Лекция 4. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

1. Ряд Фурье для периодической функции с периодом T .
2. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье.
3. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций
4. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

1. Ряд Фурье для периодической функции с периодом T .

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T=2l$. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом $T=2l$. Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на любом интервале длиной $2l$, в частности на $[-l;l]$:

$$(\varphi_n(x))=\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right). \quad (1)$$

Ранее в лекции 2 были вычислены нормы функций, образующих ортогональную последовательность:

$$\|1\|=\sqrt{2l}\,,\ \|\sin nx\|=\|\cos nx\|=\sqrt{l}\ .$$

Основная тригонометрическая система функций обладает полнотой, т.е. для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом, имеет место равенство Парсеваля – Стеклова при $a=-l$, $b=l$:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2\|\varphi_n\|^2\ . \quad (2)$$

Поэтому периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2l$ можно разложить в ряд Фурье, который будет сходиться к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)=$$

$$=c_0+c_1\cos\frac{\pi x}{l}+c_2\sin\frac{\pi x}{l}+c_3\cos\frac{2\pi x}{l}+c_4\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots.$$

С учетом того, что коэффициенты при косинусах принято обозначать буквой a, при синусах – буквой b, а начальный коэффициент – буквой $c_0=\frac{a_0}{2}$, ряд Фурье примет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{(1,f)}{\|1\|^2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\,,\\ a_n&=\frac{\left(f,\cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n\in\mathbf{N}\\ b_n&=\frac{\left(f,\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n\in\mathbf{N}\,. \end{aligned} \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Тригонометрический ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (2)$$

коэффициенты которого определяются по формулам (1), называется ***тригонометрическим рядом Фурье*** для периодической функции $f(x)\in L_2[-l;l]$.

Преобразуем равенство Парсеваля – Стеклова с учетом традиционных обозначений коэффициентов ряда Фурье:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2\|\varphi_n\|^2=\frac{a_0^2}{4}2l+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=$$

$$=\begin{bmatrix} c_{2n-1}=a_n, \\ c_{2n}=b_n \end{bmatrix}=\frac{a_0^2}{2}l+l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{l}\|f\|^2. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется ***уравнением Ляпунова***.

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T=2\pi$. Пусть $f(x)\in L_2[-\pi;\pi]$. Ряд Фурье для такой функции получается из ряда (2) при $l=\pi$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (4)$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n\in\boldsymbol{N},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\boldsymbol{N}.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию (рис.1)

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } -\pi<x<0,\\ 1, \text{ если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

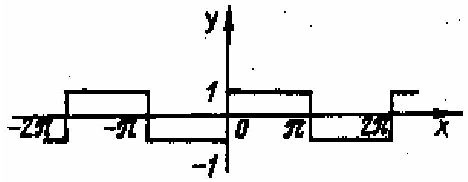

Рис.1.

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, \text{ если } n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n}, \text{ если } n=2k+1,\end{cases}$$

где $k\in\boldsymbol{N}$.

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+\ldots\right).$$

На рисунках 2, 3, 4 изображены графики частичных сумм $S_n(x)$ – тригонометрические полиномы Фурье $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ соответственно.

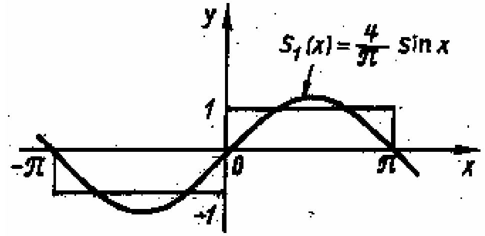

Рис.2.

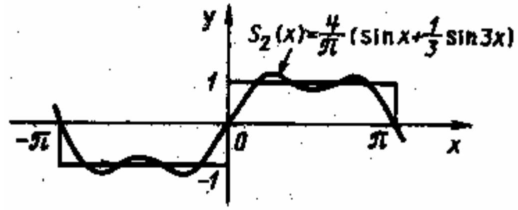

Рис.3.

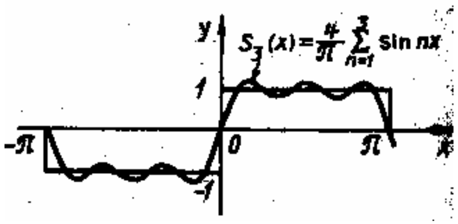

Рис.4.

Из этих рисунков видно, как частичные суммы S_n, ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n\to\infty$.

2. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Каждой периодической с периодом $T=2l$ функции $f(x)\in L_2[-l;l]$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по соответствующим формулам.

Важными являются следующие два вопроса о сходимости рядов Фурье.

1. При каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, ряд Фурье сходится в том или ином смысле к этой функции и, следовательно, в соотношениях (2) и (4) справедливы знаки равенства?

2. Как влияют свойства функции $f(x)$ на характер сходимости ее ряда Фурье?

Ответ на эти вопросы будет дан в трех сформулированных ниже теоремах.

Теорема 1. *Если $f(x)\in L_2[-l;l]$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right)dx=0.$$

Без доказательства.

Теорема 2. *Если $f(x)\in L_2[-l;l]$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2) сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда Фурье справедливы следующие соотношения*:

1) $S(x)=f(x)$, *если x – точка непрерывности функции $f(x)$*;

2) $S(x)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, *если x_0 – точка разрыва первого рода функции $f(x)$*;

3) $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

На рисунке 5 дана геометрическая интерпретация условий 1–3 теоремы 2.

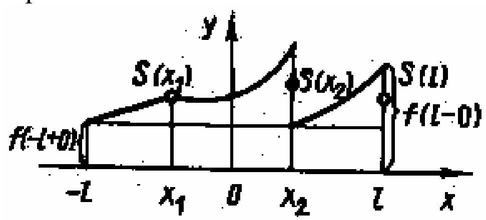

Рис.5.

Так, например, условие 2 означает, что в точках разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции справа и слева.

Теорема 3. *Если функция $f(x)\in L_2[a;b]$ является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке $[-l;l]$, а на концах этого отрезка удовлетворяет условию $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье на $[-l;l]$ сходится к $f(x)$ равномерно.*

Без доказательства.

Теоремы 1– 3 показывают, как свойства функции $f(x)\in L_2[a;b]$ влияют на сходимость ее ряда Фурье:

– если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T = 2l$, то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва, т.е. сумма ряда не везде совпадает с $f(x)$;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая и непрерывная функция, то ее ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$.

Другими словами, «улучшение» свойств функции $f(x)$ «улучшает» сходимость ее ряда Фурье, причем для более гладкой функции сходимость ее ряда Фурье сильнее в том смысле, что из нее следует сходимость ряда и для менее гладких функций.

Примеры. 1. Функция $f(x)=|x|$ (рис.6) на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям теоремы 3, поэтому ее ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)=|x|$ на $[-l;l]$:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

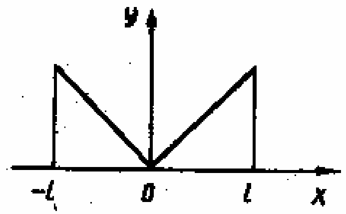

Рис.6.

2. Для функции $f(x)=x$ на интервале $]-l;l]$ (рис.7) записать ряд Фурье.

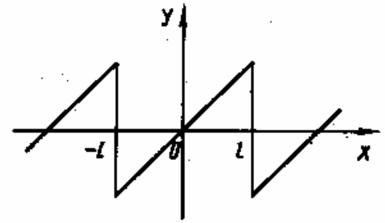

Рис.7.

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

Следовательно, ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)=x$ имеет вид:

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Так как функция $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$, но сходимость является не равномерной, а поточечной (во всех внутренних точках отрезка $[-l;l]$). На концах этого отрезка ряд Фурье не является сходящимся к $f(x)$, поскольку, согласно теореме 2, его сумма

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} = 0.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad\forall x\in(-l;l).$$

3. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, для непериодических функций.

Рассмотрим частные случаи периодических функций с периодом $T=2l$, разложимых в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$.

Предположим, что в ряд Фурье разлагается четная функция, т.е. такая, что $f(-x)=f(x)\ \forall x\in[-l;l]$. График четной функции (рис.8) симметричен относительно оси Oy.

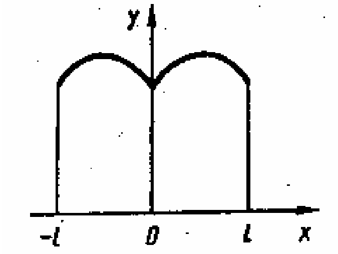

Рис. 8.

С учетом того, что определенный интеграл можно рассматривать как площадь криволинейной трапеции, для четных функций имеем

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_{0}^{l}f(x)dx.$$

Для нечетных функций, т.е. таких, что $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in[-l;l]$ (рис.9), получаем

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=\int_{-l}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{l}f(x)dx=0.$$

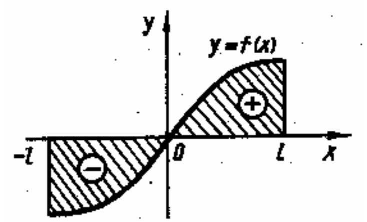

Рис.9.

Из определения четных и нечетных функций следует, что:

1) *произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная*;

2) *произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная*.

Таким образом, если в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ разлагается четная функция, то произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – нечетной функцией. Следовательно, коэффициенты ряда Фурье для четной функции находят по формулам:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=0,\ n\in\boldsymbol{N}.$$

а сам ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы и свободный член:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Если в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ разлагается нечетная функция, то произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – четной функцией. Таким образом, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для нечетной функции находятся по формулам:

$$a_0 = a_n = 0\,,\ n\in \boldsymbol{N}\,,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n\in \boldsymbol{N}\,,$$

а сам тригонометрический ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

В общем случае, если в ряд Фурье разлагается функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, т.е. такой, что $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то ее тригонометрический ряд Фурье содержит члены вида $a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ и $b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье. Выше отмечалось, что в тригонометрический ряд Фурье могут разлагаться только периодические функции с периодом $T=2l$ либо $T=2\pi$. Действительно, если функция $f(x)$ разлагается в ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

сходящийся к $f(x)$, то сумма этого ряда должна быть периодической функцией с периодом $T=2\pi$, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π.

Если функция $f(x)$ не является периодической, то для того, чтобы представить ее рядом Фурье, строят некоторую вспомогательную периодическую функцию $f^*(x)$, которая в области определения функции, например на отрезке $[-l;l]$ совпадает с функцией $f(x)$. В этом случае говорят, что *функцию* $f(x)$ *периодически продолжают на всю числовую ось*. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l;l]$, то строят вспомогательную периодическую функцию $f^*(x)$ с периодом $T=2l$, которая на $[-l;l]$ совпадает с $f(x)$, а на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением.

2. Если функция $f(x)$ задана на произвольном отрезке $[a;a+2l]$ длиной $2l$, то строят вспомогательную периодическую функцию $f^*(x)$ с периодом $T=2l$, которая на отрезке $[a;a+2l]$ совпадает с функцией $f(x)$, а на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением. В этом случае тригонометрический ряд имеет вид, определяемый формулой (2), но его коэффициенты находятся по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx\,,\ a_n=\frac{1}{l}\int_0^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n\in\boldsymbol{N}\,,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n\in\boldsymbol{N}\,.$$

Для определения коэффициентов Фурье было использовано следующее свойство интегрирования периодической функции: значение интеграла от периодической функции с периодом $T=2l$ по произвольному отрезку длиной $2l$ постоянно, поэтому

$$\int_a^{a+2l} f(x)dx=\int_{-l}^{l} f(x)dx\,.$$

3. Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам, либо и по синусам, и по косинусам.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по косинусам ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным образом (рис.10):

$$f^*(x)=\begin{cases} f(-x)\,\forall x\in[-l;0],\\ f(x)\,\forall x\in[0;l],\end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

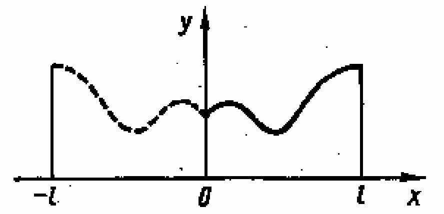

Рис.10

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\in\boldsymbol{N}.$$

Для разложения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$, в ряд по синусам ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (рис.11):

$$f^*(x)=\begin{cases}-f(-x)\,\forall x\in[-l;0],\\ f(x)\,\forall x\in[0;l],\end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

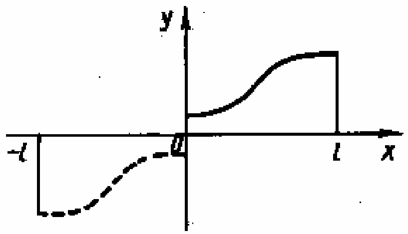

Рис.11.

Пример. Разложить функцию $f(x)=x$ на отрезке $[0;\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и по синусам

***Решение*.** **1.** Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$

четным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную на $[-\pi;\pi]$ следующим образом: $f^*(x)=|x|$. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Откуда

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)\quad\forall x\in[-\pi;\pi]$$

или $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots.$$

2. Продолжим функцию $f(x)=x$ теперь на отрезок $[-\pi;0]$ нечетным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)=x$, $|x|<\pi$. Вычислим коэффициенты Фурье b_n (так как для нечетной функции $a_0=a_n=0$):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Тогда $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots.$$

4. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

Пусть $f(x)\in L_2[-l;l]$ – периодическая функция с периодом $T=2l$. Если она представима сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В электро- и радиотехнике для такой функции используют другую форму записи тригонометрического ряда Фурье – комплексную, которую можно получить, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\cos\alpha x = \frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2},\ \sin\alpha x = \frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}.$$

Тогда ряд Фурье для такой функции примет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\quad n\in\boldsymbol{N}.$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}+c_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)$$

или

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}.$$

Ряд называется ***комплексной формой тригонометрического ряда Фурье***.

Найдем коэффициенты Фурье c_n, $n=0,\pm1,\ldots$, использовав формулы Эйлера и принятые обозначения:

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l}-i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l}+i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx\quad n\in\boldsymbol{N}.$$

Объединяя выражения для коэффициентов c_{-n} и c_n в одну формулу, получим

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx\quad\forall n=0,\pm1,\ldots.$$

Определение 3. Выражения $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ называются ***гармониками***, числа $\alpha_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=0,\pm1,\ldots$ – ***волновыми числами*** функции $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\alpha_nx}$, множество всех волновых чисел – ***спектром***. Коэффициенты c_n называются ***комплексными амплитудами***.

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляются коэффициенты тригонометрического Фурье для периодических функций?
2. При выполнении каких условий тригонометрический ряд Фурье сходится к функции?
3. В чем особенность вычисления коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций?
4. Как разложить в ряд Фурье непериодическую функцию?

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович А.И. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч.Ч.1., Ч.2. – Мн.: Выш.шк., 1989.
2. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 ч. – Мн.: БГУ, 2003.
3. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1, Ч.2.– М.: Наука, 1981, 1984.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.:Наука, 1985.
5. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 736 с.
6. Математический анализ в вопросах и задачах: учебн. Пособие для вузов. – Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984. – 200с.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1., Т.2.– М.: Наука, 1990, 1991.
8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.
9. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 816 с.