Лекция 9. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Работа переменной силы.
2. Работа электродвигателя переменной мощности.
3. Сила давления жидкости.
4. Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс.

1. Работа переменной силы.

Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы F. Перемещение этой точки зададим вектором $\vec{s}$ и предположим, что направление силы совпадает с направлением перемещения ($F \| \vec{s}$). Пусть через $|F|$ и $|s|$ длины векторов F и s.

Если на всем пути сила F постоянна, то, как известно из механики, работа $A = |F||s|$.

Рассмотрим случай, когда сила F сохраняет постоянное направление ($F \| s$), но меняется по модулю ($|F| \neq \text{const}$). Вычислим работу этой переменной силы. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы a и b ($a < b$) соответственно. В каждой точке отрезка $[a;b]$ модуль силы принимает определенное значение и является некоторой функцией абсциссы, т.е $|F| = F(x)$. Таким образом,

$$F = |F|\vec{i} = F(x)\vec{i}\ ,\ s = (b-a)\vec{i}\ ,\ |s| = b-a\ .$$

Будем считать функцию $F(x)$ непрерывной. Для нахождения работы переменной силы вновь используем алгоритм, основанный на составлении интегральной суммы и предельном переходе к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $|s| = [a;b]$ на n частичных отрезков точками x_k: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, – длина k-го частичного отрезка. Как известно, работа на всем

пути равна сумме работ на малых его участках. Обозначив работу на всем пути через A, а работу на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ через ΔA_k, получим

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k\ .$$

Если отрезки $[x_{k-1};x_k]$ брать достаточно малыми, то на каждом таком отрезке можно считать $|F| \approx \text{const}$.

2. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ произвольную точку ξ_k и найдем значение функции $F(x)$ в точке ξ_k.

3. Предположим, что на каждом частичном отрезке модуль силы имеет постоянное значение, равное значению $F(x)$ в точке ξ_k: $|F_k| = F(\xi_k)$. При этом предположении работа силы на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ равна

$$\Delta A_k \approx |F_k|\Delta x_k = F(\xi_k)\Delta x_k\ .$$

Работа переменной силы F, совершаемая на всем пути $|s| = b-a$,

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k\ .$$

Сумма A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $F(x)$.

4. Предел A_n при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$ в силу предположения о непрерывности функции $F(x)$ существует и выражает работу переменной силы на прямолинейном пути от точки a до точки b:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx\ .$$

2. Работа электродвигателя переменной мощности.

Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Необходимо найти работу, совершенную двигателем за промежуток времени $\Delta t = [a;b]$.

Как известно, при постоянной мощности двигателя N его работа $A = N\Delta t$.

Воспользуемся алгоритмом составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем временной отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$. Обозначим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$.

2. Выберем на каждом частичном отрезке произвольным образом точку x_k: $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$.

3. Будем считать мощность на каждом из частичных отрезков постоянной и равной $N(\tau_k)$. Тогда

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} N(\tau_k)\Delta t_k .$$

4. Считая функцию $N(t)$ непрерывной и переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$, получаем

$$A = \int_a^b N(t)dt .$$

3. Сила давления жидкости.

Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость, плотность которой ρ, таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня на расстояниях a и b соответственно (рис.1.). Требуется определить силу давления жидкости на пластинку.

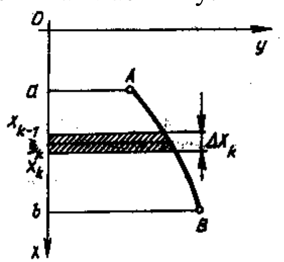

Рис.1.

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давлений P жидкости на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластинка, а высотой – глубина h, т.е.

$$P = g\rho hS ,$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2; S – площадь пластинки.

Если же пластинка догружена в жидкость вертикально, то давление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения.

По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластинку.

Выберем систему координат так, как показано на рис.1. Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Для нахождения силы давления снова используем алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b .$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$. Проведем через точки x_0, x_1, …, x_n прямые, параллельные оси Oy, которые разобьют пластинку на n малых горизонтальных полосок.

2. Выберем на каждом частичном отрезке произвольным образом точку $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$. Тогда площадь S_k малой горизонтальной полоски

$$S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k .$$

3. Считая, что все точки каждой элементарной пластинки находятся на одной глубине $h = \xi_k$, значение силы давления на нее можно вычислить по формуле:

$$\Delta P_k \approx g\rho\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Просуммировав найденные значения ΔP_k, $k=\overline{1,n}$, получим приближенное значение силы давления жидкости на всю пластинку:

$$\Delta P_n \approx \sum_{k=1}^{n} g\rho\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше длины частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$.

4. За точное значение P силы давления жидкости на пластинку принимается предел P_n при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} g\rho\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Так как P_n представляет собой интегральную сумму для непрерывной функций $\rho x f(x)$ на отрезке $[a;b]$ то указанный предел существует и выражается определенным интегралом

$$P = g\int_a^b \rho x f(x) dx .$$

Если в жидкость вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_2A_2$ (рис.2), ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле

$$P = g\int_a^b \rho x (y_2 - y_1) dx .$$

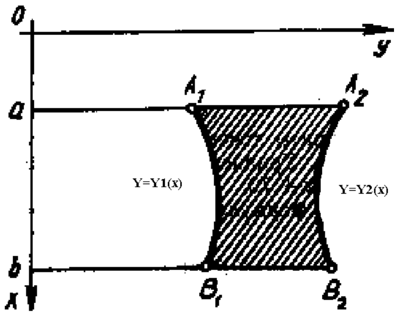

Рис.2.

4. Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс.

Общие сведения. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy.

Определение 1. ***Статическим моментом*** материальной точки $A(x; y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy):

$$M_x = my \ (M_y = mx).$$

Определение 2. ***Моментом инерции*** материальной точки $A(x; y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy, точки O) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy, точки O):

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = I_x + I_y = m(x^2 + y^2).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, …, $A_n(x_n; y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k ,$$

а моменты инерции – по формулам:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) m_k .$$

Определение 3. ***Центром масс*** системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Поэтому, обозначая центр масс системы $C(x_C; y_C)$, получаем:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = M y_C, \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = M x_C.$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Пусть требуется вычислить статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс однородной плоской материальной линии или плоской материальной фигуры с известной плотностью ρ распределения масс. Линия (фигура) называется ***однородной***, если $\rho = \text{const}$ на всей линии (фигуре). Если при этом $\rho = 1$, то масса линии (фигуры) численно равна длине линии (площади фигуры). Для вычисления M_x, M_y, I_x, I_y, I_0, x_C, y_C эту линию (фигуру) разбивают произвольным образом на n частей, что достигается разбиением отрезка $[a;b]$ оси Ox, на который проектируется плоская линия l или плоская фигура D. На каждой части выбирают точку P_k, $k = \overline{1,n}$, и сосредотачивают массу m_k k-й части линии (фигуры) в точках P_k. Так как линия (фигура) однородна, то масса k-й части линии $lm_k = \rho \Delta l_k$, где Δl_k – длина k-го участка линии. Масса k-й части однородной фигуры D $m_k = \rho \Delta S_k$, где ΔS_k – площадь k-й частиц фигуры D.

Далее рассматривают материальную линию l (фигуру D) как фиктивную систему материальных точек P_k, $k = \overline{1,n}$, с массами m_k. Тогда искомые величины M_x, M_y, M, I_x, I_y, I_0, x_C, y_C приближенно равны соответствующим величинам рассматриваемой фиктивной системы материальных точек P_k.

Точное значение искомых величин определяется как предел соответствующего приближенного значения при

$\lambda = \max_{[a;b]} \{\Delta x_k\} \to 0$. Отсюда следует, что рассмотренный алгоритм вычисления статических моментов, моментов инерции и координат центра масс материальной кривой (фигуры) приводит к составлению интегральных сумм, а предельный переход при стремлении $\lambda \to 0$ – к определенному интегралу.

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской линии. Пусть материальная кривая AB длиной l задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a;b]$. Будем считать кривую AB однородной $\rho = \text{const}$.

Вычисление моментов плоской линии и координат центра масс проведем по описанному выше алгоритму.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками x_k:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Выберем внутри каждого частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ произвольным образом точку ξ_k, $k = \overline{1,n}$. Через точки разбиения x_k проведем прямые параллельные оси Oy (рис. 3).

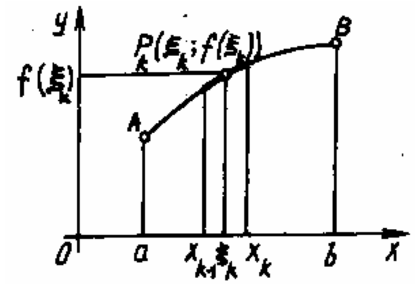

Рис.3.

Эти прямые разобьют кривую AB на частичные дуги длиной Δl_k и массой $m_k = \rho \Delta l_k$. Тогда каждой точке $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ будет соответствовать точка $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$.

2. Заменим теперь каждую часть дуги Δl_k материальной точ-

кой $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$ массой $m_k = \rho\Delta l_k$, $k = \overline{1,n}$.

3. Будем рассматривать материальную кривую AB как фиктивную систему, состоящую из n материальных точек $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$, $k = \overline{1,n}$. Тогда масса M материальной кривой AB, статические моменты M_x, M_y, моменты инерции I_x, I_y, I_0 и координаты центра масс находятся по следующим приближенным формулам:

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \rho\Delta l_k, \; M_x \approx \sum_{k=1}^{n} \rho f(\xi_k)\Delta l_k, \; M_y \approx \sum_{k=1}^{n} \rho\xi_k\Delta l_k,$$

$$I_x \approx \sum_{k=1}^{n} \rho f^2(\xi_k)\Delta l_k, \; I_y \approx \sum_{k=1}^{n} \rho\xi_k^2\Delta l_k, \; I_0 = I_x + I_y,$$

где $\Delta l_k = \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$,

$$x_C \approx \frac{M_y}{M}, \; y_C \approx \frac{M_x}{M}.$$

4. Переводя к пределу при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$, получаем точное значения искомых величин:

$$M = \int_a^b \rho\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

$$M_x = \int_a^b \rho y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \; M_y = \int_a^b \rho x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$I_x = \int_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \; I_y = \int_a^b \rho x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \; I_0 = I_x + I_y,$$

$$x_C = \frac{M_y}{M}, \; y_C = \frac{M_x}{M}.$$

Полученные формулы справедливы и для любой неоднородной ($\rho = \rho(x)$) материальной линии AB.

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры. В этом случае так же, как и при вычислении площадей плоских фигур, в качестве базовой фигуры удобно принимать криволинейную трапецию.

Пусть дана материальная криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная графиком функции $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. По этой трапеции непрерывно с плотностью $\rho = \text{const}$ распределена масса M. Тогда $M = \rho S$, где S – площадь криволинейной трапеции.

Вычисление статических моментов M_x, M_y, моментов инерции I_x, I_y, I_0 и координат центров масс x_C, y_C проведем по известному алгоритму.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

2. Выберем точку $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$. Через точки разбиения x_k проведем прямые, параллельные оси Oy (рис.4).

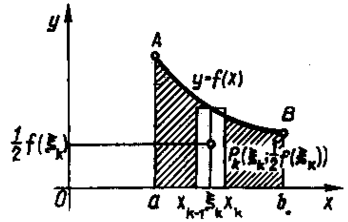

Рис.4.

Эти прямые разобьют криволинейную трапецию на частичные трапеции. Площадь каждой такой k-й частичной трапеции приближенно равна площади прямоугольника со сторонами Δx_k и $f(\xi_k)$: $\Delta S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k$, масса $m_k = \rho\Delta S_k$.

3. Сосредоточим массу каждой частичной криволинейной трапеции в точке $P_k\left(\xi_k; \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$, т.е. в центре симметрии прямоугольника со сторонами Δx_k, $f(\xi_k)$. Будем рассматривать материальную криволинейную трапецию $aABb$ как фиктивную

систему, состоящую из n материальных точек $P_k\left(\xi_k;\frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$, $k=\overline{1,n}$. Тогда ее масса, статические моменты M_x, M_y, моменты инерции I_x, I_y, I_0 и координаты центра масс находятся по приближенным формулам:

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \rho f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

$$M_x \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho f^2(\xi_k)\Delta x_k ,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} \rho \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

$$I_x \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho f^3(\xi_k)\Delta x_k ,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} \rho \xi^2 f(\xi_k)\Delta x_k ,\ I_0 = I_x + I_y ,$$

$$x_C \approx \frac{M_y}{M},\ y_C \approx \frac{M_x}{M}.$$

4. Переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$ ($\lambda \to 0 \Leftrightarrow \xi_k \to x ; \xi_k \to y$), получаем точные значения искомых величин:

$$M = \int_a^b \rho y dx ,$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^2 dx ,\ M_y = \int_a^b \rho xy dx ,$$

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^3 dx ,\ I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx ,\ I_0 = I_x + I_y ,$$

$$x_C = \frac{M_y}{M},\ y_C = \frac{M_x}{M}.$$

Замечание. Для нахождения центра тяжести плоской фигуры, имеющей сложную форму, разбивают фигуру на простейшие фигуры, координаты центра масс которых либо известны, либо достаточно легко определяются. При этом сложную фигуру D представляют в виде объединения простейших фигур, из которых вырезаны некоторые фигуры. Эти фигуры (вырезанные)

обозначим через D_1, D_2, …, D_n, а их площади – S_1, S_2, …, S_n.

Тогда координаты центра масс фигуры D можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)x_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)},\ y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)y_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)},$$

где x_{C_k} y_{C_k} – координаты центра масс фигуры D_k; S_k – площадь фигуры D_k, $k=\overline{1,n}$. В этих формулах площадь фигуры берется со знаком «+», если $D_k \subset D$, и со знаком «–», если $D_k \not\subset D$, т.е. если элементарная фигура D_k вырезана.

При нахождении координат центра масс используется также свойство симметрии фигуры: если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляется работа переменной силы с помощью определенного интеграла?
2. Выведите формулу для вычисления работы электродвигателя переменной мощности.
3. Выведите формулу для вычисления силы давления жидкости.
4. Что называется статическим моментом и моментом инерции материальной точки?
5. Дайте определение центра масс системы материальных точек. По каким формулам вычисляются координаты центра масс?
6. Как вычисляются статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс плоской линии?