Лекция 4. МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.

Квадратное уравнение $x^2+1=0$ не имеет решения во множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, так как не существует действительного числа, квадрат которого равен -1, поскольку $x^2 \ge 0$.

Обозначим $i=\sqrt{-1}$. Тогда формальное решение уравнения $x^2+1=0$ можно записать в следующем виде: $x_{1,2}=\pm i$.

Таким образом, возникла необходимость расширить множество действительных чисел $\mathbf{R}$ до нового числового множества, в котором все алгебраические уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0,$$

где $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbf{R}$, имели бы решения. Таким множеством является множество комплексных чисел.

Определение 1. ***Комплексным числом*** z называется выражение вида $x+iy$, где $x,y\in\mathbf{R}$, i удовлетворяет условию $i^2=-1$, при этом число x называется ***действительной частью***, число y – ***мнимой частью*** комплексного числа z, i – ***мнимой единицей***.

Обозначается: $z=x+iy$, $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$.

Запись комплексного числа в виде $z=x+iy$ называется ***алгебраической формой комплексного числа.***

Множество комплексных чисел *обозначается* $\mathbf{C}$.

Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x=x+0\cdot i$. Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел, т.е. $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Отсюда $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

Определение 2. Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

Определение 3. Комплексное число $z=0+i\cdot 0$, называется ***нулем*** и *обозначается* 0.

Нуль во множестве комплексных чисел совпадает с числом 0 множества действительных чисел $0+i0=0$.

Понятие *неравенства* для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т.е. $z_1\ne z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2. Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

Определение 4. Комплексное число $\bar z=x-iy$ называется ***сопряженным*** комплексному числу $z=x-iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются ***комплексно-сопряженными***.

Пример. Числа $z=3+5i$ и $\bar z=3-5i$ являются комплексно-сопряженными**.**

Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Комплексное число $z=x+iy$ *геометрически* изображается на плоскости $\mathbf{R}^2$ *точкой* с координатами x, y, или *вектором* $\vec z$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом координатную плоскость Oxy называют ***комплексной плоскостью***, ось абсцисс – ***действительной*** осью, ось ординат – ***мнимой*** осью комплексной плоскости.

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ соответствует определенная точка $M(x,y)$ комплексной плоскости и, наоборот, каждой точке $M(x,y)$ этой плоскости соответствует определенное число $z=x+iy$. Между точками плоскости $\mathbf{R}^2$ и элементами множества $\mathbf{C}$ (комплексными числами) существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексная плоскость является геометрической моделью множества $\mathbf{C}$ т.е. множеству комплексных чисел $\mathbf{C}$ соответствует вся плоскость $\mathbf{R}^2$.

О п р е д е л е н и е 5. ***Модулем*** комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $z(x, y)$ до начала координат:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

О п р е д е л е н и е 6. ***Аргументом*** комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, который образует радиус-вектор точки $z(x, y)$ с положительным направлением оси Ox.

Обозначается: $\operatorname{Arg} z$.

Для $z \neq 0$ аргумент z определяется равенствами (рис.1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется ***главным значением аргумента*** и *обозначается* $\arg z$.

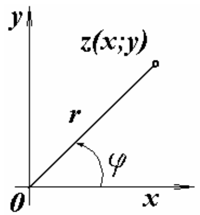

Рис.1.

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Операции над комплексными числами определяются таким образом, чтобы для их частного случая – действительных чисел – эти операции совпадали с известными. Основой при операциях над комплексными числами служит предположение

$\left(\sqrt{-a}\right)^2 = -a$. Формально действия над комплексными числами производятся по тем же правилам, что и действия над многочленами (в частности, двучленами) с действительными коэффициентами, учитывая при этом $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ и т.д.

1. Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей этих чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Заметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом действительным.

Сумма комплексно-сопряженных чисел

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \in \mathbf{R}\ .$$

Сложение (вычитание) комплексных чисел производится так же, как сложение и вычитание векторов: при сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются). При этом модуль разности двух комплексных чисел

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

есть расстояние между точками z_1 и z_2.

3. Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Произведение двух комплексно-сопряженных, не равных нулю, чисел равно положительному действительному числу. В самом деле,

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + xyi - xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2.$$

4. *Деление комплексного числа* z_1 ***на*** $z_2 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под ***частным*** $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z, такое, что $z_2 \cdot z = z_1$.

Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексно-сопряженное к знаменателю число $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

5. *Возведение комплексного числа* z ***в степень*** n, $n \in \mathbf{N}$, рассматривается как умножение z на себя n раз.

Примеры.

1. $(x_1 + iy_1)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

2.
$(x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(yi) + 3xy(yi)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$.

2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Любому комплексному числу $z \in \mathbf{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка комплексной плоскости, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x, y. Эту же точку z можно однозначно определить заданием аргумента и модуля.

Пусть на комплексной плоскости выбраны точка O и луч Or с началом в точке O. Совместим точку O с началом декартовой системы координат, а луч – с действительной осью x. Тогда каждой точке $z(x; y)$ можно поставить в соответствие два числа: r – полярный радиус, равный длине отрезка OM, и φ – полярный угол, равный углу между полярной осью и лучом OM; при этом

$0 \leq r < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки М (рис. 2).

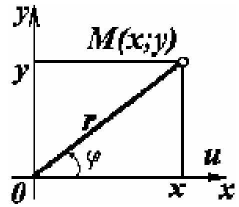

Рис.2

Из рисунка видно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение 7. Выражение

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется ***тригонометрической формой комплексного числа***.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $z = x + iy$ к тригонометрической с помощью формул, связывающих декартовы и полярные координаты, необходимо:

1) найти модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

2) по формулам

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

найти аргумент φ.

Пример. Изобразить в комплексной плоскости **C** число $z = -1 - i\sqrt{3}$ и представить его в тригонометрической форме.

Решение. 1) Для геометрического изображения комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$ построим точку $M(-1; -\sqrt{3})$ и радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис.3).

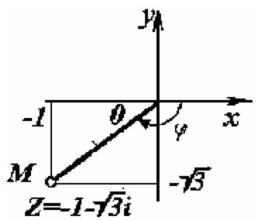

Рис.3.

Точка M и вектор $\overrightarrow{OM}$ являются геометрическим изображением комплексного числа z.

2) Представим комплексное число $z=-1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Модуль равен

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2.$$

Так как $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arg z=\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$.

Тогда $z=-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

1. Умножении комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

► Имеем

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).◄$$

2. Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

► Имеем при $z_2\neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)+in(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).◄$$

3. Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

► Число z^n, где $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$ можно рассматривать как умножение z на себя n раз:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Отсюда $\left|z^n\right|=r^n$, $\arg z^n=n\arg z$ ◄

При $r=1$ из формулы следует ***формула Муавра***

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

4. Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

$$z_k=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),$$

где $n\in\mathbf{N}$, $k=0,2,...,n-1$.

► Корень $z_k=\sqrt[n]{z_0}$ степени $n\in\mathbf{N}$ из комплексного числа z_0 определяется как комплексное число z, которое, будучи возведено в степень n, дает число z_0, т. е. $z_k^n=z_0$. Запишем числа z_0 и z_k в тригонометрической форме: $z_0=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$, $z_k=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда

$$z_k^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)^n=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0).$$

Отсюда $r^n=r_0$ и $n\varphi=\varphi_0+2k\pi$. Тогда $\varphi=\dfrac{\varphi_0+2k\pi}{n}$, $k\in\mathbf{Z}$, и $r=\sqrt[n]{r_0}$.

Итак,

$$z_k = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right).$$

Отсюда следует, что среди значений $\sqrt[n]{z_0}$ различными являются только те n, которые получаются при $k = 0,1,...,n-1$. ◄

В комплексной плоскости **C** точки, соответствующие различным значениям корня n-й степени из комплексного числа $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в точке O, причем одна из вершин (соответствующая $k = 0$) имеет полярные координаты $\sqrt[n]{r_0}$, $\dfrac{\varphi_0}{n}$.

Пример. Пусть $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$. Требуется записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и найти $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, $\sqrt[3]{z_2}$.

Р е ш е н и е. Чтобы записать комплексное число $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме, найдем его модуль и аргумент:

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \arg z_1 = -\frac{\pi}{3}.$$

Тогда $z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Представим $z_2 = 1 + i$ в тригонометрической форме.

Модуль

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = 2,$$

аргумент

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ \arg z_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Найдем:

1) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) - i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right),$$

3) $z_1^2 = 2^2\left(\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right) = -2 - i2\sqrt{3}$.

$$z_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(8k+1)\pi}{12} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{12}\right),\ k = 0,1,2.$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = 1{,}084 + 0{,}291i$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = -0{,}794 + 0{,}794i$,

при $k = 2$ имеем

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) = -0{,}291 - 1{,}084i.$$

Дадим геометрическую интерпретацию полученных значений $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1+i}$. Модули всех z_j, $j = 0,1,2$ равны $\sqrt[6]{2} \approx 1{,}122$. Следовательно, точки z_0, z_1, z_2 лежат на окружности радиусом $r = 1{,}122$ с центром в начале координат. Построив эти точки в комплексной плоскости **C**, видно, что они являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность (рис. 4).

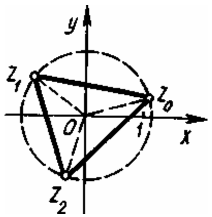

Рис.4.

Удобной формой комплексного числа является ***показательная форма***. Чтобы получить ее, воспользуемся формулой Эйлера, устанавливающей связь между показательной и тригонометрическими функциями:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi\,,\ \varphi\in\mathbf{R}\,,$$

где $e=2{,}7182818...$ – иррациональное число, которое будет определено позднее.

Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Используя формулу Эйлера, имеем:

$$z=r\,e^{i\varphi}\,.$$

Определение 8. Выражение $z=r\,e^{i\varphi}$ называется ***показательной формой*** комплексного числа.

Здесь $r=|z|$; $\varphi=\arg z+2k\pi$; $k\in\mathbf{Z}$.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1=r_1\,e^{i\varphi}$, $z_2=r_2\,e^{i\varphi}$, то

$$z_1z_2=r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,.$$

Если $z_2\neq0$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\,.$$

Если $n\in\mathbf{N}$, $z=r\,e^{i\varphi}$, то

$$z^n=\left(r\,e^{i\varphi}\right)^n=r^n\,e^{in\varphi}\,.$$

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\,e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}\,,\ k=0,1,2,...,n-1\,.$$

Пример. Найти $z\cdot z_1$, $\dfrac{z}{z_1}$, $\sqrt[5]{z}$, z^{12} если $z=1-i$ и $z_1=1+\sqrt{3}i$.

Решение. Запишем z и z_1 в показательной форме.

Так как $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=\operatorname{arctg}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$, то $z=\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

Так как $|z_1|=2$, $\arg z_1=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, то $z_1=2\,e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Тогда получим:

произведение $z\cdot z_1=2\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$, частное $\dfrac{z}{z_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i7\pi}{12}}$, корни $z_k=\sqrt[5]{z}=\sqrt[10]{2}\,e^{i\left(\frac{2}{5}k\pi-\frac{\pi}{20}\right)}$, $k=0,1,2,3,4$.

При $k=0$ имеем $z_0=\sqrt[10]{2}\,e^{-\frac{i\pi}{20}}$, при $k=1$ имеем $z_1=\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{i7\pi}{20}}$, при $k=2$ имеем $z_2=\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{i3\pi}{4}}$, при $k=3$ имеем $z_3=\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{i23\pi}{20}}$, при $k=4$ имеем $z_4=\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{i31\pi}{20}}$. Точки z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2}\approx1{,}072$ с центром в начале координат (рис. 5). Полярный угол точки z_0 равен $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{20}$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $\dfrac{2\pi}{5}$ к φ_0, т.е. $\varphi_k=\varphi_0+\dfrac{2\pi k}{5}$ при $k=1,2,3,4$.

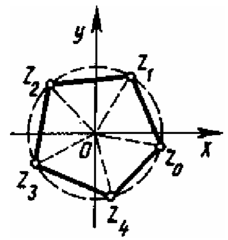

Рис.5.

Возведение в степень: $z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} \mathrm{e}^{-3\pi i}$. Используя формулу Эйлера, получим:

$$\mathrm{e}^{-3\pi i} = \cos 3\pi - i \sin 3\pi = -1.$$

Поэтому $z^{12} = -\left(\sqrt{2}\right)^{12} = -64$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение множества комплексных чисел. Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными? Приведите примеры.
2. Как изображаются комплексные числа на плоскости. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
3. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.
4. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.
5. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме.