Лекция 2. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

1. Свойства производных, связанные с арифметическими операциями.
2. Производная обратной и сложной функции.
3. Производные и дифференциалы основных элементарных функций.
4. Таблица производных и дифференциалов.

1. Свойства производных, связанные с арифметическими операциями.

Теорема 1. *Производная постоянной функции равна нулю:*

$$(c)' = 0.$$

► Постоянную можно рассматривать как функцию, принимающую одинаковые значения при всех значениях аргумента x:

$$y = c \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда $y + \Delta y = c$, откуда $\Delta y = c - c = 0$.

Следовательно, по определению имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Итак, $y' = 0$ и $dy = 0$. ◄

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования.

Теорема 2 (правило дифференцирования алгебраической суммы функций). *Производная алгебраической суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме (разности) производных слагаемых:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

► Рассмотрим функцию $y = u(x) + v(x)$. Дадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx. Тогда функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ получат приращения Δu и Δv, а функция y – приращение $\Delta y = \Delta u + \Delta v$. По определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как функции Δu и Δv дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Следовательно,

$$y = u + v \quad \Rightarrow y' = u' + v'.$$

Аналогично доказывается $(u - v)' = u' - v'$ ◄

Следствия. 1. $dy = du + dv$.

2. *Если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ дифференцируемы, то их сумма также дифференцируема:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x),$$

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} du_k(x).$$

Теорема 3 (правило дифференцирования произведения функций). *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:*

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

► Рассмотрим функцию $y = u(x)v(x)$. Когда аргументу x придают приращение Δx, то функции u, v и y получают соответственно приращения Δu, Δv и Δy, причем

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

В последнем равенстве приращения Δu, Δv и Δy зависят от Δx, а u и v не зависят от Δx (u, v – значения функции, соответствующие начальному значению аргумента x).

Используя теоремы о пределах функций, находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v .$$

Согласно определению производной получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',$$

в силу непрерывности функции $v=v(x)$ имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0 .$$

Итак, окончательно:

$$y'=u'v+uv' .◄$$

Следствия. 1. $dy=vdu+udv$.

2. *Если* $u_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, *– дифференцируемые в некоторой окрестности точки* x *функции и* $y=\prod_{i=1}^{n}u_i(x)$, *то*

$$y'=\sum_{i=1}^{n}u_i'(x)\prod_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}u_k(x),$$

$$dy=\sum_{i=1}^{n}du_i(x)\prod_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}u_k(x).$$

3. *Если* $u=u(x)$ *дифференцируемая в точке* x *функция, то* $\forall c\in\mathbf{R}$

$$(cu)'=c\cdot u' .$$

4. *Пусть функции* $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ *имеют производные в точке* x. *Тогда линейная комбинация этих функций равна такой же линейной комбинации соответствующих производных:*

$$y'=c_1u_1'(x)+c_2u_2'(x)+\ldots+c_nu_n'(x).$$

Теорема 4 (правило дифференцирования частного функций). *Производная частного двух дифференцируемых функций равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель представляет собой разность между произведением знаменателя данной дроби на производную ее числителя и произведением числителя на производную знаменателя:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

► Рассмотрим функцию $y=\dfrac{u}{v}$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $v(x)\neq 0$. Придавая фиксированному аргументу x приращение Δx, находим приращение функции y:

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ с учетом того, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ (из дифференцируемости функции следует, что она непрерывна), получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}.$$

Следовательно,

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. ◄$$

Следствие. $dy=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

2. Производная обратной и сложной функции.

Теорема 5. *Пусть функция* $y=f(x)$ *монотонна на отрезке* $[a;b]$ *и имеет во всех точках интервала* $(a;b)$ *ненулевую производную* $y'=f'(x)$. *Тогда обратная функция* $x=\varphi(y)$ *дифференцируема во всех точках интервала* $(f(a);f(b))$ *и для любого*

$y \in \left(f(a); f(b)\right)$ *ее производная равна* $\dfrac{1}{f'(x)}$.

► Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и имеет производную $y' = f'(x) \neq 0$. И пусть $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$, которая является непрерывной и монотонной на $(\alpha;\beta)$.

Дадим фиксированному значению аргумента y обратной функции $x = \varphi(y)$ приращение Δy. Этому приращению соответствует приращение обратной функции, причем в силу ее монотонности $\Delta x \neq 0$. Найдем производную обратной функции. По определению

$$x'_y = \varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}. \ ◄$$

Пусть $y = f(u(x))$ сложная функция.

Теорема 6. *Если функция* $u = u(x)$ *имеет производную в точке* x*, а функция* $y = f(u)$ *имеет производную в точке* $u = u(x)$*, то сложная функция* $y = f(u(x))$ *имеет в точке* x *производную и справедлива формула*

$$y' = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

► Придадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx. Этому приращению соответствует приращение Δu функции $u(x)$. Приращению Δu, в свою очередь, соответствует приращение Δy функции $y = f(u)$ в точке x. Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} = \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0}, \text{ т.е. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ приращения Δu, Δf в силу дифференцируемости соответствующих функций стремятся к нулю. По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = f'_u(u).$$

Тогда

$$y' = f'_u(u) \cdot u'(x) \ ◄.$$

Функция u называется ***промежуточным аргументом***, а x – ***основным аргументом***.

Замечание. Полученное правило распространяется на сложную функцию, зависящую от нескольких аргументов. Предположим, что функции $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(t)$, $t = t(x)$ дифференцируемы. Рассмотрим сложную функцию F переменной x через посредство промежуточных функций f, u, v, t:

$$F(x) = f(u(v(t(x)))).$$

Придадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда t получит приращение Δt, v – приращение Δv, u – приращение Δu.

Запишем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Так как u, v, t дифференцируемы, поэтому и непрерывны, то в силу непрерывности при $\Delta x \to 0$ приращения $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Переходя к пределам, имеем

$$F'(x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x.$$

Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала. Дифференциал в точке x есть произведение производной от функции f в точке x и дифференциала независимой переменной:

$$dy = f'dx, \tag{1}$$

где $dx = \Delta x$.

Пусть дана сложная функция $y = f(u)$, $u = u(x)$. Тогда $y' = f'_u(u)u'(x)$ и, следовательно, $dy = f'_u(u)u'(x)dx$. Так как $u'(x)dx = du$, то в случае сложной функции имеем

$$dy = f'(u)du. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) для дифференциала совпадают по форме записи, однако они имеют различный смысл: в первой из них

$dx=\Delta x$, а во второй $du=u'(x)dx$.

Свойство инвариантности формы дифференциала*:* дифференциал функции всегда равен произведению производной и дифференциала аргумента и не зависит от того, является ли величина, по которой взята производная, независимой переменной или же только промежуточным аргументом.

Из свойства инвариантности следует, что $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$, т.е. производная функции в точке численно равна отношению дифференциалов функции dy и переменной dx независимо от того, является ли функция $y=f(x)$ функцией независимой переменной x либо сложной функцией.

3. Производные и дифференциалы основных элементарных функций.

1. Производная и дифференциал логарифмической функции. Пусть $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$. Придадим фиксированному значению $x\in D(y)$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Следовательно, по определению

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Для сложной функции $y=\log_a u(x)$ имеем

$$y'=\frac{1}{u(x)}\log_a \mathrm{e}\cdot u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}.$$

Тогда дифференциал данной функции имеет вид $du=\dfrac{du(x)}{u(x)\ln a}$.

В частном случае, при $a=e$ логарифмическая функция $y=\ln u(x)$ имеет производную $y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ и дифференциал $dy=\dfrac{du(x)}{u(x)}$.

2. Производная и дифференциал степенной функции. Пусть $y=(u(x))^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Рассмотрим вначале случай, когда $u(x)>0$. Если $u(x)>0$, то $\ln y=\alpha\ln u(x)$. Продифференцируем полученное равенство почленно по правилу дифференцирования сложной функции, считая y функцией от x:

$$(\ln y)'=(\alpha\ln u(x))'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'=y\frac{\alpha u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'=\alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x).$$

Пусть теперь $u(x)<0$. Представим функцию $y=(u(x))^{\alpha}$ в виде $(-1)^{\alpha}(v(x))^{\alpha}$, где $v(x)>0$. Тогда

$$y'=(-1)^{\alpha}\alpha(v(x))^{\alpha-1}v'(x)=\alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x).$$

Тогда дифференциал равен $dy=\alpha u(x)^{\alpha-1}du(x)$.

3. Производная и дифференциал показательной функции. Пусть $y=a^{u(x)}$, где $0<a\neq 1$; $u(x)$ – непрерывная функция. Тогда $\ln y=u(x)\ln a$. Дифференцируем левую и правую части полученного равенства по правилу дифференцирования сложной функции, считая y функцией от x:

$$\frac{y'}{y}=\ln a\cdot u'(x).$$

Отсюда $y'=u\ln a\cdot u'(x)$ или $y'=a^{u(x)}\ln a\cdot u'(x)$.

Тогда дифференциал равен $dy=a^{u(x)}\ln a\cdot du(x)$.

В частном случае, если $y=e^{u(x)}$ то $y'=e^{u(x)}u'(x)$ и $dy=e^{u(x)}du(x)$.

4. Производные и дифференциалы тригонометрических функций. Пусть $y=\sin x$. Дадим фиксированному значению x

приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Согласно определению,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Тогда дифференциал равен $dy = \cos x dx$.

Для сложной функции $y = \sin u(x)$ имеем $y' = u'(x)\cos u(x)$ и дифференциал $du = \cos u(x) du(x)$.

Аналогично доказывается, что функция $y = \cos u(x)$ имеет производную $y' = -u'(x)\sin u(x)$ и дифференциал $du = -\sin u(x) du(x)$.

Пусть $y = \operatorname{tg} x$. Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то для нахождения производной функции $y = \operatorname{tg} x$ воспользуемся правилом дифференцирования частного. Если $\cos x \neq 0$, получим

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тогда дифференциал равен $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Для сложной функции $y = \operatorname{tg} u(x)$ имеем $y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ и дифференциал $dy = \frac{du(x)}{\cos^2 u(x)}$.

Аналогично доказывается, что функция $y = \operatorname{ctg} u(x)$ имеет производную $y' = \frac{-u'(x)}{\sin^2 u(x)}$ и дифференциал $dy = -\frac{du(x)}{\sin^2 u(x)}$.

5. Производные и дифференциалы обратных тригонометрических функций. Пусть $y = \arcsin x$. Найдем производную этой функции. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ она монотонна, ее производная $x'_y = \cos y$ не обращается в нуль. Следовательно, используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(перед квадратным корнем выбран знак «+», так как на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos y > 0$).

Тогда дифференциал равен $dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Для сложной функции $y = \arcsin u(x)$ имеем $y'_x = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$ и дифференциал $dy = \frac{du(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$.

Аналогично доказывается, что производная функции $y = \arccos u(x)$ равна $y'_x = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$, дифференциал есть $dy = -\frac{du(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$.

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Множество возможных значений этой функции $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для функции $y = \operatorname{arctg} x$ существует обратная функция $x = \operatorname{tg} y$, причем ее производная $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$ не обращается в нуль. Используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда дифференциал равен $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Для сложной функции $y = \operatorname{arctg} u(x)$ имеем $y' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ и дифференциал $dy = \dfrac{du(x)}{1+u^2(x)}$.

Аналогично доказывается, что функция $y = \operatorname{arcctg} u(x)$ имеет производную $y' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ и дифференциал $dy = -\dfrac{du(x)}{1+u^2(x)}$.

6. Производные и дифференциалы гиперболических функций. Для функции $y = \operatorname{sh} x$ имеем

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x\right)' - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Тогда дифференциал равен $dy = \operatorname{ch} x dx$.

Аналогично, находим производные и дифференциалы остальных гиперболических функций:

$y = \operatorname{ch} x \Rightarrow y' = \operatorname{sh} x \Rightarrow dy = \operatorname{sh} x dx$,

$y = \operatorname{th} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx$,

$y = \operatorname{cth} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \Rightarrow dy = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx.$

4. Таблица производных и дифференциалов.

Основные правила дифференцирования функций:

1. $(cu) = cu'$.
2. $(u+v)' = u' + v'$.
3. $(uv)' = u'v + v'u$.
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

5. $\left(f(u(x))\right)' = f'_u(u)u'(x)$.
6. $y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y) \Rightarrow y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

В таблице 1 приведены формулы дифференцирования основных элементарных функций.

Таблица 1

Функция	**Производная**
$y = c$	$y' = 0$
$y = u^\alpha$ $\alpha \in \mathrm{R}$	$y' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$y = a^u$	$y' = \alpha^u \ln a \cdot u'$
$y = e^u$	$y' = e^u u'$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y = \operatorname{ctg} u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$y = \operatorname{sh} u$	$y' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
$y = \operatorname{ch} u$	$y' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
$y = \operatorname{th} u$	$y' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
$y = \operatorname{cth} u$	$y' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$
$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y=\arccos u$	$y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\mathrm{arctg}\, u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
$y=\mathrm{arcctg}\, u$	$y'=-\frac{u'}{1+u^2}$

Приведенные выше правила и формулы дифференцирования функций составляют основу дифференциального исчисления. Используя их, можно найти производную и дифференциал любой элементарной функции.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте правила нахождения производной постоянной функции, производной суммы и разности функций, производной произведения функций, производной частного функций.
2. Сформулируйте правило нахождения обратной функции.
3. Как находится производная сложной функции.
4. В чем заключается инвариантность первого дифференциала?