\ a\neq 0, \qquad 2)\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1},\ a\neq 0 .$$

Решение.

1. Для ряда $a-a+a-a+...=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$ составим частичные суммы: $S_1=a$, $S_2=0$, …, $S_{2n-1}=a$, $S_{2n}=0$, ….

Последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ этого ряда не имеет предела и поэтому данный ряд расходится.

2. Сумма n первых членов ряда

$$a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...=\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$$

имеет вид

$$S_n=a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q},\ q\neq 1 .$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ если } |q|<1, \\ \infty, \text{ если } |q|>1, \end{cases}$$

то

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, \text{ если } |q|<1, \\ \infty, \quad \text{ если } |q|>1. \end{cases}$$

При $q=-1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ совпадает с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a$, при $q=1$ $S_n = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма равна

$$S = \frac{a}{1-q},$$

а при $|q|\ge 1$ ряд расходится.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости числового ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{k\to\infty} a_n = 0$.

►Пусть $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \blacktriangleleft$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$

Решение. Данный ряд расходится, так как

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \ne 0.$$

Определение 4. Выражение вида

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

представляющее собой числовой ряд, называется ***n-м остатком*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Если n-й остаток ряда сходится, то его сумма обозначается r_n, т.е. $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ или $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n.$$

Теорема 2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то сам ряд также сходится.*

Без доказательства.

Следствие. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

► Пусть $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0. \blacktriangleleft$$

Данное свойство говорит о том, что отбрасывание любого конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

Пример. Исследовать на сходимость ***гармонический ряд***

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$, однако гармонический ряд расходится. Действительно, предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\ n\in\mathbf{N},$$

предельным переходом по n получаем противоречие: $0\geq\frac{1}{2}$.

3. Свойства сходящихся числовых рядов.

Сходящиеся числовые ряды обладают следующими **свойствами**.

1. *Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).*

► Действительно, указанные операции изменят на одну и ту же постоянную величину все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, а это не влияет на сходимость или расходимость последовательности частичных сумм ряда. ◄

2. *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ *сходятся и их суммы равны* S_a *и* S_b *соответственно, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ *также сходится и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=S_a+S_b$.

► Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=S_a+S_b. ◄$$

Отметим, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ в общем случае не следует сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$.

Пример. Ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots$ сходится, а ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}-1$ расходятся.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ называется ***суммой рядов*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$.

3. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходится и его сумма равна* S*, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k$ *также сходится и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k=\alpha\cdot S$.

►Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha\cdot a_k=\alpha\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha\cdot S. ◄$$

Ряд $\alpha\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ называется ***произведением ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ***на число*** α.

Операции суммирования рядов и умножения ряда на число называются ***линейными операциями*** над рядами.

Из данных определений вытекает, что линейные операции над рядами реализуются с помощью линейных операций над их членами.

4. Критерий Коши.

Теорема 3 (критерий Коши сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$*, что для всех* $n>N(\varepsilon)$ *и всех целых* $p\geq0$ *имело место неравенство*

$$|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

► Для последовательности частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ данного ряда из критерия Коши существования конечного предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех целых $p \geq 0$ имеет место неравенство

$$\left|S_{n+p} - S_{n-1}\right| < \varepsilon .$$

Тогда $\left|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\right| = \left|S_{n+p} - S_{n-1}\right| < \varepsilon$. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Какое выражение называется числовым рядом?
2. Что называется суммой ряда?
3. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости ряда.
4. Какое выражение называется остатком ряда?
5. Перечислите простейшие свойства сходящихся числовых рядов.
6. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.