Лекция 5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Определение определенного интеграла Римана.
3. Необходимое условие интегрируемости функций.
4. Критерий интегрируемости Дарбу.

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

З а д а ч а о п л о щ а д и к р и в о л и н е й н о й т р а п е ц и и. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная графиком AB функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, называется ***криволинейной трапецией.***

О п р е д е л е н и е 1. ***Разбиением*** τ_n отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков, называется множество точек $x_0, x_1, ..., x_n$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b .$$

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k.

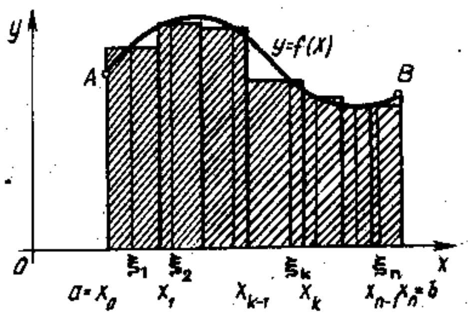

Рис.1.

Тогда значение функции $y = f(x)$ в точке ξ_k равно $f(\xi_k)$. Построим прямоугольники, высотой которых являются $f(\xi_k)$, основанием служат отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Площадь каждого прямоугольника равна $f(\xi_k)\Delta x_k$. Сумма

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 1.

Эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k. Чем меньше Δx_k, $k = \overline{1,n}$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел суммы σ_n при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

где $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

З а д а ч а о п р о й д е н н о м п у т и п р и н е р а в н о м е р н о м д в и ж е н и и. Пусть материальная точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью $v(t)$, $t_0 \leq t \leq T$. Смещение точки за малый промежуток времени $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ приближенно можно считать равным $v(\xi_k)\Delta t_k$, где $\xi_k \in [t_{k-1}; t_k]$. Тогда приближенное значение пути, пройденного точкой от момента времени t_0 до T есть сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k$. В пределе при $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k \to 0$ получим точное значение этого пути S:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k .$$

2. Определение определенного интеграла Римана.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$, точками $x_0, x_1, ..., x_n$.:

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b .$$

Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, $k=\overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

О п р е д е л е н и е 2. Сумма

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k=\overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$, называемая ***диаметром разбиения***.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a;b]$ (или ***интегрируемой по Риману***), если существует такое число I, что для любой последовательности разбиений τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которых стремится к нулю при $n\to\infty$ и при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k=\overline{1,n}$, существует предел интегральных сумм (1) и он равен I:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \qquad (2)$$

Число I называется ***определенным интегралом*** (или ***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***, x – ***переменной интегрирования***, a и b – соответственно ***нижним и верхним пределами интегрирования***.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a;b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε - δ формулируется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 4. Число I называется ***определенным интегралом*** (или ***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda < \delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$|\sigma_n(\tau_n;\xi_k) - I| < \varepsilon .$$

Замечание. Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т.е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(y)dy .$$

Обозначение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Как будет показано позднее, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции. Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

3. Необходимое условие интегрируемости функций.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если* $\int_a^b f(x)dx$ *существует, то функция* $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$.

► Действительно, если функция $f(x)$ неограничена на $[a;b]$, то для любого разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$ найдется хотя бы один частичный отрезок $[x_{k-1};x_k]$, на котором функция $f(x)$ неограниченна. В силу неограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ можно выбрать на нем точку ξ_k так, чтобы абсолютная величина произведения $f(\xi_k)\Delta x_k$ была больше наперед заданного числа. Таким образом, при любом разбиении τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки интегральная сумма

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

будет бесконечно большой по абсолютной величине. Следовательно, не существует конечного предела интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения λ к нулю, что противоречит условию теоремы. ◄

4. Критерий интегрируемости Дарбу.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим

$$m_k=\inf_{[x_{k-1};x_k]} f(x),$$
$$M_k=\sup_{[x_{k-1};x_k]} f(x).$$

Определение 5. ***Нижней суммой Дарбу***, соответствующей разбиению τ_n, называется сумма

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k .$$

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n, называется сумма

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k .$$

В случае, когда функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Поэтому суммы Дарбу s_n и S_n при любом разбиении τ_n принимают конечные значения. Далее будем рассматривать ограниченные функции $f(x)$.

Свойства интегральных сумм Дарбу

1. Для фиксированного разбиения τ_n имеет место неравенство $s_n \le S_n$.

2. Для фиксированного разбиения τ_n и любого выбора промежуточных точек ξ_i на этом разбиении имеет место неравенство $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

3. Нижняя (верхняя) сумма Дарбу является нижней (верхней) гранью интегральных сумм Римана, соответствующих данному разбиению:

$$s_n=\inf_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} \sigma_n(f;\xi_k),$$
$$S_n=\sup_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} \sigma_n(f;\xi_k).$$

4. Имеет место неравенство

$$S_n-s_n=\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k ,$$

где $\omega_k(f)$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k=\overline{1,n}$.

Нижние и верхние интегралы Дарбу. Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. И пусть τ_n – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$.

Определение 6. ***Нижним интегралом*** функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу s_n: $I_*=\sup s_n$.

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^*

грань возможных ее верхних сумм Дарбу S_n:

$$I^* = \inf S_n .$$

Очевидно, что $I_* \le I^*$.

Теорема 2 (Критерий Дарбу). *Для того, чтобы функция $y = f(x)$, ограниченная на некотором отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n - s_n) = 0 .$$

►*Необходимость.* Пусть ограниченная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке и $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда $I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. По определению предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda < \delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k = \overline{1,n}$, для интегральной суммы выполняется неравенство

$$\left|\sigma_n(\tau_n;\xi_k) - I\right| < \varepsilon .$$

Отсюда $I - \varepsilon < \sigma_n < I + \varepsilon$.

Переходя в неравенствах к нижней и верхней граням относительно точек ξ_k, $k = \overline{1,n}$, в силу свойств сумм Дарбу получим

$$I - \varepsilon < s_n \le S_n < I + \varepsilon .$$

Отсюда при $\lambda < \delta$ имеем $\left|s_n - I\right| < \varepsilon$ и $\left|S_n - I\right| < \varepsilon$. Тогда

$$\left|S_n - s_n\right| = \left|S_n - I + I - s_n\right| \le \left|S_n - I\right| + \left|I - s_n\right| < 2\varepsilon .$$

Это означает, что

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n - s_n) = 0 .$$

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и для ее сумм Дарбу выполняется условие $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_n - s_n) = 0$.

Из определения нижнего I_* и верхнего интегралов I^* имеем

$$s_n \le I_* \le I^* \le S_n .$$

Поэтому $0 \le I^* - I_* \le S_n - s_n$. Отсюда при $\lambda \to 0$ получим $I^* - I_* = 0$.

Обозначим $I^* = I_* = I$. Тогда $s_n \le I \le S_n$, а поэтому

$$0 \le I - s_n \le S_n - s_n \text{ и } 0 \le S_n - I \le S_n - s_n .$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = I$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0} s_n = I$. Поскольку для любого разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, и выбора точек ξ_k, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

Следовательно, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n = I$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. ◄

Следствия. 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k = 0 ,$$

где $\omega_k(f)$ – колебание функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k = \overline{1,n}$.

2. *Если функция $y = f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и s_n, S_n – ее суммы Дарбу, то*

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи приводят к понятию определенного интеграла?

2. Дайте определение функции, интегрируемой на $[a;b]$?

3. Сформулируйте определение интеграла Римана на языке ε - δ?

4. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции.

5. Дайте определения верхних и нижних сумм Дарбу. Перечислите их свойства.

6. Дайте определения верхних и нижних интегралов.

7. Сформулируйте Критерий интегрируемости Дарбу.