Лекция 9.

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Выпуклость и вогнутость функции.
2. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба.
3. Асимптоты графика функции.
4. Общая схема исследования функции.

1. Выпуклость и вогнутость функции.

Определение 1. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** (***вогнутым***) на $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$ расположена выше любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рис.1).

Определение 2. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** (***выпуклым***) на $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$ расположена ниже любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рис.2).

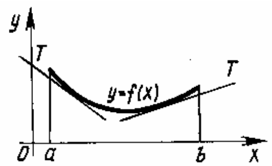

Рис.1

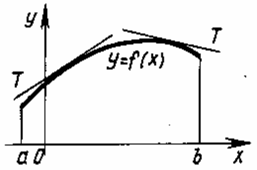

Рис.2.

Теорема 1 (достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции). *Если функция $y=f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ вогнутый (выпуклый вниз). Если функция $y=f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)<0$ $\forall x\in(a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ выпуклый.*

► Пусть на интервале $(a;b)$ вторая производная $f''(x)>0$. Возьмем точку $x_0\in(a;b)$. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\text{или } Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

где Y – ординаты точек касательной. Разность ординат точек кривой и касательной

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Применяя формулу Лагранжа к разности $f(x)-f(x_0)$ на отрезке $[x_0;x]$, получаем

$$y-Y=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\text{или } y-Y=\left(f'(\xi)-f'(x_0)\right)(x-x_0),$$

где $\xi\in(x_0;x)\subset(a;b)$.

Применяя формулу Лагранжа к разности $f'(\xi)-f'(x_0)$ на отрезке $[x_0;\xi]$, находим

$$y-Y=f''(\xi_1)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

где $\xi_1\in(x_0;x)\subset(a;b)$. В последнем равенстве $f''(\xi_1)>0$, а $\xi-x_0>0$, если $x-x_0>0$, или $\xi-x_0<0$, если $x-x_0<0$. Следовательно, $y>Y$, т.е. ординаты точек кривой больше ординат точек касательной при одной и той же абсциссе. Точки кривой $y=f(x)$ на $(a;b)$ лежат выше точек касательной T к кривой.

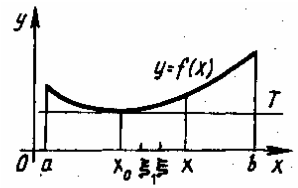

Рис.3.

График функции $y=f(x)$ на $(a;b)$ – вогнутый (рис.3).

Доказательство выпуклости графика функции на $(a;b)$ проводится аналогично. ◄

2. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба.

Определение 3. Точка $M(x_0;f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y=f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется ***точкой перегиба*** (рис.4).

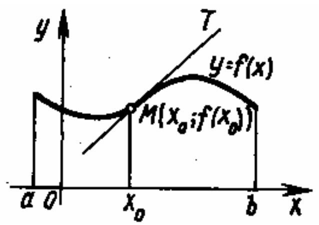

Рис.4.

Теорема 2 (необходимое условие точек перегиба). *Если функция $f(x)$ имеет в точке $M(x_0;f(x_0))$ перегиб и существует вторая производная $f''(x)$ в точке x_0, то $f''(x_0)=0$.*

► Предположим противное. Пусть $f''(x_0)\neq 0$. Для определенности положим $f''(x_0)>0$. Тогда по теореме об устойчивости знака существует $U(\delta;x_0)$, в которой $\forall x\in U(\delta;x_0)$ выполняется неравенство $f''(x)>0$. Тогда график функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет одно направление выпуклости, а значит, в точке x_0 нет перегиба. Это противоречит условию. Следовательно, $f''(x_0)=0$. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда.

Пример. Для функции $y=x^4$ в точке $f''(0)=0$, но этой точке перегиба нет.

Определение 4. Точки $M(x_0;f(x_0))$ графика функции $y=f(x)$ называются ***точками возможного перегиба***, если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема 3 (достаточное условие существования точек перегиба). *Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует и при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M(x_0;f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.*

► Пусть $f''(x)=0$ или не существует. Если $f''(x)<0$ в $U(\delta;x_0-0)$ и $f''(x)>0$ в $U(\delta;x_0+0)$, то точка кривой с абсциссой x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости. Если $f''(x)>0$ в $U(\delta;x_0-0)$ и $f''(x)<0$ в $U(\delta;x_0+0)$, то эта точка отделяет интервал вогнутости от интервала выпуклости кривой. В обоих случаях по определению точка $(x_0;f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции. ◄

3. Асимптоты графика функции.

При исследовании поведения функции на бесконечности, т.е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такая прямая называют ***асимптотой графика***.

Определение 5. Прямая $x=x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0-0} = f(x)\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} = f(x)\pm\infty .$$

Очевидно, что непрерывные на **R** функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y=f(x)$. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

Определение 6. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Теорема 4. *Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел* *наклонную асимптоту* $y = kx + b$*, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = b.$$

► *Необходимость*.

Предполагаем, что $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда справедливо представление $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(b + \alpha(x)\right) = b.$$

Достаточность.

Пусть существуют пределы $\lim_{x\to+\infty} = \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$. Тогда из второго равенства получаем

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Последнее представление функции $f(x)$ означает, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Итак, теорема доказана для случая $x \to +\infty$. Доказательство теоремы для случая $x \to -\infty$ производится аналогично. ◄

Замечание. Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

4. Общая схема исследования функции.

Исследование дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и построение ее графика выполняется по следующей схеме.

1. Находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки

пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию.

2. Находим наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции (если они существуют).

3. С помощью первой производной функции определяем стационарные точки и интервалы монотонности.

4. С помощью второй производной определяем интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба.

5. Находим локальные экстремумы функции на $D(f)$.

По результатам исследований строим график функции, для удобства сводя их в таблицу, построение которой покажем на примерах.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по указанной выше схеме.

1. Находим $D(f)$. Данная функция определена для $x \neq \pm\sqrt{3}$:

$$D(f) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right).$$

Функция непрерывна на $D(f)$; $x = \pm 3$ – точки разрыва второго рода.

Функция $y = 0$ при $x = 0$, т.е. график функции пересекает координатные оси в начале координат.

Функция непериодична.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x) = -f(x)$, т.е. $\frac{(-x)^3}{3 - x^2} = \frac{-x^3}{3 - x^2}$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \geq 0$.

2. *Асимптоты графика функции.*

А. Вертикальные асимптоты.

Поскольку

$$\lim_{x\to3-0}\frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty, \ \lim_{x\to3+0}\frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty,$$

то прямые $x=-3$ и $x=3$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Б. Наклонные асимптоты.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0,$$

Значит, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой графика функции.

3. *Точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции.*

Находим первую производную функции $y=f(x)$:

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Она определена на $D(f)$. В промежутке $[0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1=0$, $x_2=3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y'>0$ и $y'<0\ \ \forall x\ge 0$.

Имеем

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}>0,$$

$$9-x^2>0\ \Rightarrow\ 0<x<3.$$

т.е. функция возрастает на $(0;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};3)$.

Аналогично

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}<0,$$

$$9-x^2<0\ \Rightarrow\ x>3.$$

т.е. функция убывает на $[3;\infty)$.

4. *Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.*

Вычисляем вторую производную функции $y=f(x)$:

$$y''=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=\frac{6x(9-x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

Она определена на $D(f)$.

Находим интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств $y''>0$, $y''<0\ \ \forall x\ge 0$.

Имеем

$$\frac{6x(9-x^2)}{(3-x^2)^3}>0,$$

$$\begin{cases}x>0,\\ 3-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow 0<x<\sqrt{3},$$

т.е. кривая вогнута на $(0;\sqrt{3})$.

Аналогично,

$$\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}<0,$$

$$\begin{cases}x>0,\\ 3-x^2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ 3<x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x>\sqrt{3},$$

т.е. кривая выпукла на $(\sqrt{3};\infty)$.

В точке $x=0$ $y''=0$ и $f''(x)<0$ в $U(\delta;0-0)$, а $f''(x)>0$ в $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости кривой от ее интервала вогнутости. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой.

5. *Локальные экстремумы.*

Определяем с помощью второй производной $f''(x)$ локальные экстремумы. Так как $f''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x \in U(\delta;3)} f(x) = -4{,}5$, $\min\limits_{x \in U(\delta;-3)} f(x) = 4{,}5$.

Результаты исследования функции $y = f(x)$ на $[0;\infty)$ заносим в таблицу 1.

Таблица 1.

x	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0(т.перег)	$\nearrow$	Не сущ.	$\nearrow$	-4,5	$\searrow$

Исходя из результатов, содержащихся в таблице, строим график данной функции (рис.5).

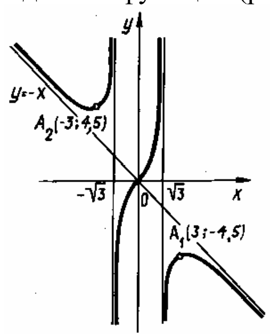

Рис.5.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой график функции называется выпуклым вверх, вниз?
2. Сформулируйте достаточное условие выпуклости и вогнутости.
3. Какая точка графика называется точкой перегиба?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия точек перегиба.
5. Какая прямая называется вертикальной (наклонной, горизонтальной) асимптотой?