Лекция 4. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие функции. Способы задания функции.
2. Основные свойства функций.
3. Сложная функция.
4. Обратная функция.

1. Понятие функции. Способы задания функции.

Пусть D – произвольное подмножество действительных чисел, $D \subseteq \mathbf{R}$.

Определение 1. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве D определена ***числовая функция*** f. Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, y – ***зависимой переменной***, множество D называется ***областью определения*** функции, а множество $E = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x), x \in D\}$ – ***множеством значений*** функции.

Если о функции говорить как об отображении $f : D \to E$, то $f(x)$ называется ***образом элемента*** x, а x – ***прообразом элемента*** $f(x)$. При этом множество E называется ***образом множества*** D, множество D – ***прообразом множества*** E.

Чтобы определить функцию $y = f(x)$, нужно задать множество D и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества D в элементы y множества E.

Различают следующие способы задания функции.

1. Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Пример. Найти область определения D и множество значений E функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Решение. Областью определения функции является множество

$$D(f) = \{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2;2),$$

а множеством значений

$$E(f) = \left\{y \,\middle|\, y \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Аналитически функция может быть задана не одной, а несколькими формулами. Такие функции называют ***составными***.

Примеры. **1.** Единичная функция Хевисайда (рис.1):

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ x < 0, \\ 1 \ \text{при}\ x \ge 0. \end{cases},$$

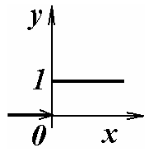


Рис.1.

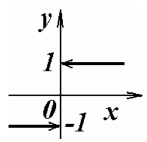


Рис.2.

2. Функция сигнум, или функция знака (рис.2):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \ \text{при}\ x < 0, \\ 0 \ \text{при}\ x = 0 \\ 1 \ \text{при}\ x > 0. \end{cases},$$

3. Функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если}\ x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{если}\ x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$$

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть ***неявно*** задана уравнением

$$F(x;y) = 0,$$

если $\forall x \in [a;b] \quad F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно y, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Примеры. **1.** Уравнение $x^2 - y + 2 = 0$ неявно задает функцию $y = x^2 + 2$, область определения которой $D(f) = \mathbf{R}$.

2. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R неявно задает две числовые функции: $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $D(y_1) = [-R; R]$ и $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $D(y_2) = [-R; R]$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в ***параметрическом*** виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на T, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$ задана ***параметрически*** и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

Переменная t называется ***параметром***. Параметр t может иметь различный смысл, определяемый характером функциональной зависимости.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрически. Действительно,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми.

Пример. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R в параметрическом виде записывается как

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

Здесь параметр t – угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ текущей точки $M(x; y)$ окружности, отсчитываемый против хода часовой стрелки, $0 \le t < 2\pi$. Очевидно, что для любой точки $M(x; y)$

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

2. Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; ...; y_n$.

Известны таблицы значений логарифмической функции, тригонометрических функций и др. Этот способ задания функции широко применяется на практике в тех случаях, когда значения функции имеют определенный физический смысл и находятся в результате эксперимента. К достоинствам табличного способа относят то, что для значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ из таблицы сразу можно получить значения функции $y_1; y_2; ...; y_n$ (т.е. не нужны дополнительные вычисления). Его недостатками являются: отсутствие наглядности (трудно судить о характере изменения функции); невозможность определения промежуточных значений функции по таблице; затруднения в непосредственном применении математического аппарата.

Если функция задана аналитически, то для нее всегда можно построить таблицу (т.е. табулировать функцию). Если функция задана таблично, то в общем случае найти аналитическое выражение функции по ее табличным данным невозможно. Однако с помощью интерполирования функции можно найти формулу (и не одну) для таблично заданной функции, которая будет давать точные табличные значения функции и ее приближенные значения, не входящие в таблицу. Такие формулы называют ***интерполяционными***. Для составления таблиц функций в настоящее время используют специальные ППП ЭВМ.

3. Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Определение 2. ***Графиком Г функции*** $y = f(x)$ называется множество точек $M(x; y)$ плоскости $\mathbf{R}^2$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т.е. $\Gamma = \{M(x; y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = f(x)\}$.

Чаще всего график функции есть некоторая линия. Если аргумент x принимает отдельные значения, например $x \in \mathbf{N}$, то графиком функции является множество изолированных точек.

Пример. Графики функций $y = n$, $y = n!$, $n \in \mathbf{N}$, представляют собой множества изолированных точек плоскости $\mathbf{R}^2$.

Не всякая линия плоскости $\mathbf{R}^2$ является графиком числовой функции $y = f(x)$: линия не является графиком функции, если одному значению $x_1 \in D$ соответствуют несколько значений переменной y.

В технике и медицине применяются различные приборы-самописцы, регистрирующие ход и изменения некоторых величин с течением времени. Они графически задают эти величины как функции времени. Например, в медицине электрокардиограф вычерчивает электрокардиограмму – кривую изменения электрических импульсов сердечной мышцы. В метеорологии вычерчиваются кривые, изображающие зависимость между давлением и временем (барограммы) и т.д.

Графический способ задания функции нагляден, но не удобен для применения математического аппарата.

4. Программный способ задания функции, при котором функция задается с помощью указания программы на одном из

машинных языков. Этот способ задания функции используется при решении различных задач на ЭВМ. Разработаны стандартные программы, задающие различные функции.

2. Основные свойства функций.

Одной из основных задач математического анализа является анализ функций. Изучить или проанализировать функцию $y = f(x)$ – значит охарактеризовать поведение этой функции на области определения $D(f)$ и построить ее график.

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

1. Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$.

Определение 3. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется ***нулем функции***, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

2. Четность и нечетность функции.

Определение 4. Числовая функция $y = f(x)$ называется ***четной*** (***нечетной***), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. для каждой точки $x \in D(x)$ существует точка $-x \in D(x)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями ***общего*** вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны. При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x > 0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x < 0$.

3. Периодичность функции.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если для нее существует такое число $T \neq 0$, что выполняются следующие условия:

1) $\forall\ x \in D(f)\ \ x - T,\ x + T \in D(f)$;

2) $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Число $T \neq 0$ называется ***периодом*** функции.

Если число *T* является периодом функции $y = f(x)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется ***основным периодом***. Если T – период функции $y = f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной *T*, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in \mathbf{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом *T*, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\dfrac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x) = c$, $c = \text{const}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Любое число $T \in \mathbf{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода *T* функция не имеет.

4. Монотонность функции.

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции (рис.3,а,б).

$f(x)$ *возрастает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$;

$f(x)$ *убывает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$.

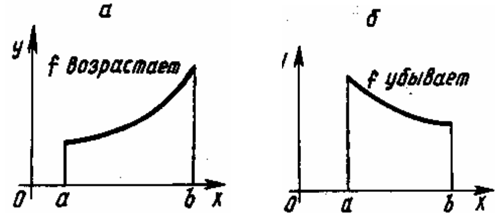


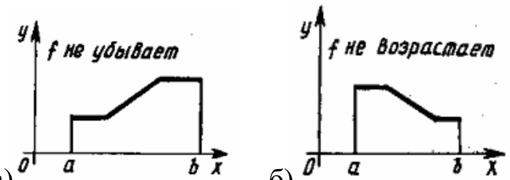
Рис.3.

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей)*** на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции (рис.4,а,б):

$f(x)$ *не убывает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$;

$f(x)$ *не возрастает на* X

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2)$.



а) б)

Рис.4.

Возрастающие и убывающие функции называются ***строго монотонными***, а неубывающие и невозрастающие – ***монотонными***.

Пример. Функция $y = 2^x$ является строго монотонной (возрастающей). Функция $y = [x]$, где $[x]$ – целая часть числа x – монотонная (неубывающая). Функция $y = c$, $c = \text{const}$, является монотонной. При этом ее можно называть как неубывающей, так и невозрастающей.

5. Ограниченность функции.

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу)*** на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$):

$$f(x) \text{ ограничена сверху на } X \iff \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \le M;$$
$$f(x) \text{ ограничена снизу на } X \iff \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \ge M.$$

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной на множестве*** $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что $\forall\, x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \le M$:

$$f(x) \text{ ограничена на } X \iff \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le M.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***неограниченной сверху*** (***снизу***) на множестве $X \subseteq D(f)$ если условия ограниченности (опред.9) не выполняются.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$, так как для любого $M > 0$ существует такое число $x \in (0;1)$ (в частности $x = \dfrac{1}{1+M}$), что

$$f\left(\frac{1}{1+M}\right) = 1 + M > M.$$

3. Сложная функция.

Пусть на некотором множестве D определена числовая функция $u = \varphi(x)$ и X – множество значений функции u. И пусть на множестве $X \subseteq D(f)$ задана функция $y = f(u)$, $D(f) \subseteq E(u)$. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y:

$$x \overset{\varphi}{\mapsto} u \overset{f}{\mapsto} y.$$

Таким образом, каждому значению $x \in D(f)$ ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y \in E(f)$, где $E(f)$ – множество значений функции $y = f(u)$:

$$E(f) = \{ y \in \mathbf{R} \mid y = f(u), u = \varphi(x), x \in D(\varphi) \}.$$

В этом случае y называется ***сложной функцией*** (***композицией функций*** f ***и*** φ) аргумента x. При этом функция $u = \varphi(x)$ называется ***промежуточным аргументом***, x – ***независимым аргументом***.

Обозначается: $y = f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Пример. Сложными являются функции: $y = \ln(2x + 6)$, $y = \sin^2 x$, $y = \arcsin(e^x)$, $y = \sqrt{\sin(1/x^2)}$, $y = \lg(\sin x)$ и т.д.

4. Обратная функция.

Пусть задана взаимно-однозначная функция $y = f(x)$, где $D(f)$ – область определения; $E(f)$ – множество значений функции $y = f(x)$.

При взаимно однозначном отображении множества D на множество E каждый элемент y множества E является образом одного и только одного элемента x множества D и наоборот, т.е.

$$y = f(x) \text{ – взаимно однозначная функция} \iff \forall x \in D\ \exists! y \in E : y = f(x);$$
$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \ne x_2 : f(x_1) \ne f(x_2).$$

Пример. Функция $y = x^3$, $D(f) = E(f) = \mathbf{R}$, является взаимно однозначной. Отображение f является биективным отображением множества $\mathbf{R}$ на множество $\mathbf{R}$, так как каждому значению $x \in \mathbf{R}$ соответствует единственный элемент $y \in \mathbf{R}$, такой, что $y = x^3$. И, наоборот, каждому элементу $y \in \mathbf{R}$ соответствует только один элемент $x \in \mathbf{R}$, такой, что $x = \sqrt[3]{y}$.

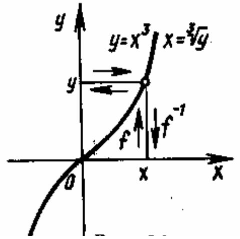


Рис.5.

Так как каждому элементу $y \in E(y)$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in D$, то соотношение $x = \sqrt[3]{y}$ является функцией, обратной к функции $y = x^3$.

Пусть $y = f(x)$ – взаимно однозначное (биективное) отображение. Так как при биективном отображении каждому элементу $y \in E(f)$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in D(f)$, то говорят, что на множестве E определена функция; ***обратная*** к функции $y = f(x)$.

Обозначается: $x = f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются ***взаимно обратными***.

Пример. Функция $y = x^2$ (рис.6), $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}_+$, не является взаимно однозначной. Действительно, для каждого элемента (образа) $y \in E$ существует два прообраза $(-x)$ и x, т.е. обратное отображение $f^{-1} : E \to D$ не является функцией, так как любому $y \in E$ соответствует не один, а два элемента x.

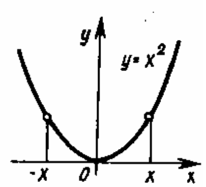


Рис.6.

Приведенный пример показывает, что не всякая функция $y = f(x)$ имеет обратную. Функция, имеющая обратную, называется ***обратимой***.

Теорема 1. *Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.*

Без доказательства.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy, т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

Пример. Графики функции $y = x^3$ и обратной ей функции $y = \sqrt[3]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис.7).

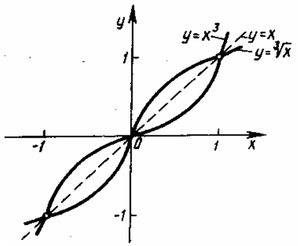


Рис.7

Для того, чтобы найти обратную функцию для взаимно однозначной функции $y = f(x)$, необходимо:

1) решая уравнение $y = f(x)$ относительно x, находим $x = f^{-1}(y)$;

2) меняя обозначения переменной x на y, а y на x, получаем функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к данной функции.

Пример. Показать, что функция $y = 3x + 2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y = 3x + 2$ $\forall x \in \mathbf{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную. Решив уравнение $y = 3x + 2$ относительно x, получим $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3}$. Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 8.

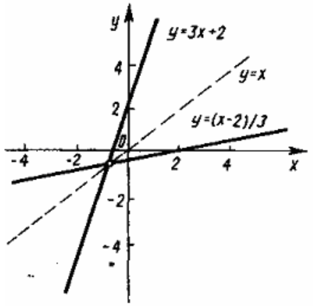


Рис.8.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.
2. Перечислите способы задания функций.
3. Какими свойствами обладают функции?
4. Дайте определение сложной функции.
5. Дайте определение обратной функции. Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?