## *Лекция 10.* НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Несобственные интеграл первого рода.
2. Несобственные интеграл второго рода.
3. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов.
4. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что выполняются следующие условия:

1) пределы интегрирования $a$ и $b$ являются конечными;

2) подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае определенные интегралы называются ***собственными.*** Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются ***несобственными***. При этом определение интеграла Римана теряет смысл. Действительно, в случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на $n$ частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Несобственные интегралы являются обобщением определенных интегралов в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций.

### 1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $I(b)$, зависящий от верхнего предела интегрирования:

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например



площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования ($b\to+\infty$). При этом возможны два случая: либо $I(b)$ при $b\to+\infty$ имеет предел, либо не имеет.

**Определение 1.** ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$ называется предел $I(b)$ при $b\to+\infty$:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

**Определение 2.** ***Несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом*** интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ называется предел $I(a)$ при $a\to-\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

***Несобственный интеграл с двумя бесконечными предела-***

***ми интегрирования*** от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$, обозначаемый $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, предварительно представляют в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx\,,\ c \in (-\infty;\infty).$$

Тогда по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx\,.$$

причем этот несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется ***расходящимся***.

Интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются также ***несобственными интегралами первого рода.***

С **геометрической** точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси $Ox$, имеет конечную площадь $S$ (рис.1).

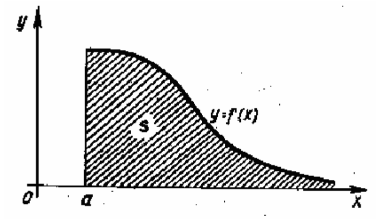


Рис.1.



Аналогичная геометрическая интерпретация имеет место для двух других сходящихся несобственных интегралов.

**Примеры**. Вычислить интегралы 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, 2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

***Р е ш е н и е*** . 1. Имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. При $p = 1$ имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty\,.$$

При $p \ne 1$ получим

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b} x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p > 1, \\ +\infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

**О п р е д е л е н и е 3.** ***Интегралом в смысле главного значения*** называется интеграл:

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{+b} f(x)dx\,,\ b > 0\,. \quad (1)$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

при произвольных $a$ и $b$, а интеграл в смысле главного значения (1) есть предел того же интеграла, но при $a = b$

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл (2), то и существует интеграл в смысле главного значения (1). Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения (1) может существовать, а несобственный интеграл (2) – нет.

**2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода).**

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки $b$ ($b$ – точка бесконечного разрыва), т.е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$: существует интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

**О п р е д е л е н и е 4.** ***Несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется предел интеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Аналогично если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$.

**О п р е д е л е н и е 5.** ***Несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(a;b]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке называется предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некото-



рой внутренней точке $c$ отрезка $[a;b]$, то, пользуясь свойством аддитивности определенного интеграла, данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от разрывной функции в точках $a$, $b$ и $c$ называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися***.

С **геометрической** точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ $x=b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси $Oy$ при $x\to b-0$ ($x\to a+0$, $x\to c\pm 0$), имеет конечную площадь $S$ (Рис.2, *а* – *в* соответственно).

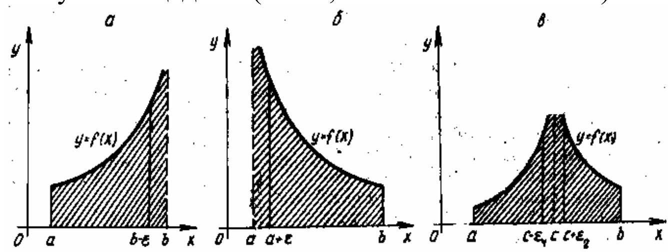

Рис.2.

**Пример**. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^p}$.

***Р е ш е н и е***. При $p=1$ имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=+\infty.$$

При $p\neq 1$ имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 x^{-p}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p<1,\\ +\infty, & \text{если } p>1.\end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p \ge 1$.

**3. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов.**

В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы. Для простоты будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$.

**Формула Ньютона-Лейбница.** Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a).$$

**Линейность интеграла.** Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел $\alpha$ и $\beta$ несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ также сходится и

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

**Интегрирование неравенств.** Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то



$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

**Правило замены переменного.** Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta)) = [a;b)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Правило интегрирования по частям.** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Пример**. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, $n = 0,1,2,\ldots$.

***Решение***. Проинтегрируем по частям

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^n; dv = e^{-x}; \\ du = nx^{n-1}; v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

т.е. $I_n = n \cdot I_{n-1}$.

Поскольку $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, то, применяя последовательно рекуррентную формулу, получим

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n! I_0 = n!.$$

**4. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.**

**Теорема 1 (критерий Коши).** *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta$, *что для всех* $\eta_1$ *и* $\eta_2$, *удовлетво-*

*ряющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство* $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

► Положим $\varphi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx$. Сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ означает существование конечного предела функции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$. Согласно критерию Коши существования предела $\lim_{\eta \to b} \varphi(\eta)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\eta$, что для всех $\eta_1$ и $\eta_2$, удовлетворяющих условию $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, выполняется неравенство

$$|\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)| < \varepsilon.$$

Поскольку $\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1) = \int_a^{\eta_2} f(x)dx - \int_a^{\eta_1} f(x)dx = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx$, то получаем $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$. ◄

### Вопросы для самоконтроля

1. Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Когда несобственный интеграл первого рода сходится, расходится?
2. Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Когда несобственный интеграл второго рода сходится, расходится?
3. Перечислите основные свойства несобственных интегралов.
4. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости несобственных интегралов.