Лекция 11. ДЛИНА КРИВОЙ

1. Понятие кривой. Касательная к кривой.
2. Понятие гладкой кривой
3. Длина кривой. Спрямляемые кривые.
4. Натуральное уравнение гладкой кривой. Уравнение нормальной плоскости.

1. Понятие кривой.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. И пусть на отрезке $[a;b]\subset\mathbf{R}$ заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в $\mathbf{R}^3$.

Числа $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно рассматривать как координаты точки $M=M(t)$ или как координаты радиус-вектора $\vec{r}(t)$ с началом в точке O и концом в точке M:

$$\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t)),\ t\in[a;b]\subset\mathbf{R}.$$

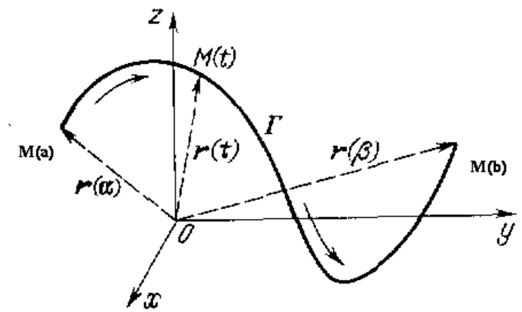

Рис.1.

О п р е д е л е н и е 1. Непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в пространство $\mathbf{R}^3$ называется ***кривой***.

Обозначается: $\Gamma=\{M(t)|\ a\le t\le b\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество точек пространства $\mathbf{R}^3$, на которое отображается отрезок $[a;b]$, называется ***носителем*** кривой Γ, переменная t называется ***параметром*** на кривой Γ.

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется ***плоской***.

Способы задания кривой

1) **Явное задание**: непрерывная функция $y=f(x)$, $a\le x\le b$, задает плоскую кривую $\Gamma=\{y=f(x)|\ a\le x\le b\}$, носителем является график функции $f(x)$, параметром переменная x.

1) **неявное задание**: координаты всех точек носителя плоской кривой Γ удовлетворяют уравнению $F(x;y)=0$,

2) **в координатной форме**: $\Gamma=\{x(t);y(t);z(t)|\ a\le t\le b\}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатные функции отображения $M(t)$, $t\in[a;b]\subset\mathbf{R}$,

3) **векторное представление**: $\Gamma=\{\vec{r}(t)|\ a\le t\le b\}$, где $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$ – вектор-функция.

О п р е д е л е н и е 3. Если для точек кривой $\Gamma=\{M(t)|\ a\le t\le b\}$ выполняется условие

$$\forall t_1<t_2\quad M(t_1)\text{ предшествует }M(t_2),$$

то такая кривая называется ***ориентированной***.

О п р е д е л е н и е 4. Точка носителя кривой, в которую при отображении $\Gamma=\{M(t)|\ a\le t\le b\}$ отображаются хотя бы две разные точки отрезка $[a;b]$, называется ***точкой самопересечения*** (***кратной точкой***) кривой Γ.

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек (отображение $\Gamma=\{M(t)|\ a\le t\le b\}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a;b]$ в точки пространства $\mathbf{R}^3$), то кривая называется ***простой дугой***.

Если $M_0=M(a)$ и $M_1=M(b)$, то точка $(M_0;a)$ называется ***началом*** кривой Γ, а точка $(M_1;b)$ – ***концом*** данной кривой. Если $M(a)=M(b)$, то кривая Γ называется ***замкнутой***.

О п р е д е л е н и е 5. ***Простым замкнутым контуром*** называется замкнутая кривая, у носителя которой нет кратных точек, кроме носителя ее начала и конца.

Пример. Кривая $\Gamma=\left\{x=\cos t; y=\sin t; z=0 \middle| \ 0\le t\le 2\pi\right\}$ является замкнутым контуром. При изменении $0\le t\le 2\pi$ носителем кривой является единичная окружность плоскости Oxy, которую описывает точка $M(\cos t;\sin t)$, двигаясь против часовой стрелки. Точка $(1;0;0;)\in \mathbf{R}^3$ является одновременно начальной и конечной точкой кривой Γ.

О п р е д е л е н и е 6. Если $t_1,t_2\in[a;b]$, $t_1<t_2$, то кривая $\Gamma=\left\{M(t)\middle| \ t_1\le t\le t_2\right\}$ называется ***частью кривой*** Γ или ***простой дугой*** $M(t_1)\overset{\smile}{}M(t_2)$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в точке $M(t_2)$.

Касательная к кривой. Пусть задана кривая $\Gamma=\left\{\vec r(t)\middle| \ a\le t\le b\right\}$, где $\vec r(t)$ – вектор-функция, дифференцируемая в точке $t_0\in[a;b]$, причем $\vec r\,'(t_0)\ne 0$. Согласно определению дифференцируемости ее приращение можно представить в виде

$$\Delta\vec r(t_0)=\vec r\,'(t_0)\cdot\Delta t+o(\Delta t),\ \Delta t\to 0 .$$

Из этой формулы и условия $\vec r\,'(t_0)\ne 0$ следует, что для всех достаточно малых $\Delta t\ne 0$ имеет место $\Delta\vec r(t_0)\ne 0$ или $\vec r(t_0+\Delta t)\ne\vec r(t_0)$. Значит, точки $M_0=M(t_0)$ и $M=M(t_0+\Delta t)$ различны.

Проведем через эти точки прямую M_0M, которая называется ***секущей***. Если $\vec r\,'(t_0)\ne 0$, то при всех значениях Δt, ненулевой вектор $\Delta\vec r=\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)$ параллелен секущей. Поэтому вектор $\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}$ также параллелен секущей.

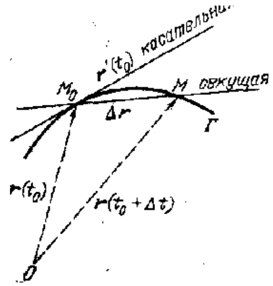

Рис.2.

По условию в точке t_0 существует производная $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}=\vec r(t_0)\ne 0$. Геометрически это означает, что векторы $\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}$, параллельные секущей M_0M, при $\Delta t\to 0$ стремятся к некоторому предельному вектору $\vec r\,'(t_0)$. Все секущие M_0M проходят через точку M_0.

О п р е д е л е н и е 7. Прямая, проходящая через точку M_0 в направлении вектора $\vec r\,'(t_0)$, называется предельным положением секущих M_0M при $\Delta t\to 0$ или ***касательной*** к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

Поместим начало вектора $\vec r\,'(t_0)$ в точку $M(t_0)$. Направление данного вектора совпадает с направлением касательной. Поэтому уравнение касательной в векторной форме запишется в виде

$$\vec r=\vec r(t_0)+\vec r\,'(t_0)\cdot\lambda,\ \lambda\in\mathbf{R},$$

где $\vec r(t)$ – радиус-вектор касательной.

В координатной форме уравнение $\vec r=\vec r(t_0)+\vec r\,'(t_0)\cdot\lambda$ примет вид

$$x=x(t_0)+\lambda\cdot x'(t_0),$$
$$y=y(t_0)+\lambda\cdot y'(t_0),$$
$$z=z(t_0)+\lambda\cdot z'(t_0),$$

где параметр $\lambda\in\mathbf{R}$.

Выражая параметр λ, получим уравнения касательной в канонической форме:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

2. Понятие гладкой кривой.

Пусть задана кривая $\Gamma=\{\ \vec{r}(t)|\ a\le t\le b\ \}$, где $\vec{r}(t)$ – вектор-функция, $t\in[a;b]\subset\mathbf{R}$.

Определение 8. Если функция $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется ***непрерывно дифференцируемой*** кривой. Если векторная функция $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется n ***раз дифференцируемой*** кривой.

Определение 9. Точка кривой Γ, в которой $\vec{r}\,'(t_0)\ne 0$, называется ***неособой***, а точка, в которой $\vec{r}\,'(t_0)=0$ – ***особой***.

Пусть $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$. Тогда $\vec{r}\,'(t)=(x'(t);y'(t);z'(t))$. Поэтому точка M_0 является неособой точкой кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0.$$

Из определения неособой точки следует, что во всякой неособой точке кривой Γ существует касательная.

Определение 10. ***Гладкой*** кривой называется кривая, которая является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек. Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такая кривая называется ***кусочно-гладкой***.

3. Длина кривой.

Пусть кривая Γ задана уравнением $\Gamma=\{\ \vec{r}(t)|\ a\le t\le b\ \}$.

Определение 11. Для отрезка $[a;b]$ система $\tau_n=\{t_k\}$, $k=0,1,...,n$, точек t_k, таких, что $a=t_0<t_1<...t_{n-1}<t_n=b$, называется ***разбиением*** отрезка $[a;b]$. Соответствующий набор точек $M_k=M(t_k)$, $k=0,1,...,n$, где $\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t_k)$ называется ***разбиением*** кривой Γ.

Соединив последовательно точки M_0, M_1, ..., M_n, отрезками M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ получим ломаную P_n, которая называется ***вписанной*** в кривую Γ; отрезки $M_{k-1}M_k$, $k=0,1,...,n$ называются ***звеньями*** ломаной P_n, а точки ломаной $M_k=M(t_k)$ – ***вершинами*** ломаной. Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\vec{r}(t_k)-\vec{r}(t_{k-1})|$. Тогда длина всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|\vec{r}(t_k)-\vec{r}(t_{k-1})|.$$

Определение 12. Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется ***длиной*** кривой:

$$L_\Gamma=\sup_{\tau_n}\sigma_n,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\tau_n=\{\ t_k\ \}$, $k=0,1,...,n$, отрезка $[a;b]$.

Если $0\le L_\Gamma<+\infty$ то кривая Γ называется ***спрямляемой***.

Теорема 1. *Если кривая* $\Gamma=\{\vec{r}(t)|\ a\le t\le b\}$ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина* S_Γ *удовлетворяет неравенству*

$$|\vec{r}(a)-\vec{r}(b)|\le L_\Gamma\le c(b-a),$$

где $c=\max\limits_{[a;b]}|\vec{r}\,'(t)|$.

Без доказательства.

Теорема 2. *Если кривая* $\Gamma=\{x(t);y(t);z(t)|\ a\le t\le b\}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $l=l(t)$*, отсчитываемая от нашла кривой* Γ*, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{dl}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

► Обозначим через $M(t)$ конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$. Пусть $l(t)$ – длина дуги кривой Γ от точки $M(a)$ до точки $M(t)$.

Тогда для точек $t_0 \in [a;b]$ и $t_0 + \Delta t \in [a;b]$ имеем $\Delta l = l(t_0 + \Delta t) - l(t_0)$. Очевидно, $|\Delta l|$ является длиной дуги с концами в точках $M(t_0)$ и $M(t_0 + \Delta t)$. Согласно теореме 1, имеет место неравенство

$$|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)| \le |\Delta l| \le c|\Delta t|$$

где c – наибольшее значение $c = \max\limits_{[t_0;t_0+\Delta t]} |\vec{r}\,'(t)|$.

Обозначим через $\xi = \xi(\Delta t)$ точку этого отрезка, в которой $|\vec{r}\,'(\xi)| = c$.

Разделим обе части неравенства на $|\Delta t|$:

$$\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \left|\frac{\Delta l}{\Delta t}\right| \le |\vec{r}\,'(\xi)|.$$

Функция $l = l(t)$ возрастает, так как с увеличением дуги ее длина возрастает.

Поэтому, если $\Delta t > 0$, то $\Delta l \ge 0$, а если $\Delta t < 0$, то $\Delta l \le 0$. Следовательно, всегда $\frac{\Delta l}{\Delta t} \ge 0$ и поэтому можно записать $\left|\frac{\Delta l}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta l}{\Delta t}$.

Тогда $\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \frac{\Delta l}{\Delta t} \le |\vec{r}\,'(\xi)|$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} \le \lim_{\Delta t \to 0}|\vec{r}\,'(\xi)|.$$

Отсюда $|\vec{r}\,'(t_0)| \le l'(t_0) \le |\vec{r}\,'(t_0)|$. Значит, $l'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$. В силу произвольности точки $t_0 \in [a;b]$, получим

$$l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|.$$

В координатной форме

$$l'(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Поскольку $l'(t) = \frac{dl}{dt}$, то отсюда ***дифференциал длины дуги*** равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

4. Натуральное уравнение гладкой кривой. Уравнение нормальной плоскости.

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) \mid a \le t \le b\}$ гладкая кривая. В силу теоремы 2 переменная длина дуги $l = l(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a;b]$: $l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$. Так как $l(a) = 0$ и $l(b) = L_\Gamma$, то обратная функция $t = t(l)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;L_\Gamma]$. По теореме об обратной функции имеем

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0.$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой Γ ее параметр t является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины l, производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра и уравнение кривой Γ можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(t(l))$, $l \in [0;L_\Gamma]$.

Определение 13. Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги l, то l называется ***натуральным параметром***, а уравнение кривой $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(l) \mid 0 \le l \le L_\Gamma\}$ называется ***натуральным уравнением*** кривой.

Пример. Записать натуральное уравнение винтовой линии (рис.3)

$$\Gamma = \{x = a\cos t; y = a\sin t; z = bt \mid 0 \le t \le T\}.$$

Решение. Векторная функция $\vec{r}(t)=(a\cos t; a\sin t; bt)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}>0.$$

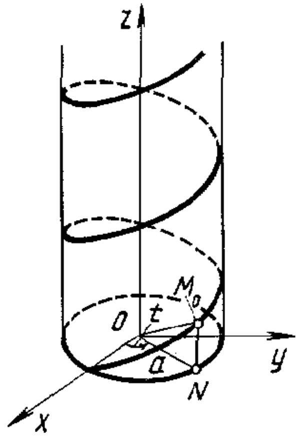

Рис.3.

Тогда $l'(t)=|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$. Интегрируя обе части, получим $s(t)=t\sqrt{a^2+b^2}+C$. Из начального условия $l(0)=0$, имеем $C=0$. При этом длина винтовой линии равна $L_\Gamma=T\sqrt{a^2+b^2}$.

Следовательно, $t=\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отсюда натуральное уравнение винтовой линии в координатной форме запишется в виде:

$$\Gamma=\left\{x=a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; y=a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; z=b\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

где $0\le l\le T\sqrt{a^2+b^2}$.

Теорема 3. *Пусть кривая* $\Gamma=\{\vec{r}(t)|\ a\le t\le b\}$ *гладкая, а* $l=l(t)$ *– переменная длина ее дуги. Тогда* $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ *является единичным касательным к кривой* Γ *вектором и* $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right|=1$.

► Вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ можно записать в виде $\dfrac{d\vec{r}}{dl}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dl}$. Вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ отличается от касательного вектора $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\ne 0$ только числовым множителем $\dfrac{dt}{dl}$ и поэтому также направлен по касательной. Тогда $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right|=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dl}\right|=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|\cdot\left|\dfrac{dt}{dl}\right|=|\vec{r}\,'(t)|\cdot\dfrac{1}{l'(t)}=\dfrac{|\vec{r}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|}=1$. ◄

Геометрически условие $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right|=1$ означает, что отношение длины хорды M_0M к длине стягиваемой ею дуги $\overset{\smile}{M_0M}$ стремится к единице при $\Delta t\to 0$ (рис. 4)

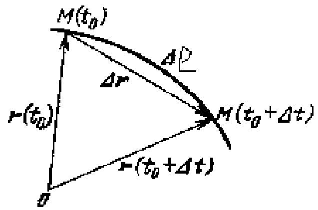

Рис.4.

Следствие. *Пусть кривая* Γ *задана натуральным уравнением* $\Gamma=\{\vec{r}=\vec{r}(l)|\ 0\le l\le L_\Gamma\}$. *И пусть* α, β, γ *– углы, образованные вектором касательной* $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ *к кривой* Γ *с осями* Ox, Oy, Oz *соответственно. Тогда* $\dfrac{d\vec{r}}{dl}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

Без доказательства.

О п р е д е л е н и е 14. ***Нормальной плоскостью*** к кривой Γ называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и преходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка касания (рис.5).

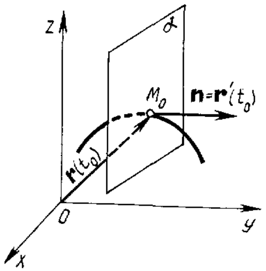

Рис.5.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $\vec{n}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости. Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n}=(A,B,C)$ и $\vec{r}'(t_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ коллинеарные, поэтому можно положить $A=x'(t_0)$, $B=y'(t_0)$, $C=z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(z-z_0)=0.$$

Пример. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к годографу винтовой линии

$$\Gamma=\left\{x=a\cos t;y=a\sin t;z=bt\middle|\ 0\le t\le T\ \right\}$$

в точке $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. Координаты точки касания $M_0(x_0,y_0,z_0)$ есть:

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2},\ y_0=a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ z_0=b\frac{\pi}{3}.$$

Координаты вектора $\vec{r}'(t_0)$:

$$x'(t_0)=-a\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{a\sqrt{3}}{2},\ y'(t_0)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}.\ z'(t_0)=b.$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{z-\frac{b\pi}{3}}{b},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{a}{2}\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)-b\left(z-\frac{b\pi}{3}\right)=0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение кривой. Перечислите способы задания кривой.
2. Какая прямая называется касательной к кривой?
3. Какая кривая называется гладкой кривой?
4. Что называется разбиением кривой?
5. Какая кривая называется спрямляемой? Дайте определение длины кривой.
6. Чему равен дифференциал дуги?
7. Какое уравнение называется натуральным уравнением гладкой кривой?
8. Чему равна длина единичного вектора касательной? Какие координаты он имеет?
9. Выведите уравнение касательной к кривой.