Лекция 5. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

1. Правило Лопиталя.

2. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие.

1. Правило Лопиталя.

Теорема 1 (правило Лопиталя). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a;b)$*, за исключением, быть может, точки* x_0*, причем* $g(x)\neq 0$ *и* $g'(x)\neq 0$ *для любого* $x\in(a;b)$*;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ *(либо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$*);*

3) существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Тогда существует также предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$*, причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► Рассмотрим доказательство теоремы только для случая раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$.

Доопределим функции f и g в точке $x=x_0$, положив $f(x_0)=g(x_0)=0$. Доопределенные таким образом функции будут непрерывны в точке x_0. Рассмотрим отрезок $[x_0;x]$, где $x_0<x<b$. На этом отрезке функции f и g непрерывны, а на интервале $(a;x)$ – дифференцируемы. Следовательно, по теореме Коши существует точка ξ ($a<x_0<\xi<x$) такая, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

С учетом того, что $f(x_0)=g(x_0)=0$, имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если $x\to x_0$, то и $\xi\to x_0$. Поэтому, согласно условию 3) теоремы, из данного равенства следует, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ ◄$$

Замечания. **1.** Смысл правила Лопиталя заключается в том, что оно позволяет свести вычисление предела отношения функций в случае неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ к пределу отношения производных, который очень часто вычисляется проще.

2. Правило Лопиталя справедливо и в случае $x_0=\infty$.

3. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ существует, применив дважды правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия, предусмотренные теоремой, уже не выполняются.

2. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим применение правила Лопиталя к вычислению пределов в случаях неопределенностей двух видов: $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0+0}\sin x=-1\cdot 0=0$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^n\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(nx^{n-1}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\ldots 2\cdot 1}{e^x}=0$.

3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$**.** Неопределенность данного вида сводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0+0}x=0$.

Неопределенность вида $\infty\cdot\infty$**.** Неопределенность данного вида сводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x\operatorname{tg} x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x+\frac{\sin 2x}{2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$.

Неопределенности вида 1^∞***,*** 0^0***,*** ∞^0**.** Для того чтобы свести данные неопределенность к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, необходимо представить выражение $u(x)^{v(x)}$, стоящее под знаком предела как $e^{\ln u(x)^{v(x)}}$.

Примеры.

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Р е ш е н и е . Имеем

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$.

Вычислим предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{tg} x}{2x}=$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}$.

Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} = e^0 = 1.$$

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)} = e^0 = 1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. При раскрытии каких неопределенностей используется правило Лопиталя?
2. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя.