СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……………………………………….……………… 5
Тема 1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
Лекция 1 Производная и дифференциал……..…………….. 6
Лекция 2 Производная сложной и обратной функции…… 18
Лекция 3 Производные и дифференциалы высших порядков………………………………………………………. 31
Лекция 4. Дифференциальные теоремы о среднем……... 40
Лекция 5. Правило Лопиталя…………………….…………. 48
Лекция 6. Теорема Тейлора……………………………… 53
Лекция 7. Формула Маклорена…………………..………. 58
Лекция 8. Локальные экстремумы……………………….. 67
Лекция 9. Общая схема исследования функции…………… 75
Лекция 10. Векторные функции…………………………… 84
Лекция 11. Длина кривой…………………………………. 95
Лекция 12. Кривизна кривой……………………............. 107
Тема 2 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
Лекция 1. Первообразная. Неопределенный интеграл…….. 115
Лекция 2. Интегрирование рациональных дробей ………… 127
Лекция 3. Интегрирование иррациональностей…………….. 136
Лекция 4. Интегрирование трансцендентных функций……. 144
Лекция 5. Определенный интеграл……………………… 151
Лекция 6 Свойства определенного интеграла…………….. 160
Лекция 7 Интеграл с переменным верхним пределом…… 170
Лекция 8 Геометрические приложения определенного интеграла………………………………………………………. 178
Лекция 9. Физические приложения определенного интеграла…………………………………………………….. 198
Лекция 10. Несобственные интегралы…………………… 210
Лекция 11. Признаки сходимости несобственных интегралов…………………………………………………… 219
Лекция 12. Приближенные методы вычисления определенных интегралов…………………………………… 227
ЛИТЕРАТУРА…………………………………………...... 235

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Дифференциальное и интегральное исчисление функции действительной переменной» является второй частью цикла работ по курсу «Математический анализ», которые написаны на основе лекций, проводимых на физическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Их содержание включает материал, соответствующий учебной программе по данной дисциплине, и который изложен в учебниках и учебных пособиях по математическому анализу. Пособие основано на тех педагогических принципах, изложенных в первой части данного комплекса.

В начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Тема 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Лекция 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Определение производной. Правая и левая производная.
2. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.
3. Дифференцируемость функции. Дифференциал.
4. Физический смысл производной и дифференциала.

1. Определение производной. Правая и левая производная.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$точки x_0. Если фиксированное значение аргумента x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x \in U(\delta; x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. ***Производной*** функции $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначается: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$.

Производная функции $y = f(x)$ в произвольной точке x *обозначается* так: $f'(x)$, y'.

При каждом конкретном числовом значении x производная $f'(x)$ (если она существует при данном x) функции $y = f(x)$ представляет собой определенное число. Значениям переменной x ставятся в соответствие определенные значения переменной $f'(x)$. Поэтому производная является функцией аргумента x.

Если для некоторого значения x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что для этого значения x существует ***бесконечная производная***.

Пример. Найти производные функций

1) $y = \sin x$, 2) $y = a^x$, $a > 0$.

Решение. 1. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Поэтому

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

2. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Тогда

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной

производной слева (***справа***) функции $f(x)$ в точке x_0

Обозначается: $f'(x_0-0)$ или $f'_-(x_0)$

($f'(x_0+0)$ или $f'_+(x_0)$).

Левая и правая производные называются ***односторонними производными***.

Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют производные слева и справа, причем

$$f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0).$$

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 левую и правую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Пример. Доказать, что функция $y=|x|$ в точке $x_0=0$ не имеет производной.

Решение. Очевидно, что эта функция определена и непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

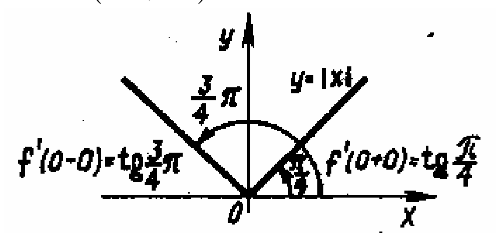

Рис.1.

Вычислим производную функции справа в точке $x_0=0$.

При $x\ge 0$ имеем $y=|x|=x$, $\Delta y=\Delta x$.

Поэтому

$$f'_+(0)=f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Аналогично при $x<0$ получим $y=|x|=-x$, $\Delta y=-\Delta x$.

Следовательно, производная слева

$$f'_-(0)=f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Поскольку $f'_-(0)\ne f'_+(0)$, то функция $y=|x|$ в данной точке производной не имеет.

Операция нахождения производной функции f называется ***дифференцированием***. Для отыскания производной от данной функции $y=f(x)$, согласно определению, необходимо выполнить следующие действия:

– придав фиксированному аргументу $x\in D(f)$ приращение Δx, вычислить значение функции

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

– найти соответствующее приращение функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

– составить отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

– найти предел данного отношения при $\Delta x\to 0$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

2. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.

Рассмотрим задачу о проведении касательной к произвольной плоской кривой. Пусть L – дуга плоской кривой, M_0 – точка этой кривой, M_0M – секущая (рис.2). Если точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая поворачивается вокруг точки M_0 и стремится к некоторому предельному положению M_0T.

Определение 3. ***Касательной*** к кривой L в точке M_0 называется прямая M_0T, которая представляет собой предельное положение секущей M_0M при стремлении по кривой точки M к точке M_0 (см. рис.2).

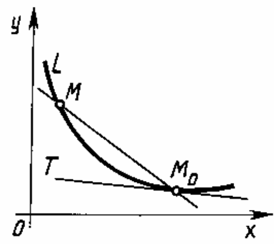

Рис.2.

Если предельного положения секущей не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является ***точкой излома***, или ***заострения***, кривой (см. рис.3,*а,б,в*).

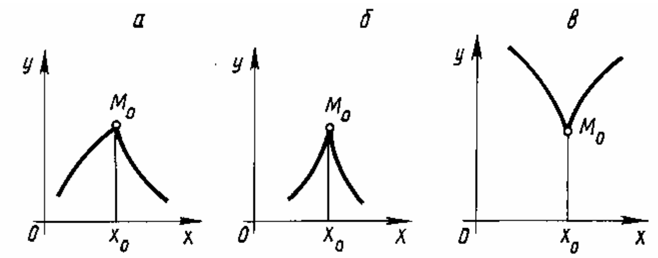

Рис.3.

Пусть кривая L является графиком функции $f(x)$ и точка $M(x_0; f(x_0)) \in L$ (рис.4).

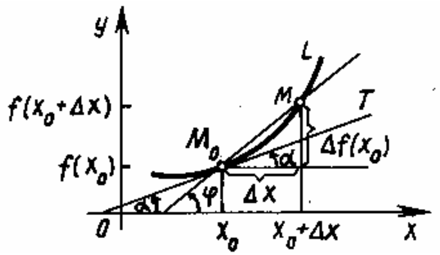

Рис.4.

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отсюда следует **геометрический** смысл производной: *производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.*

Для составления уравнений касательной и нормали к плоской кривой используется геометрическая интерпретация производной. Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Угловой коэффициент касательной к ней в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Поскольку $k = f'(x_0)$, то $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ есть *уравнение касательной*.

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Определение 4. ***Углом между кривыми*** называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

3. Дифференцируемость функции. Дифференциал.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

где A – некоторое действительное число; $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx, при стремлении $\Delta x \to 0$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$.*

► *Необходимость.*

Поскольку функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение можно представить в виде $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$.

Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = A$.

Достаточность.

Так как $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$.

Отсюда $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Положим $f'(x_0) = A$. Тогда $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$.

По определению 5 функция $y = f(x)$ является дифференцируемой. ◄

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

► Действительно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в силу условия дифференцируемости ее приращение в этой точке представимо в виде $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = A \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

что означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0. ◄

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.*

Замечание. Обратное неверно, т.е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Пример. Функция $y = |x|$ является непрерывной в точке $x_0 = 0$, но не имеет в этой точке производной. Следовательно, она не дифференцируема в этой точке.

Функции, графики которых имеют изломы в точке x_0 (рис.3.а,б,в), не имеют в этой точке конечной производной. Существуют также функции (рис.5.), недифференцируемые в точке x_0 функций, которые непрерывны в точке x_0 и не имеют изломов.

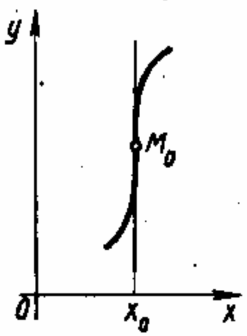

Рис.5.

О п р е д е л е н и е 6. Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** на отрезке $[a;b]$, если она дифференцируема в любой точке $x \in [a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.Тогда ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда, если $f'(x_0)\neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}\right)=1.$$

Следовательно, при $\Delta x\to 0$ приращение функции $\Delta f(x_0)$ и выражение $f'(x_0)\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Поэтому при $\Delta x\to 0$ можно приближенно считать, что $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$.

Определение 7. ***Дифференциалом*** функции $f(x)$ называется величина $f'(x_0)\Delta x$, являющаяся ***главным*** (линейным) членом приращения функции в точке x_0.

Обозначается: $df(x_0)$:

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x.$$

В частности, если $y=x$, то $y'=1$, и, следовательно, $dy=dx=\Delta x$, т.е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+o(\Delta x).$$

Видно, что дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x\to 0$.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y=f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной в $M(x_0;f(x_0))$ к линии $y=f(x)$ (рис.6).

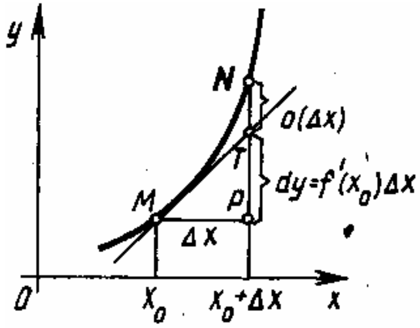

Рис.6.

Пример. Найти дифференциал функции $y=x^2$.

Решение. Дифференциал функции $y=x^2$ в точке x_0 для приращения Δx есть $dy=2x_0\Delta x$. Он является линейным слагаемым приращения функции относительно Δx:

$$\Delta f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Заменяя приращение функции в точке x_0 ее дифференциалом, получается приближенная формула для вычисления приближенных значений функции

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx.$$

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{65}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=64$, для которой приращение аргумента $\Delta x=1$. Производная функции равна

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Тогда

$$\sqrt[3]{64+1}\approx f(64)+f'(64)\cdot 1=\sqrt[3]{64}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}\cdot 1=$$

$$=4+\frac{1}{3\cdot 4^2}=4{,}02083$$

4. Физический смысл производной и дифференциала.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в некоторой окрестности точки x_0. Если аргумент x_0 функции получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит той же окрестности точки x_0, то соответствующее приращение функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$, средняя скорость изменения функции

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

а мгновенная скорость ее изменения

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Механический смысл производной: производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$. В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг математических моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть материальная точка M движется неравномерно и $y = s(t)$ – функция, устанавливающая зависимость пути от времени t. Тогда мгновенная скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t:

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если движение на этом участке равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

2. Пусть $y = v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

3. Пусть $y = Q(T)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Тогда теплоемкость тела есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q(T_0 + \Delta T) - Q(T_0)}{\Delta T}.$$

4. Пусть необходимо определить линейную плотность неоднородного тонкого стержня длиной l, где m – масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Ясно, что масса стержня является функцией x, т.е. $f(x) = m(x)$. Тогда линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0) = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

5. Пусть $y = \Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Тогда мгновенное значение электродвижущей силы индукции равно скорости изменения магнитного потока, т.е. производной от магнитного потока Φ по времени t:

$$\varepsilon = \Phi'(t_0) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t}$$

6. Пусть $y = q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Тогда сила тока в контуре в момент времени t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекало через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. При этом $\Delta q = dq + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение производной.
2. Что называется правой и левой производной?
3. В чем состоит геометрический смысл производной? Выведите уравнение касательной и нормали.
4. Дифференцируемость функции.
5. Дифференциал и его геометрический смысл.
6. Физический смысл производной и дифференциала.