Лекция 2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Числовые множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.
2. Множество действительных чисел $\mathbf{R}$.
3. Основные подмножества (промежутки) множества $\mathbf{R}$.
4. Абсолютная величина (модуль) действительного числа.

1. Числовые множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.

Определение 1. Множество $\mathbf{N}$ ***натуральных*** чисел – это множество чисел, которые используются при счете:

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,...\}.$$

Свойства множества $\mathbf{N}$:

1) сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами, т.е. $\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N}$: $n_1 \cdot n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 + n_2 \in \mathbf{N}$ обе операции подчиняются коммутативному и ассоциативному законам, а умножение – еще и дистрибутивному закону относительно сложения);

2) операции вычитания и деления в $\mathbf{N}$ не всегда выполнимы, так как $\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ частное $\frac{n_1}{n_2}$ не всегда принадлежит $\mathbf{N}$. а $n_1 - n_2 \in \mathbf{N}$, если $n_2 < n_1$;

3) $1 \in \mathbf{N}$;

4) $n \in \mathbf{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbf{N}$;

5) если $M \subseteq \mathbf{N}$, $1 \in M$ и $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$, то $M = \mathbf{N}$ (*аксиома индукции*);

6) $\mathbf{N}$ счетно и бесконечно.

Аксиома индукции служит основой метода математической индукции, который используется при доказательстве некоторых равенств и неравенств. Для доказательства методом математической индукции необходимо:

1) проверить верность утверждения при $n = 1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение);

2) в предположении, что утверждение верно для $n = k$, доказать его справедливость для следующего натурального числа $n = k + 1$.

Пример. Доказать, что $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x > -1$ справедливо неравенство Бернулли

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Решение. Доказываем методом математической индукции.

1) $n = 1$

Неравенство справедливо, так как $\forall x > -1$ обращается в верное равенство $1 + x = 1 + x$.

2) Предположим, что неравенство Бернулли справедливо для некоторого $n = k$ и $\forall x > -1$:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Докажем его справедливость для $n = k + 1$.

Так как $x > -1$, то $1 + x > 0$. Умножим неравенство верное неравенство на положительное число $1 + x$:

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + kx + x + kx^2.$$

Отбрасывая неотрицательное слагаемое kx^2 в правой части, получаем неравенство:

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + k(x + 1)x.$$

Имеем, что неравенство Бернулли справедливо для натурального числа $k + 1$ и $\forall x > -1$.

Согласно методу математической индукции, неравенство справедливо $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x > -1$.

Определение 2. Объединение натуральных чисел, чисел, им противоположных и нуля составляет множество ***целых*** чисел $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Свойства множества $\mathbf{Z}$:

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;

2) $\mathbf{Z}$ счетно и бесконечно;

3) $\mathbf{Z}$ упорядочено, т.е. для любых двух целых чисел $p_1, p_2 \in \mathbf{Z}$, имеет место одно и только одно из трех соотношений:

$$p_1 < p_2,\ p_1 = p_2,\ p_1 > p_2;$$

4) в $\mathbf{Z}$ определены операции сложения, умножения и вычитания, т.е.

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbf{Z}: \ p_1 + p_2 \in \mathbf{Z}, \ p_1 \cdot p_2 \in \mathbf{Z}, \ p_1 - p_2 \in \mathbf{Z}.$$

Во множестве $\mathbf{Z}$ не всегда выполнима операция деления чисел (частное двух целых чисел не всегда целое).

Определение 3. Множество чисел вида $\frac{p}{n}$, где $p \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$, называется ***множеством рациональных*** чисел $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ q = \frac{p}{n} \middle| \, p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Свойства множества рациональных чисел Q :

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;

2) $\mathbf{Q}$ счетно и бесконечно;

3) $\mathbf{Q}$ упорядочено;

4) любое рациональное число $q = \frac{p}{n}$ может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби;

5) множество $\mathbf{Q}$ плотно, т.е. для любых $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$, $q_1 < q_2$ найдется по крайней мере одно рациональное число q, такое, что $q_1 < q < q_2$.

6) аксиома Архимеда

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbf{Q} : 0 < q_1 < q_2 \ \exists n \in \mathbf{N}: \ n \cdot q_1 > q_2;$$

7) во множестве $\mathbf{Q}$ выполнимы четыре арифметические операции (кроме деления на нуль).

Любое рациональное число можно изобразить точкой на числовой прямой, но не каждой точке этой прямой соответствует рациональное число.

Пример. Точке, отстоящей от начала координат на расстоянии, равном длине диагонали квадрата с единичной стороной, не соответствует никакое рациональное число (не существует такого рационального числа $q = \frac{p}{n}$, квадрат которого равен 2).

2. Множество действительных чисел $\mathbf{R}$.

Числа, которые представимы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби называются ***иррациональными***, т.е. это числа, которые нельзя представить в виде отношения чисел $\frac{p}{n}$, где $p \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

Пример. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \lg 2, \lg 3, \sin 20^\circ$ являются иррациональными числами.

Определение 4. Объединение рациональных и иррациональных чисел составляет ***множество действительных чисел*** $\mathbf{R}$.

Свойства множества действительных чисел $\mathbf{R}$:

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$;

2) $\mathbf{R}$ бесконечно;

3) $\mathbf{R}$ упорядочено;

4) аксиома Архимеда: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} : x_1 < x_2 \ \exists n \in \mathbf{N}: \ n \cdot x_1 > x_2$;

5) множество $\mathbf{R}$ несчетно;

6) между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу x соответствует единственная точка числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число $x \in \mathbf{R}$.

Во множестве $\mathbf{R}$ определены операции сложения, вычитания, умножения, деления на любое действительное число, отличное от нуля, возведения в степень и др. Все эти операции подчиняются приводимым ниже аксиомам.

Аксиомы сложения

А1. $\forall x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x$ (***коммутативный закон***).

А2. $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (***ассоциативный закон***).

А3. $\exists 0 \in \mathbf{R} : \forall x \in \mathbf{R}, \ x + 0 = x$ (***существование в $\mathbf{R}$ нуля***).

А4. $\forall x \in \mathbf{R} \ \exists (-x) \in \mathbf{R}: \ x + (-x) = 0$ (***существование в $\mathbf{R}$ противоположного элемента***).

Аксиомы умножения

А5. $\forall x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$ (***коммутативный закон***).

А6. $\forall x,y,z\in\mathbf{R}\setminus\{0\}:(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (***ассоциативный закон***).

А7. $\exists 1\in\mathbf{R}:1\cdot x=x\ \ \forall x\in\mathbf{R}$ (***существование нейтрального элемента***).

А8. $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\ \exists x^{-1}\in\mathbf{R}:\ \ x\cdot x^{-1}=1$ (***существование обратного элемента***) .

А9. $\forall x,y,z\in\mathbf{R}:(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ (***дистрибутивный закон относительно сложения***).

Аксиомы порядка

А10. $\forall x,y\in\mathbf{R}:x\neq y\Rightarrow x<y$ или $y<x$.

А11. $\forall x,y\in\mathbf{R}:x\le y$ и $y\le x\Rightarrow x=y$.

А12. $\forall x,y,z\in\mathbf{R}:x\le y$ и $y\le z\ \Rightarrow x\le z$.

Аксиома полноты (непрерывности)

А13. Если непустые множества X, $Y\in\mathbf{R}$ таковы, что $\forall x\in X$ и $\forall y\in Y$ выполняется неравенство $x\le y$, то $\exists c\in\mathbf{R}$, такое, что $x\le c\le y$.

Первые три вида аксиом выполняются на множестве рациональных чисел. Аксиома непрерывности справедлива только во множестве $\mathbf{R}$.

3. Основные подмножества (промежутки) множества $\mathbf{R}$.

Символы $-\infty$ и ∞ часто используются в приложениях. Они присоединяются к множеству $\mathbf{R}$ и считается, что $-\infty<x<\infty$ $\forall x\in\mathbf{R}$.

Определение 5. Множество $\forall x\in\mathbf{R}$, пополненное $-\infty$ и ∞, *обозначается* $\overline{\mathbf{R}}$, и называется ***расширенным множеством действительных чисел***, бесконечности $-\infty$ и ∞ называются ***бесконечно удаленными точками*** числовой прямой, остальные точки – ***конечными точками*** числовой прямой.

Основными промежутками во множестве $\overline{\mathbf{R}}$ являются:

Интервал с концами a и b:

$$(a;b)=\{x\in\mathbf{R}|\ a<x<b\}.$$

Отрезок с концами a и b:

$$[a;b]=\{x\in\mathbf{R}|\ a\le x\le b\}.$$

Полуинтервалы:

$$[a;b)=\{x\in\mathbf{R}|\ a\le x<b\},\ (a;b]=\{x\in\mathbf{R}|\ a<x\le b\}.$$

Бесконечные интервалы и полуинтервалы:

$$[a;+\infty)=\{x\in\mathbf{R}|\ x\ge a\},\ (a;+\infty)=\{x\in\mathbf{R}|\ x>a\},$$
$$(-\infty;b)=\{x\in\mathbf{R}|\ x<b\},\ (-\infty;b]=\{x\in\mathbf{R}|\ x\le b\},$$
$$(-\infty;+\infty)=\{x\in\mathbf{R}|\ -\infty<x<\infty\}.$$

Определение 6. ε ***- окрестностью*** $U(\varepsilon,x)$ точки $x\in\overline{\mathbf{R}}$ называется интервал $(x-\varepsilon;x+\varepsilon)$:

$$U(\varepsilon;x)=(x-\varepsilon;x+\varepsilon).$$

Для бесконечно удаленных точек $-\infty$ и $+\infty$ окрестностями являются соответственно

$$U(\varepsilon;-\infty)=\left(-\infty;-\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad U(\varepsilon;+\infty)=\left(\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right).$$

Две любые различные точки расширенной числовой прямой имеют непересекающиеся окрестности.

4. Абсолютная величина (модуль) действительного числа.

Действительные числа могут быть положительными и отрицательными. Иногда приходится рассматривать абсолютную величину действительного числа, игнорируя его знак.

Определение 7. ***Абсолютной величиной*** (***модулем***) действительного числа x называется число x, если $x\ge 0$, и число $-x$, если $x<0$.

Обозначается:

$$|x|=\begin{cases}x & \text{при}\quad x\ge 0,\\ -x & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$$

Если x изображается точкой M числовой оси, то модуль числа x это длина отрезка OM, т.е. $|x|=OM$.

Свойства абсолютной величины числа:

1. $|x|\ge 0$.
2. $|x|=|-x|$.
3. $-|x|\le x\le|x|$.

4. $\forall \varepsilon > 0 : |x| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \le x \le \varepsilon$.

5. $|x+y| \le |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.

► Действительно, в силу свойства 3, $-|x| \le x \le |x|$, $-|y| \le y \le |y|$. Сложив почленно эти неравенства, находим $-(|x|+|y| \le x+y \le |x|+|y|)$. Согласно свойству 4, полученное двойное неравенство равносильно неравенству $|x+y| \le |x|+|y|$.◄

6. $|x+y| \ge |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.

►Справедливо равенство $x = y + (x-y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$. Перейдем к модулю в обеих частях полученного равенства. Тогда

$$|x| = |y + (x-y)| \le |y| + |x-y|,$$

откуда следует, что $|x-y| \ge |x| - |y|$.◄

7. $\forall x, y \in \mathbf{R}$: $|xy| = |x||y|$ и $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ при $y \ne 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение множества натуральных чисел. Перечислите его свойства.
2. Дайте определение множества целых чисел. Перечислите его свойства.
3. Дайте определение множества рациональных чисел. Перечислите его свойства.
4. Дайте определение множества действительных чисел. Перечислите его свойства.
5. Какие промежутки существуют на действительной оси? Дайте определение ε-окрестности точки.
6. Что называется абсолютной величиной действительного числа? Перечислите свойства модуля.