Лекция 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Определение предела числовой последовательности.
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Предельный переход в неравенствах.

1. Определение предела числовой последовательности.

Операция предельного перехода является одной из основных в математическом анализе.

Определение 1. Число a называется ***пределом*** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

Символическая запись:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательности, имеющие предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in \mathbf{R}$, называются ***сходящимися*** (к числу a), а последовательности, не имеющие конечного предела, – ***расходящимися***.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Возьмем любое малое $\varepsilon > 0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$. Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Отсюда $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Если взять $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, то для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами $n = 100$, 101, ...

Замечания. 1. Из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ имеем $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Это означает, что начиная с номера $N(\varepsilon)$ все элементы последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ находятся в ε-окрестности точки a (рис.1).

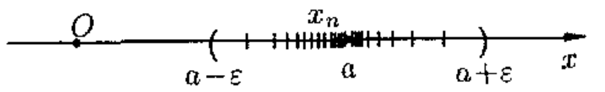

Рис.1.

2. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n - a)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \ \ |\alpha_n| < \varepsilon .$$

3. Бесконечно большая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, A > 0 \ \exists N(A) : \forall n \ge N(A) \quad |x_n| > A .$$

2. Свойства сходящихся последовательностей.

Лемма 1. *Если все элементы бесконечно малой последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ равны одному и тому же числу α, то $\alpha = 0$.*

► Доказываем методом от противного. Предположим, что $\alpha \ne 0$. По определению бесконечно малой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} : \forall n > N(\varepsilon) \ \ |\alpha_n| < \varepsilon .$$

В силу произвольности ε положим $\varepsilon = \dfrac{|\alpha|}{2}$. Тогда $|\alpha_n| < \dfrac{|\alpha|}{2}$.

По условию $\forall n \in \mathbf{N} \quad \alpha_n = \alpha$. Подставим в неравенство: $|\alpha| < \dfrac{|\alpha|}{2}$. Отсюда при $\alpha \ne 0$ получим $1 < \dfrac{1}{2}$. ◄

Теорема 1. *Сходящаяся последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *имеет только один предел.*

► Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказываем методом от противного. Предположим, что существует еще один предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Причем $a \neq b$. Из определения предела имеем $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n - a)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n - b)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности. Отсюда $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$. Приравнивая, получим $a + \alpha_n = b + \beta_n$. Тогда все члены бесконечно малой последовательности $\alpha_n - \beta_n = a - b$ равны одному и тому же числу. По лемме 1. $a - b = 0$. Значит, $a = b$. ◄

Теорема 2. *Если последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится, то она ограничена*:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \exists M \in \mathbf{R} : |x_n| \le M .$$

► Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся последовательность. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, такое, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon ,$$

т.е. $|x_n| < |a| + \varepsilon$.

Пусть $M = \max\{|a| + \varepsilon; |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n-1}|\}$. Тогда $|x_n| \le M$ $\forall n \in \mathbf{N}$, что и означает ограниченность числовой последовательности. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда: ограниченная последовательность может и не иметь предела.

Пример. Последовательность $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной. Доказать, что она не имеет предела.

Решение. Предположим, что она имеет предел, равный a. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = a \;\Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon = \frac{1}{2} \;\; \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \;\; \left|(-1)^n - a\right| < \frac{1}{2} .$$

При $n = 2k$ получим $|1 - a| < \frac{1}{2}$, при $n = 2k - 1$ получим $|-1 - a| < \frac{1}{2}$ или $|1 + a| < \frac{1}{2}$. Тогда

$$2 = |1 - a + a + 1| \le |1 - a| + |a + 1| = |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 ,$$

т.е. $2 < 1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела.

Теорема 3. *Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n .$$

► Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то можно записать $x_n = a + \alpha_n$. Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $y_n = b + \beta_n$. Здесь α_n и β_n бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$. Тогда

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n).$$

Последовательность $(\alpha_n + \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и имеет предел, равный $a + b$.

Аналогично для разности последовательностей. ◄

Теорема 4. *Произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

► Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то можно записать $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$. Тогда

$$x_n \cdot y_n = (a+\alpha_n)\cdot(b+\beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n .$$

Последовательности $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a \cdot \beta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b \cdot \alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$ согласно свойствам бесконечно малых последовательностей. Следовательно, последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и имеет предел, равный $a \cdot b$.◄

Теорема 5. *Частное двух сходящихся последовательностей* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

►Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то можно записать $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{by_n} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n} =$$

$$= \frac{1}{y_n}\cdot\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b} = \frac{1}{y_n}\cdot\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\cdot\beta_n\right).$$

Последовательность $\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\cdot\beta_n\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой в силу свойств бесконечно малых последовательностей.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ есть ограниченная последовательность.

По определению предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \iff \forall\, \varepsilon = \frac{|b|}{2}\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Тогда

$$|y_n| = |b - (b - y_n)| \geq |b| - |b - y_n| = |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

т.е. $|y_n| > \frac{|b|}{2}$.

Отсюда $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

По свойству бесконечно малых последовательностей, последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\cdot\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\cdot\beta_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.

Следовательно, последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. ◄

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}$.

Решение.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3} =$ [разделим числитель и знаменатель на n] $=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} =$[т.к. частное пределов равно пределу частного] $=$

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)} =$ [т.к. разность (сумма) пределов равна пределу разности (суммы)] $= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 8 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \dfrac{8-0}{2+0} = \dfrac{8}{2} = 4$.

3. Предельный переход в неравенствах.

Теорема 6. *Если все элементы сходящейся последовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству* $x_n \ge b$ *(* $x_n \le b$ *), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству* $a \ge b$ *(* $a \le b$ *).*

► Доказываем методом от противного.

Предположим, что $a < b$.

По определению предела

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Положим $\varepsilon = b - a$. Тогда $|x_n - a| < b - a$. После несложных преобразований получим $2a - b < x_n < b$. Из правой части этого неравенства $\forall\, n > N(\varepsilon)$ имеем $x_n < b$. Это противоречит условию, что $x_n \ge b$. Значит, справедливо неравенство $a \ge b$.

Аналогично $a \le b$. ◄

Теорема 7 (о промежуточной переменной). *Пусть последовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *таковы, что*

1) $\forall\, n \in \mathbf{N}$ *выполняется неравенство* $x_n \le y_n \le z_n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Тогда последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

► По определению предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Из последнего неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \ge N_2(\varepsilon) \quad |z_n - a| < \varepsilon .$$

Отсюда $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Возьмем $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon); N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства одновременно

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon .$$

Отсюда $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ или $|y_n - a| < \varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела последовательности.
2. Сформулируйте с помощью логических символов определение расходящейся последовательности и дайте геометрическую интерпретацию этого определения.
3. Сформулируйте свойства сходящихся последовательностей.
4. Какие арифметические действия справедливы над сходящимися последовательностями?
5. Сформулируйте и докажите теорему о сжатой переменной.