Лекция 5. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

1. Основные элементарные функции.
2. Классификация функций.
3. Основные функции, заданные параметрическими уравнениям.
4. Полярная система координат. Основные линии, заданные в полярной системе координат.

1 Основные элементарные функции.

Из курса школьной математики известны следующие элементарные функции.

Линейная функция $y = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Область определения этой функции $D(f) = \mathbf{R}$, а множество значений

$$E(f) = \begin{cases} \mathbf{R} & \forall a \neq 0, \\ \{b\} & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Линейная функция возрастает при $a > 0$, убывает при $a < 0$.

График функции – прямая линия с угловым коэффициентом $k = a = \operatorname{tg}\alpha$ отсекающая на оси Oy отрезок, равный b (рис.1).

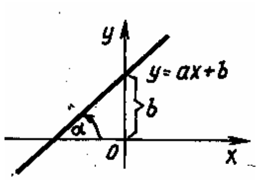


Рис.1.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

При $a > 0$ известно, что $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}; \infty\right)$. При $a < 0$ имеем $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \left(-\infty; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Графики для этих случаев представлены на рисунке 2.

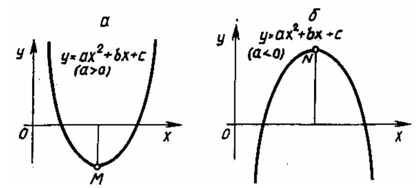


Рис.2.

Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Пусть $\alpha = 2n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = x^{2n}$ и $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [0; \infty)$ (рис.3).

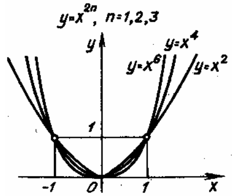


Рис.3.

Пусть $\alpha = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = x^{2n+1}$ и $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$ (рис.4).

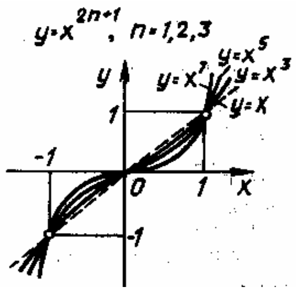


Рис.4.

Пусть $\alpha = -2n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ и $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0; +\infty)$ (рис.5).

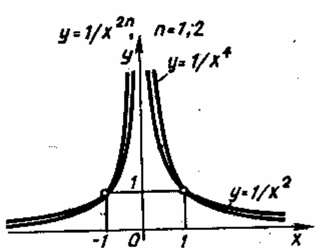


Рис.5.

Пусть $\alpha = -2n+1$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ и $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (рис.6).

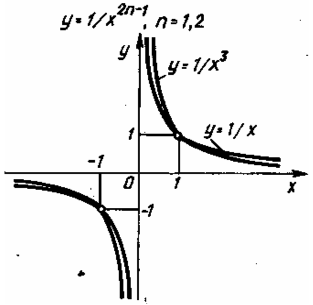
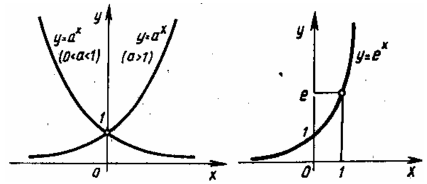


Рис.6.

Пусть $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Тогда $y = x^{\alpha}$ и $D(f) = (0;+\infty)$, $E(f) = (0;+\infty)$. При некоторых α $D(f)$ и $E(f)$ могут быть шире.

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Область определения этой функции $D(f) = \mathbf{R}$, а множество значений $E(f) = (0;+\infty)$ (рис.7,а). Если $a = e$, $e \approx 2{,}71828\ldots$, то функция $y = e^x$ называется ***экспонентой***: $y = e^x = \exp(x)$ (рис.7,б).

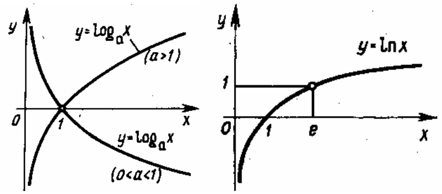


а) б)

Рис.7.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Эта функция обратная показательной. Область ее определения $D(f) = (0;\infty)$, множество значений $E(f) = \mathbf{R}$ (рис.8,а). Если $a = e$, то $y = \ln x$ называется функцией ***натурального логарифма*** (рис.8.б).



а) б)

Рис.8.

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Функция $y = \sin x$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [-1;1]$. График – синусоида (рис.9).

Функция $y = \cos x$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [-1;1]$. График – косинусоида (рис.9).

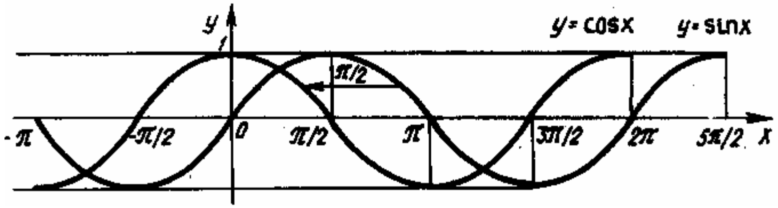


Рис.9.

Функция $y = \operatorname{tg} x$; $D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2 + \pi k} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$, $E(f) = \mathbf{R}$. График – тангенсоида (рис.10).

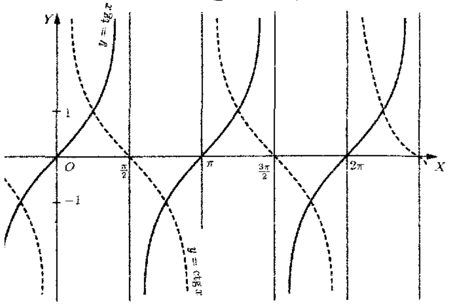


Рис.10.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$; $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\pi k | \ k \in \mathbf{Z}\}$, $E(f) = \mathbf{R}$. График – котангенсоида (рис.10).

К тригонометрическим функциям относятся функции: секанс $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ и косеканс $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Они определяются как функции, обратные соответствующим тригонометрическим функциям.

Функция $y = \arcsin x$: $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (рис.11).

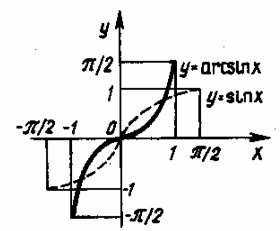


Рис.11.

Функция $y = \arccos x$: $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = [0;\pi]$ (рис.12).

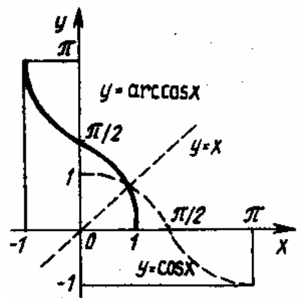


Рис.12.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$: $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$, $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис.13).

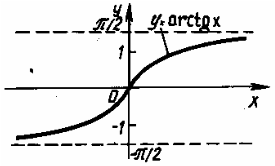


Рис.13.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$: $y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$, $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = (0;\pi)$ (рис.14).

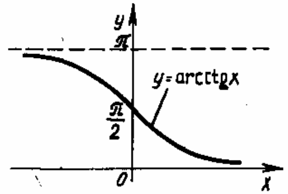


Рис.14.

Гиперболические функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

Функция ***синус гиперболический*** $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$ (рис.15).

Функция ***косинус гиперболический*** $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [1;+\infty)$ (рис.15).

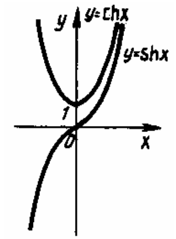


Рис.15.

Функция ***тангенс гиперболический*** $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Тогда $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = (-1;1)$ (рис.16).

Функция ***котангенс гиперболический*** $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Тогда (рис.16)

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$D(f) = \begin{cases} (0;+\infty) \text{ при } x > 0, \\ (-\infty;0) \text{ при } x > 0, \end{cases} \quad E(f) = \begin{cases} (1;+\infty) \text{ при } x > 0, \\ (-\infty;1) \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

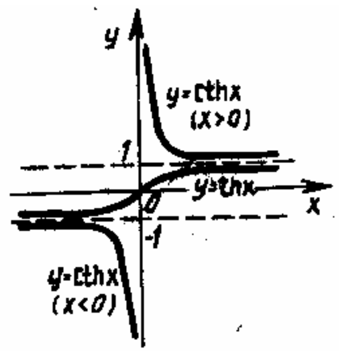


Рис.16.

2. Классификация функций.

Рассмотренные функции: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические являются ***основными элементарными функциями.*** Также все функции, полученные с помощью конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями, а также их композиций, составляют класс элементарных функций.

Пример. Элементарными функциями являются: $f(x) = |x|$, $f(x) = \log_a^3\left(\arcsin 3^{x-1}\right)$, $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{x^3 - \sin x}$, $f(x) = 10^{1 - \sin^4 \frac{1}{x}}$ и т.д.

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1. Рациональные функции.

Функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

где $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ называется ***рациональной функцией*** или ***многочленом степени*** n.

2. Дробно-рациональные функции.

Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n},$$

называется ***дробно-рациональной***.

3. Иррациональные функции.

Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями, и не являющаяся рациональной, называется ***иррациональной***.

Пример. Функции $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{x^2+1}$, $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5}{3x^3-8}}$, $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{2-x^2}$ являются иррациональными.

Рациональные, дробно-рациональные и иррациональные функции образуют класс **алгебраических функций.**

4. Трансцендентные функции.

Всякая функция, не являющаяся алгебраической, называется ***трансцендентной***. К трансцендентным функциям относятся тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные, логарифмические, гиперболические и обратные гиперболические функции.

Пример. Функции $y=\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y=\mathrm{sh}(x-2)$, $y=\ln\left(x^3+5\right)$ являются трансцендентными.

3 Основные функции, заданные параметрическими уравнениями.

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми.

Множество точек $M(x;y)$ числовой плоскости $\mathbf{R}^2$, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

где $t\in T$, ***параметрически*** задает некоторую линию $\Gamma\in\mathbf{R}^2$.

Наиболее часто употребляемые в математическом анализе линии являются следующие.

1. Окружность $x^2+y^2=R^2$.

Параметрические уравнения окружности при $0\le t<2\pi$:

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t. \end{cases}$$

2. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Параметрические уравнения эллипса имеют вид ($0\le t<2\pi$) (рис.17):

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

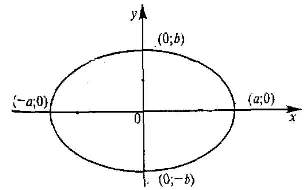


Рис.17.

3. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Параметрические уравнения гиперболы имеют вид ($t\in\mathbf{R}$) (рис.18):

$$\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

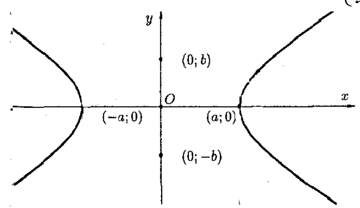


Рис.18.

4. Декартов лист – кривая третьего порядка, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$$

где $t = \operatorname{tg}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ox}})$. Эта кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$.

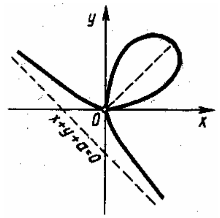


Рис. 19.

5. Астроида – замкнутая линия, являющаяся траекторией точки, лежащей на окружности круга радиусом *r*, который катится по внутренней стороне неподвижного круга радиусом a. Ее уравнение в *декартовой системе* имеет вид:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

в *параметрическом* виде

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

где $0 \le t < 2\pi$.

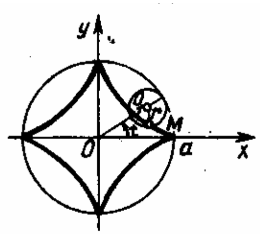


Рис.20.

6. Циклоида – это кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Циклоида состоит из конгруэнтных дуг, каждая из которых соответствует полному обороту катящегося круга. Параметрические уравнения циклоиды есть

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

где $t \in \mathrm{R}$.

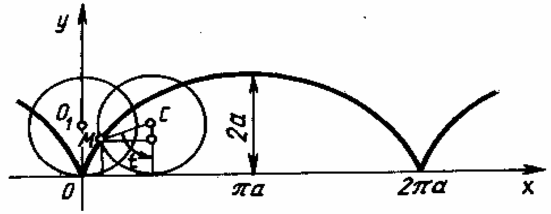


Рис.21.

4. Полярная система координат. Основные линии, заданные в полярной системе координат.

Кроме декартовой системы координат Oxy, на плоскости $\mathbf{R}^2$ иногда используется полярная система координат.

Определение 1. Система координат, задаваемая точкой O, называемой ***полюсом***, лучом Ou, называемым ***полярной осью***, и выбранной на полярной оси ***единицей масштаба***, называется ***полярной системой координат***.

Определение 2. ***Полярными координатами*** точки $M \in \mathbf{R}^2$ (не совпадающей с полюсом), называется полярный радиус $r=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ точки M и полярный угол φ, т.е. угол, на который надо повернуть ось Ox до совпадения ее с вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.22), т.е. $M(r;\varphi)$.

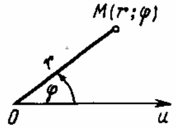


Рис.22.

Если поворот совершается против хода часовой стрелки, то $\varphi(M)>0$, в противном случае $\varphi(M)<0$. Полярный угол φ принимает бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Значение полярного угла $0\le\varphi<2\pi$ называется ***главным***. Иногда в качестве главного значения принимается $-\pi<\varphi\le\pi$.

Положение любой точки M на плоскости однозначно определяется координатами r и φ, $0\le r<\infty$, $0\le\varphi<2\pi$. Если точка M совпадает с полюсом O, то ее радиус-вектор равен нулю ($r=0$), а полярный угол φ можно выбирать любым.

Связь декартовых и полярных координат устанавливается из геометрических соображений (рис.23).

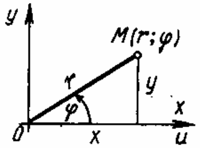


Рис.23.

1) Зная полярные координаты r и φ точки M, ее декартовы координаты x и y находятся по формулам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

2) Зная декартовы координаты x и y точки M, ее полярные координаты находятся по формулам:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Если $0\le\varphi<2\pi$, то найденному значению $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}$ соответствуют два значения φ. Из этих двух значений угол φ выбирается по знакам $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Зная связь между декартовыми и полярными координатами точки, уравнение линии Γ на плоскости можно записать в виде $F(r,\varphi)=0$ или $r=r(\varphi)$.

Область определения функции в полярной системе координат обозначается $D(r)$, множество значений – $E(r)$.

Часто используются следующие линии, заданные в полярной системе координат

1. Окружность.

Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным R в полярных координатах имеет уравнение (рис.24,а):

$$r=R.$$

Окружность радиусом R с центром, смещенным по оси абсцисс вправо на a единиц описывается уравнением (рис.24,б):

$$r=2a\cos\varphi.$$

Окружность радиусом R с центром, смещенным по оси ординат вверх на a единиц описывается уравнением (рис.24,в):

$$r=2a\sin\varphi.$$

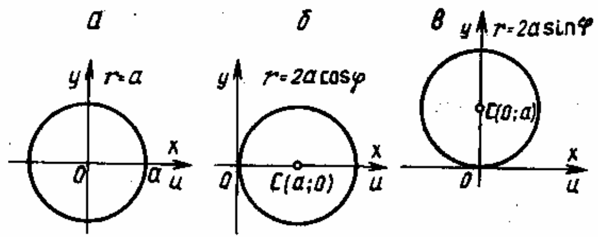


Рис.24.

2. Розы.

Розами называют семейство кривых, уравнение которых в полярных координатах записывается в виде:

$$r = a\sin k\varphi \text{ или } r = a\cos k\varphi,$$

где a, k – положительные числа. При любых a, k, φ и $r \le a$ все кривые располагаются внутри круга радиусом a. Вследствие периодичности функций $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ розы состоят из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен *a*.

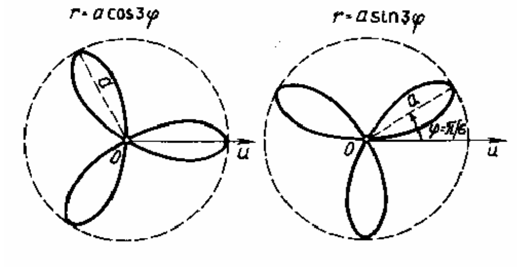


Рис.25.

Количество лепестков розы зависит от значения k. Если k нечетно число, то роза состоит из k лепестков (рис.25). Если k четное число, то – из $2k$ лепестков (рис.26).

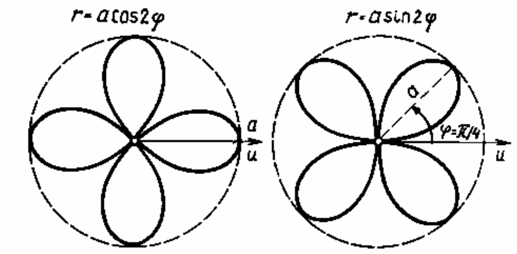


Рис.26.

3. Спирали.

Спираль Архимеда (рис.27) определяется как траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается вдоль прямой, а другое – по окружности. Полярное уравнение спирали Архимеда имеет вид:

$$r = a\varphi,$$

где a – коэффициент пропорциональности, $D(r) = \mathbf{R}$, $E(r) = \mathbf{R}$.

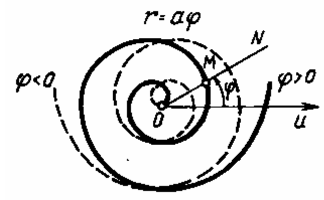


Рис.27.

Гиперболическая спираль (рис.28) – это кривая, полярное уравнение которой имеет вид:

$$r = \frac{a}{\varphi}, \; a > 0,$$

где $D(r) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $E(r) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Прямая, параллельная полярной оси и удаленная от нее на расстояние a, является асимптотой гиперболической спирали.

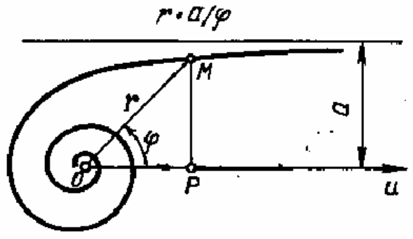


Рис.28.

Логарифмическая спираль (рис.29) – это кривая, полярное уравнение которой имеет вид:

$$r = a^{\varphi}, \; a > 0, a \ne 1,$$

где $D(r) = \mathbf{R}$, $E(r) = (0;\infty)$. Она пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом. Это свойство кривой используют в технике.

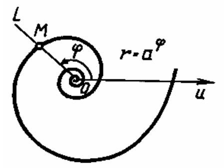


Рис.29.

Синусоидальными спиралями называют семейство кривых, уравнение которых в полярных координатах имеет вид

$$r^m = a^m \sin m\varphi \quad \text{или} \quad r^m = a^m \cos m\varphi .$$

Частным случаем при $m = \dfrac{1}{2}$ является **кардиоида** (рис.30), уравнение которой

$$r = \frac{a}{2}(1 - \cos\varphi).$$

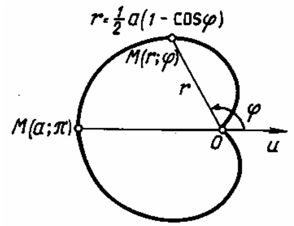


Рис.30.

При $m = 2$ уравнение $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ или $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ определяет кривую, которая называется **лемнискатой Бернулли** (рис.31).

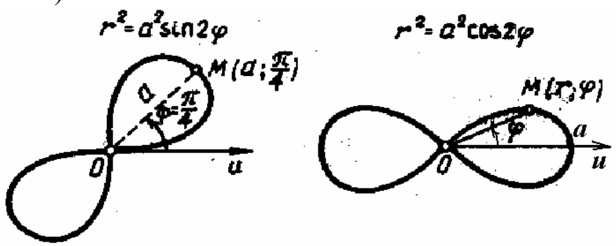


Рис.31.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные числовые функции.
2. Перечислите основные классы функций?
3. Какие уравнения линии называются параметрическими? Перечислите основные функции, заданные параметрическими уравнениям.
4. Дайте определение полярной системы координат. Какие формулы связывают полярную и декартову системы координат.
5. Перечислите основные линии, заданные в полярной системе координат.