Лекция 3. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

1. Обобщенный ряд Фурье.
2. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.
3. Неравенство Бесселя и его следствия.

1. Обобщенный ряд Фурье.

Пусть $(\varphi_n(x))$ – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Определение 1. Выражение

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x). \qquad (1)$$

называется ***обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций*** $(\varphi_n(x))$. Если $(\varphi_n(x))$ – основная тригонометрическая система функций, то ряд (1) называется ***тригонометрическим рядом Фурье***.

Пусть $f(x)\in L_2[a;b]$. Требуется выяснить, при каких условиях и для каких $x\in[a;b]$ произвольную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по ортогональной системе функций $(\varphi_n(x))$ т.е. представить $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x). \qquad (2)$$

где c_n – числовые коэффициенты.

Найдем коэффициенты c_n ряда (2).

Предположим, что разложение (2) имеет место и интеграл от функции равен сумме интегралов от членов ряда. Умножим обе части разложения (2) на $(\varphi_n(x))$ и почленно проинтегрируем результат на отрезке $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=$$

$$=c_0\int_a^b\varphi_0(x)\varphi_n(x)dx+c_1\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_n(x)dx+\ldots+c_n\int_a^b\varphi_n^2(x)dx+\ldots.$$

Так как система функций $(\varphi_n(x))$ является ортогональной, то все интегралы из правой части последнего равенства, за исключением интеграла с коэффициентом c_n, обратятся в нуль. Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=c_n\int_a^b\varphi_n^2(x)dx,\ n=0,1,\ldots$$

Запишем полученное уравнение, использовав понятия скалярного произведения и нормы функции:

$$(f,\varphi_n)=c_n\|\varphi_n\|^2,$$

$$c_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2},\ n=0,1,\ldots \qquad (3)$$

Следовательно, ряд (2) по ортогональной на отрезке $[a;b]$ системе функций $(\varphi_n(x))$, соответствующий функции $f(x)$, с учетом формул (3) можно записать в виде

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n(x), \qquad (4)$$

Числа c_n, определяемые по формуле (3), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $(\varphi_n(x))$.

Используя ортогональную на отрезке $[a;b]$ систему функций $(\varphi_n(x))$, для любой функции $f(x)\in L_2[a;b]$ можно формально составить обобщенный ряд Фурье (4), вычислив его коэффициенты по формулам (3). Однако вопрос о сходимости обобщенных рядов Фурье остается открытым. В частности, неизвестно, является ли сумма формально записанного обобщенного ряда Фурье равной $f(x)$ (даже если и окажется, что формально записанный обобщенный ряд Фурье сходится, то его сумма может не совпасть с разложимой функцией $f(x)$). Итак, пока не выяснен вопрос о том, сходится ли обобщенный ряд Фурье к соответствующей функции $f(x)$, будем говорить, что *обобщенный ряд Фурье порожден функцией* $f(x)$. Эту формальную связь функции $f(x)$ и порожденного ею ряда Фурье обычно записывают так:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Рассмотрим пример формального составления обобщенного ряда Фурье.

Пример. Записать первые три коэффициента разложения функции $f(x) = e^x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Решение. Ортогональная на $[-1;1]$ система полиномов Лежандра задается условием

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \ n = 0,1,...$$

Первые три члена этой системы имеют вид:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right).$$

Запишем обобщенный ряд Фурье для функции $f(x) = e^x \in L_2[-1;1]$:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

и найдем три первых члена искомого разложения, использовав формулы (3):

$$c_0 = \frac{(f, P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2}, \ c_1 = \frac{(f, P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2}, \ c_2 = \frac{(f, P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2}$$

Вычислим квадраты нормы многочленов Лежандра:

$$\|P_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\|P_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\|P_2(x)\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\right)dx = \frac{2}{5}.$$

Тогда

$$c_0 = \frac{1}{2}(f, P_0(x)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right),$$

$$c_1 = \frac{3}{2}(f, P_1(x)) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^x x dx = \frac{3}{e},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}(f, P_2(x)) = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)dx = \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right).$$

Обобщенный ряд Фурье, порожденный функцией $f(x) = e^x \in L_2[-1;1]$, запишется в виде

$$e^x \sim \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{3}{e}x + \frac{5}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) + ...$$

2. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

В математике используются различные понятия близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$. Она может оцениваться, например, величинами $\max\limits_{[a;b]}|f(x) - \varphi(x)|$, $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx$, $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx$, в зависимости от существования указанных величин или смысла решаемой задачи. Так, при приближении (аппроксимации) функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ за меру погрешности можно взять *наибольшее уклонение функций* $\max|f(x) - \varphi(x)| \ \ \forall x \in [a;b]$.

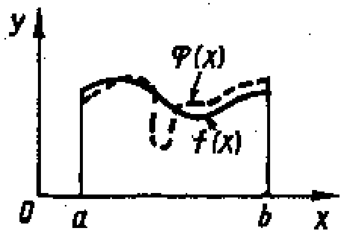

Рис.1.

В ряде случаев (рис.1.) подобная оценка погрешности не совсем удобна, так как функция $\varphi(x)$ значительно отличается от функции $f(x)$ только на достаточно малом интервале, содержащемся в отрезке $[a;b]$, в то время как почти на всем отрезке она близка к $f(x)$. Поэтому за меру уклонения функции $f(x)$ от $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ часто принимается число ρ, называемое ***средним квадратичным уклонением*** и определяемое соотношением

$$\rho=\rho(f,\varphi)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2 dx}\,.$$

Величина $\rho \geq 0$ имеет смысл для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ из $L_2[a;b]$, поэтому она называется ***метрикой*** или ***расстоянием*** в $L_2[a;b]$. Величина $\rho(f,\varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ *в среднем квадратичном.*

Используя определение нормы функции, среднее квадратичное уклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$ можно определить как норму разности $f(x)-\varphi(x)$ этих функций:

$$\rho=\rho(f,\varphi)=\|f(x)-\varphi(x)\|\,.$$

Рассмотрим вопрос о приближении функций с помощью обобщенных рядов Фурье.

Предположим, что обобщенный ряд Фурье (4) по ортогональной на отрезке $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$) сходится в некотором смысле в точке $x\in[a;b]$ (или на всем отрезке $[a;b]$) к

функции $f(x)$. Тогда функция $f(x)$ с любой степенью точности может быть приближенно представлена его частичной суммой, называемой ***ортогональным многочленом Фурье***:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\,. \tag{5}$$

Если при этом в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система ($1,\ \cos\frac{\pi}{l}x$, $\sin\frac{\pi}{l}x$, …, $\cos\frac{n\pi}{l}x$, $\sin\frac{n\pi}{l}x$, …), то многочлен Фурье называется ***тригонометрическим*** и обозначается $T_n(x)$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы функция $f(x)\in L_2[a;b]$, ортонормированная на $[a;b]$ система функций ($\varphi_k(x)$) и порядок n обобщенного многочлена $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$. Требуется подобрать коэффициенты α_k обобщенного многочлена таким образом, чтобы среднее квадратичное уклонение $\rho(f,S_n)$ было минимальным.

Если такие коэффициенты α_k найдутся, то говорят, что *обобщенный многочлен степени n аппроксимирует функцию $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ наилучшим образом в смысле минимума среднего квадратичного уклонения $\rho(f,S_n)$* или *многочлен $S_n(x)$ аппроксимирует функцию $f(x)$ в среднем (в смысле метода наименьших квадратов).*

Ответ на поставленную задачу дает следующая теорема.

Теорема 1 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье). *Среди всех обобщенных многочленов вида $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, $\alpha_k\in\boldsymbol{R}$, наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ является многочлен Фурье, т.е. такой многочлен, коэффициенты которого* *находятся по формулам* $\alpha_k = c_k = \dfrac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

► Необходимо так подобрать коэффициенты α_k ортонормированного многочлена (5) степени n, чтобы норма разности функции $f(x)$ и многочлена $S_n(x)$

$$\rho(f,S_n) = \|f(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx}$$

принимала наименьшее значение.

Для определения коэффициентов α_k, $k = \overline{1,n}$, запишем квадрат нормы разности функций $f(x)$ и $S_n(x)$:

$$\rho^2(f,S_n) = \|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\int_a^b f(x)S_n(x)dx + \int_a^b S_n^2(x)dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^n \alpha_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k\varphi_k(x)\right)^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=0}^n \alpha_k^2\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=0}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2.$$

Очевидно, что первое и третье слагаемые в полученной формуле не зависят от коэффициентов α_k многочлена $S_n(x)$, в то время как второе слагаемое зависит от α_k, причем квадратичная аппроксимаций будет наилучшей, когда $\alpha_k = c_k$, т.е. когда аппроксимирующий многочлен является n-й частичной суммой обобщенного ряда Фурье. ◄

3. Неравенство Бесселя и его следствия.

Теорема 2 (неравенство Бесселя). $\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^\infty c_k^2$

►В п.2 было доказано, что наилучшее приближение в среднем квадратичном к функции $f(x) \in L_2[a;b]$ дает n-я частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(x)$ ряда Фурье, причем

$$\min \rho^2(f,S_n) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^n c_k^2$$

Отсюда, учитывая, что $\min \rho^2 \geq 0$, имеем

$$\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 \geq 0,$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.$$

Из последнего неравенства, справедливого при любом $n \in \boldsymbol{N}$, следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^n c_k^2$. Действительно, в левой части этого неравенства находятся n-е частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^\infty c_k^2$, образующие неубывающую и ограниченную сверху последовательность. Как известно, такая последовательность частичных сумм имеет предел. Найдем ее предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^2(x) \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n c_k^2 .$$

Отсюда получаем неравенство Бесселя

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^\infty c_k^2 . ◄$$

Нетрудно видеть, что неравенство Бесселя в случае ортогональной (но не нормированной) последовательности функций принимает вид

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^n c_k^2\|\varphi_k\|^2 .$$

С неравенством Бесселя связан ответ на вопрос о сходимости рядов Фурье. Так как ряд Фурье является функциональным, то его сходимость зависит от свойств функции $f(x)$, разлагаемой в ряд Фурье. Различают сходимость равномерную и сходимость в среднем квадратичном.

Определение 2. Ряд Фурье называется ***равномерно сходящимся*** к функции $f(x)\in L_2[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) (ортогональных многочленов Фурье) сходится к функции $f(x)$ равномерно, т.е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое натуральное число $N=N(\varepsilon)$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ будет выполняться равенство

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in[a;b].$$

Из определения равномерной сходимости следует, что при $n\to\infty$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-S_n(x)|\to 0.$$

Определение 3. Ряд Фурье называется ***сходящимся в среднем квадратичном*** к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) (многочленов Фурье) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2\,dx=0.$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

Теорема 3. *Если обобщенный ряд Фурье* $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ *функции* $f(x)$ *сходится на отрезке* $[a;b]$ *равномерно к функции* $f(x)\in L_2[a;b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *на* $[a;b]$ *и в среднем квадратичном.*

► Пусть ряд Фурье функции $f(x)\in L_2[a;b]$ сходится к ней на отрезке $[a;b]$ равномерно. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое число $N(\varepsilon)$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|f(x)-S_n(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \quad \forall x\in[a;b].$$

Тогда для всех $n>N(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2\,dx\right|=\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2\,dx<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx=\varepsilon.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2\,dx=0. \text{ ◄}$$

Теорема 4. *Для того чтобы обобщенный ряд Фурье* $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ *функции* $f(x)\in L_2[a;b]$ *сходился к* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова*:

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\|\varphi_k\|^2=\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (6)$$

►*Необходимость*. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ в среднем квадратичном к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho^2(f,S_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2\,dx=0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}c_k^2\right)dx=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_k^2=\int_a^b f^2(x)dx$$

т.е. выполняется равенство Парсеваля – Стеклова.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсеваля –

Стеклова (6). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx .$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx - \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2\right)dx = 0$.

С другой стороны

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\right) = \lim_{n\to\infty}\rho^2(f,S_n) = 0 \qquad \forall x\in[a;b].$$

т.е. ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном. ◄

О п р е д е л е н и е 4. Ортогональная система функций ($\varphi_k(x)$), для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется ***замкнутой*** в $L_2[a;b]$, а само равенство (6) – ***уравнением замкнутости***.

Из теоремы 4 следует, что любая функция $f(x)\in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$), если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое выражение называется обобщенным рядом Фурье?
2. Как находятся коэффициенты рядя Фурье?
3. Как измерить близость функций? Что называется средне-квадратичным уклонением функций?
4. Какое выражение называется ортогональным многочленом Фурье? Запишите тригонометрический многочлен Фурье.
5. Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.
6. Что можно сказать о сходимости обобщенного ряда Фурье, если для него выполняется неравенство Бесселя?
7. Какая ортогональная система функций называется замкнутой?