Лекция 7. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

1. Определение интеграла с переменным верхним пределом.
2 Непрерывность и дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу
3. Существование первообразной.
4. Вычисление определенного интеграла.

1. Определение интеграла с переменным верхним пределом.

Ранее рассматривался определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если оставить постоянным нижний предел интегрирования a, а верхний x изменять так, чтобы $x\in[a;b]$, то величина интеграла будет изменяться.

Определение 1. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt=F(x),\ x\in[a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом*** и является функцией верхнего предела x.

Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

С **геометрической** точки зрения, функция $F(x)$ в случае $f(t)\geq 0$ представляет собой площадь заштрихованной на рисунке 1 криволинейной трапеции.

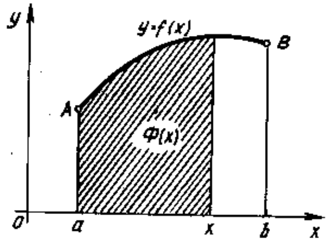

Рис.1.

Аналогично вводится определенный интеграл с переменным нижним пределом.

Определение 2. Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt=G(x),\ x\in[a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным нижним пределом*** и является функцией нижнего предела x.

2. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ и $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ непрерывны на отрезке $[a;b]$.*

► Возьмем любую точку $x\in[a;b]$ и придадим ей приращение Δx так, чтобы $x+\Delta x\in[a;b]$. Тогда

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt .$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла, имеем

$$\Delta F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt .$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$\Delta F=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x ,$$

где $\xi\in[x;x+\Delta x]$.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta F=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)\Delta x=0 .$$

Значит, функция $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ непрерывна.

Аналогично доказывается непрерывность функции

$$G(x)=\int_x^b f(t)dt. \blacktriangleleft$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x\in[a;b]$, то функция $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в этой точке и $F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$.*

► Возьмем любую точку $x\in[a;b]$ и придадим ей приращение Δx так, чтобы $x+\Delta x\in[a;b]$. Тогда

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt.$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла, имеем

$$\Delta F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x,$$

где $\xi\in[x;x+\Delta x]$.

Если $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x$, и значит $\xi\to x$. В силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеем $f(\xi)\to f(x)$. По определению производной

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\xi\to x)}} f(\xi)=f(x). \blacktriangleleft$$

Замечание. Функция $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ также имеет производную в точке x и

$$G'(x)=\left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x=-f(x).$$

3. Существование первообразной.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна во всех отрезка точках некоторого промежутка X, то на этом промежутке у нее существует первообразная. При этом для любой точки $a\in X$ функция $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций $f(x)$ на промежутке X.*

► Если $x>a$, $x\in X$, то равенство $F'(x)=f(x)$ следует из теоремы 2.

Если $x<a$, $x\in X$, то

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=-\frac{d}{dx}\int_x^a f(x)dx=-(-f(x))=f(x). \blacktriangleleft$$

Замечание. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором промежутке X функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $x\in X$. Определенный интеграл $\int_a^x f(t)dt$, $x\in X$, $a\in X$, является одной из первообразных функции $f(x)$ на X.

Поэтому

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C.$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и определенным интегралами.

4. Вычисление определенного интеграла.

Теорема 4 (формула Ньютона-Лейбница). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула*

Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

►Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Если $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ другая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то они отличаются на некоторую постоянную C и $\forall\ x \in [a;b]$ имеет место равенство

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Положим $x = a$ и, учитывая, что $\int_a^a f(t)dt = 0$, получим $C = -F(a)$.

Подставляя это значение вместо C, имеем $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a;b]$. Тогда при $x = b$ получаем $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. ◄

Замечание. Формула Ньютона – Лейбница называется ***основной формулой интегрального исчисления***. Иногда ее удобно записывать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм. Поэтому задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла.

Пример. Вычислить интегралы

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, 2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, 3) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$, 4) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$.

Решение. Имеем

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$.

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

3. $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-1/2} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2$.

4. $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Теорема 5 (формула замены переменной в определенном интеграле). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$, причем $\varphi([t_1;t_2]) = [a;b]$ и $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то справедлива формула замены переменной*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt.$$

►Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Поскольку $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то по формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dF(\varphi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. ◄$$

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить, вычисления, т.е. привести подынтегральное выражение к соответствующей табличной форме.

Замечание. При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются соответственно и пределы интегрирования. Для вычисления определенного интеграла по этой формуле необходимо:

– сделать замену $x = \varphi(t)$,

– вычислить $dx = \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция,

– найти пределы интегрирования по t, решив уравнения $\varphi(t_1) = a$ и $\varphi(t_2) = b$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t, \\ dx=\cos t dt, \\ x=0 \Rightarrow t=0, \\ x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 6 (формула интегрирования по частям в определенном интеграле). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны вместе со своими производными на отрезке* $[a;b]$. *Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

► Для дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ имеем $d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем обе части последнего

равенства на отрезке $[a;b]$:

$$\int\limits_a^b d(uv) = \int\limits_a^b u dv + \int\limits_a^b v du.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b$$

Следовательно, $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$. ◄

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}dx; \\ dv=dx;\ v=x \end{array}\right] = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{x}x dx = e - \int\limits_1^e dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = 1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом?
2. Является интеграл с переменным верхним пределом непрерывной функцией?
3. Можно ли дифференцировать интеграл по переменному верхнему пределу? При каких условиях это возможно?
4. Докажите формулу Ньютона – Лейбница.
5. Сформулируйте и докажите терему о замене переменной в определенном интеграле.
6. Сформулируйте и докажите терему об интегрировании по частям в определенном интеграле.